

3차원 계층적 육면체 고체요소에 의한 p -적응적 해석

p -Adaptive Analysis by Three Dimensional Hierarchical Hexahedral Solid Element

우 광 성*
Woo, Kwang-Sung

조 준 형**
Jo, Jun-Hyung

신 영 식*
Shin, Young-Sik

요 약

이 논문에서는 적분형 르장드르 다항식을 사용한 3차원 계층적 고체요소의 유한요소 정식화를 보여준다. 제안하는 육면체 고체요소는 절점, 변, 면, 그리고 내부모우드를 포함한 4개의 서로 다른 모우드로 구성되어 있다. 영에너지 모우드와 일정변형률 조건을 확인하기 위해 고유치 시험과 조각시험이 수행되었다. 여기에 추가되어, 적응적 p -유한요소해석을 위해 유한요소해석으로부터 구한 후처리 응력값의 평활화에 기초를 둔 사후오차평가 기법이 연구된다. 자유도가 증가함에 따라 수렴속도측면에서 균등 p -분배와 불균등 p -분배에 의한 유한요소해의 차이점이 비교된다. 제안된 요소의 성능을 보이기 위해 간단한 캔틸레버 보가 테스트되었다.

Abstract

This paper presents a finite element formulation for the three-dimensional hierarchical solid element using Integrals of Legendre polynomials. The proposed hexahedral solid element is composed of four different modes including vertex, edge, face, and internal mode, respectively. The eigenvalue and patch test have been carried out to confirm the zero-energy mode and constant strain condition. In addition to these, a posteriori error estimation has been studied for the p -adaptive finite element analysis that is based on a smoothing technique to compute a post-processed solution from the finite element solution. The uniform p -refinement and non-uniform p -refinement are compared in terms of convergence rate as the number of degree of freedom is increased. The simple cantilever beam is tested to show the performance of the proposed solid element.

키워드 : 3차원 고체요소, 절점 모우드, 변 모우드, 면 모우드, 내부모우드, 극한치 기법, 적응적 p -세분화

Keywords : 3-D solid element, Vertex mode, Edge mode, Face mode, Internal mode, limit value approach, adaptive p -refinement

1. 서 론

p -Version 유한요소법은 그동안 2차원 문제에 적용되어 그 효과를 입증하여 왔다. 특히, 응력특이가 발생하는 파괴역학(1998), 비선형 적층평판해석(2003), 적응적 유한요소해석분야(2003) 등에 적용되어 높은 정확도뿐만 아니라 모델링의 단순성, 자유도 증가에 비해 빠른 수렴성, 계층적 성질과 르장드르 다항식의 직교성에 의한 수치안정성 등을 보여 주었다. 그

러나, 해석영역이 사각형과 같은 직선경계에서는 기존의 등매개변수 사상(isoparametric mapping)을, 그리고 원형, 타원형 같은 정규화된 곡선경계는 초유한사상(transfinite mapping)을 이용하여 해결할 수 있다. 반면에 임의의 불규칙 곡선경계를 갖는 문제의 경우는 기존의 유한요소법인 h -Version과 같이 요소세분화를 통하여 곡선경계를 근사화 해야 하며, 또 5차이상의 형상함수를 사용할 경우 내부절점(internal nodes)의 갯수가 증가함에 따른 추가적인 자유도의 증가 등으로 그 장점이 줄어들게 된다. 그러므로 h -Version과 p -Version 유한요소 개념이 혼용되는 적응적 hp -Version 유한요소해석법(1978)이 강구되고 있는데, 비교적으로 2차원 hp -Version

* 교신저자, 정회원 · 영남대학교 건설환경공학부 교수, 공학박사
Tel : 053-810-2593 Fax : 053-810-4622
E-mail : kswoo@yu.ac.kr

** 한국전력공사 대구전력관리처, 공학박사

또는 적응적 hp-유한요소법에 대해서는 여러 편의 논문이 있으나 3차원 p-Version 요소에 대한 연구(1991)는 미진하다고 할 수 있다. 이 연구에서는 p-Version 3차원 육면체 고체요소(hexahedral solid element)의 정식화를 살펴보고 요소망내에 불균등형상함수의 차수를 분포시켰을 때의 해의 정확도를 검증하고, 더 나아가 기초적 적응적 유한요소해석의 연구기반제공을 목적으로 한다.

p-Version FEM 3-D 고체요소는 Ghosh(1998)에 의한 사면체요소(tetrahedral element)에 대한 연구가 수행되었으나, 연구내용은 주로 2차원에 관련된 병렬해석과 불균등차수를 사용한 적응적 해석을 주로 담고 있다. 그러나 아쉽게도 3차원 고체요소에 대한 해석예제와 불균등형상함수를 사용한 방법에 대한 고찰과 예제 등의 내용이 담겨 있지 않다. 3차원 고체요소와 p-Version FEM의 적응적 해석을 접목시키는 시도를 통해 앞서 밝힌 바 있는 p-Version 유한요소법을 사용하여 해석을 수행할 때 발생할 수 있는 임의요소 내에서 과도한 자유도 사용문제를 해결하고자 한다. 적응적 해석은 근래의 유한요소법의 주요한 발전방향의 한 분야로 p-Version 유한요소법뿐만 아니라 기존의 h-Version 유한요소법 분야에서도 활발히 연구가 진행되는 분야이다. 적응적 유한요소해석법은 해석의 범위와 시간이 크게 증대되고 있는 현 상황에서 차세대 유한요소소프트웨어에 필수 불가결한 부분이라 생각된다.

근래에 컴퓨터의 급속한 발전은 해석하기 쉽지 않던 거대구조물이나, 복합적 자연현상을 해석 가능하게 하였다. 그러나 컴퓨터의 발전이 해석시 일어나는 시간적 공간적 제약을 허물고 있음은 사실이나 그러한 시공간적 제약과는 무관하게 여전히 해석자체에서 일어날 수 있는 비효율성은 존재하고 있다. 이러한 해석자체에 포함된 비효율성을 극복하여 효율적인 해석상태로 문제를 재구성한다면 기존의 해석비용과 능력만으로도 한 차원 더 정확한 해를 얻을 수 있을 것이다.

본 연구는 p-Version 3차원 육면체 고체요소의 계층적 형상함수(hierarchical shape function)의 구성방법과 해석성능을 검증할 뿐 아니라 다음에 진행될 3차원에 관한 적응적 해석의 가장 핵심적 부

분의 하나인 요소별로 서로 다른 차수를 사용하는 해석방식의 검증 효과도 보이게 될 것이다. 또한 오차평가를 포함하는 적응적해석의 전반적인 구성요소 중 한 부분을 완성하는 연구가 될 것이다. 단, 자동체눈(auto-mesh) 기능을 할 수 있는 컴퓨터 그래픽스 프로그램이 완성되지 않아서 요소수가 적은 예제를 택하여 수행하였다.

2. 3차원 계층적 고체요소의 유한요소 정식화

2.1 3차원 탄성체의 평형방정식

일반적으로 고체요소는 고체의 평형방정식에서부터 유도가 된다. 다음의 식은 고체의 평형방정식을 나타내고 있다(1991).

$$\sigma_{ij,j} = b_i + f_i + \rho \ddot{u}_i \quad (1)$$

$$u = \hat{u}, \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (2)$$

$$T_i^n = \sigma_{ij} n_j \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (3)$$

이 식들에서 b_i 는 물체력, f_i 물체의 외부에 가해지는 힘, T_i^n 는 표면력(traction), $\rho \ddot{u}_i$ 는 관성력(inertia force)을 나타낸다. Γ_1 은 Γ_2 는 각각 변위와 응력에 대한 경계조건을 나타낸다. 위의 평형방정식으로부터 적분형태의 방정식은 양변에 가중함수(weight function)을 곱하고 발산정리(divergence theory)를 적용하여 유한요소방정식을 얻는다.

$$\int \sigma_{ij} w_{i,j} d\Omega = \int (\sigma_{ij} w_i) n_j ds + \int f_i w_i d\Omega + \int b_i w_i d\Omega \quad (4)$$

$$\int \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* d\Omega = \int T_i w_i ds + \int f_i w_i d\Omega + \int b_i w_i d\Omega \quad (5)$$

2.2 계층적 형상함수

르장드르 다항식과 적분형 르장드르 다항식은 <표 1>과 같다. 적분형 르장드르 다항식은 다음의 식을 통해 얻을 수 있다.

$$\int_{-1}^1 P_i(\xi) P_j(\xi) d\xi = \begin{cases} \frac{2}{2j+1} & \text{if } i=j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (6)$$

$$M_j(\xi) = \Phi_{j-1}(\xi) \quad (j \geq 3) \quad (7)$$

$$\Phi_j(\xi) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_{j-1}(t) dt \quad (8)$$

3차원 고체요소의 경우 4가지 모우드로 구성된다. 즉, 모서리모우드(vertex mode), 주변모우드(edge

mode), 표면모우드(face mode), 내부모우드(internal mode)이며 각각 이들의 갯수는 <표 4>에 나타나 있다. 특히 3차원 고체요소의 경우 내부모우드 또는 거품모우드(bubble mode)는 6차에서부터 생성되기 시작한다.

<표 1> 르장드르 다항식과 적분형 르장드르 다항식

Legendre Polynomials	Integrals of Legendre Polynomials
$P_0(\xi) = 1$	$M_1 = \frac{1-\xi}{2}$
$P_1(\xi) = \xi$	$M_2 = \frac{1+\xi}{2}$
$P_2(\xi) = \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1)$	$M_3 = \frac{3}{2\sqrt{6}}(\xi^3 - 1)$
$P_3(\xi) = \frac{1}{2}(5\xi^3 - 3\xi)$	$M_4 = \frac{5}{2\sqrt{10}}(\xi^3 - \xi)$
$P_4(\xi) = \frac{1}{8}(35\xi^4 - 30\xi^2 + 3)$	$M_5 = \frac{1}{8\sqrt{14}}(35\xi^4 - 42\xi^2 + 7)$
$P_5(\xi) = \frac{1}{8}(63\xi^5 - 70\xi^3 + 15\xi)$	$M_6 = \frac{1}{8\sqrt{18}}(63\xi^5 - 90\xi^3 + 27\xi)$
$P_6(\xi) = \frac{1}{16}(231\xi^6 - 315\xi^4 + 105\xi^2 - 5)$	$M_7 = \frac{1}{16\sqrt{22}}(231\xi^6 - 385\xi^4 + 165\xi^2 - 11)$
$P_7(\xi) = \frac{1}{16}(429\xi^7 - 693\xi^5 + 315\xi^3 - 35\xi)$	$M_8 = \frac{1}{16\sqrt{26}}(429\xi^7 - 819\xi^5 + 455\xi^3 - 65\xi)$

<표 2> 요소내에서 모우드별 절점위치

p-차수	모우드별 절점위치	내부모우드 위치
6차		

〈표 3〉 모우드별 형상함수의 정의

모우드	모우드별 위치	형상함수
· Vertex Mode	꼭지점에 위치한 모우드	$\psi_i = \frac{1}{8}(1 - \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i)$
i = 1, 2, ..., 8 그리고 ξ_i, η_i, ζ_i 은 i번째 꼭지점의 좌표값		
· Edge Mode	ξ 축에 평행한 모우드	$\psi^\xi = \frac{1}{4}f_j(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i)$
	η 축에 평행한 모우드	$\psi^\eta = \frac{1}{4}f_j(1 + \xi\xi_i)(1 + \zeta\zeta_i)$
	ζ 축에 평행한 모우드	$\psi^\zeta = \frac{1}{4}f_j(\zeta)(1 + \eta\eta_i)(1 + \xi\xi_i)$
· j = 2, 3, ..., p 그리고 ξ_i, η_i, ζ_i 은 고려중인 모서리위에 있는 절점의 좌표값		
· Face Mode	ξ 축에 수직한 모우드	$\psi^{\eta\zeta} = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)f_j(\eta)f_k(\zeta)$
	η 축에 수직한 모우드	$\psi^{\xi\zeta} = \frac{1}{4}(1 + \eta\eta_i)f_j(\xi)f_k(\zeta)$
	ζ 축에 수직한 모우드	$\psi^{\xi\eta} = \frac{1}{4}(1 + \zeta\zeta_i)f_j(\xi)f_k(\eta)$
· j, k = 2, 3, ..., p-2; j+k = 4, 5, ..., p 그리고 ξ_i, η_i, ζ_i 은 고려중인 면위에 있는 절점의 좌표		
· Internal Mode	체적내부에 위치한 모우드	$\psi^i = f_i(\xi)f_j(\eta)f_k(\zeta)$
· i, j, k = 2, 3, ..., p-4 그리고 i+j+k = 6, 7, ..., p		

〈표 4〉 고체요소의 위치별 모우드 개수

모우드 종류	모우드 갯수	참고
Vertex Mode(VM)	8	
Edge Mode(EM)	12(p-1)	
Face Mode(FM)	3(p-2)(p-3)	
Internal Mode(IM)	(1/6)(p-3)(p-4)(p-5)	6차부터 생성

〈표 5〉 p-Version 고체요소의 고유치

p-Level	P=1	P=2	P=3	P=4	P=5	P=6
절점수	8	20	32	50	74	105
고유치수	24	60	96	150	222	315
λ_{max}	7.734E+02	1.379E+03	1.381E+03	1.529E+03	1.582E+03	1.590E+03
λ_0	6.000E-02	4.748E+00	7.745E+00	8.388E+00	9.430E+00	9.419E+00
λ_0	5.566E-02	4.678E+00	7.743E+00	8.344E+00	9.419E+00	8.284E+00
λ_0	3.492E-02	4.678E+00	6.178E+00	8.328E+00	9.419E+00	8.284E+00
λ_0	3.004E-02	4.575E+00	5.659E+00	8.283E+00	8.462E+00	8.281E+00
λ_0	1.739E-02	4.038E+00	4.392E+00	7.697E+00	8.286E+00	8.281E+00
λ_0	1.476E-02	3.386E+00	3.907E+00	6.620E+00	6.793E+00	7.817E+00

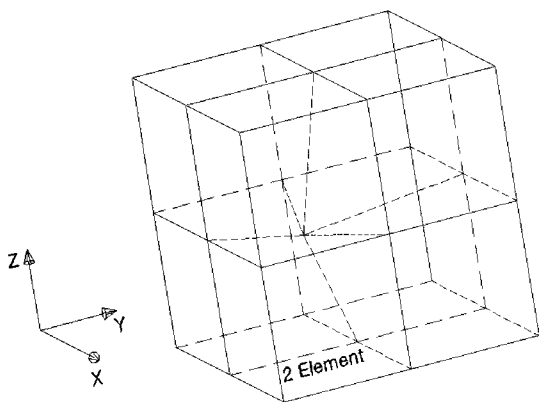
3. 3차원 고체요소의 성능평가

3.1 고유치시험(Eigenvalue Test)

의사메카니즘(spurious mechanism)의 발생여부 즉, 의사 영에너지모우드(spurious zero-energy mode)의 발생여부를 검증하기 위하여 개별 요소강성행렬을 이용한 고유치 해석을 본 연구에서 제안하는 3차원 요소에 대해서 수행하였다. 3차원 고체요소는 구속조건이 없는 하나의 요소에 대해 6개의 강체모우드(rigid mode)가 존재하는데 본 연구에서는 각 차수에 관계없이 6개의 영고유치가 존재하는 것으로 나타났다. <표 5>에는 최대 고유치와 0으로 계산된 고유치의 값들을 나타내었다.

3.2 조각시험(Patch Test)

조각시험은 Irons 등에 의해 제안되었으며, 일정 변형률상태(constant strain state)의 표현여부 및 해의 수렴성 여부를 검증하기 위해 제안되었다. 이후 조각시험의 타당성에 대해 많은 의견이 제시되었다. Irons의 조각시험은 많은 논쟁이 있음에도 불구하고 여전히 유한요소의 수렴성 보장 및 수정(debugging) 도구로 평가되고 있다.



<그림 1> 조각시험에 사용된 요소의 결합상태

본 연구에서는 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 에 대한 조각시험을 수행하였다. 그 결과 일정변형률을 유발하는 하중상태에서 각 응력 별로 조각시험을 통과하였다. 조각시험을 수행하기위해 사용한 요소는 8개로 <그림 1>과 같다. 그리고 각 면에 일정변형률을 유발하

는 하중($f=\sigma=1$)을 가하여 일정응력 상태를 관찰하였다. 아래 <표 6>은 각각의 경우 6개의 응력이 일정하게 계산된 결과를 보여주는데 응력이 계산된 위치는 요소 2번의 좌측하단 가우스 적분점이다. 좌측하단의 위치는 정규영역에서 위치를 의미한다. 이외 다른 요소들에서도 적분점 및 내부위치에서 일정응력상태를 확인할 수 있었다.

3.3 조건수(Condition Number)

일반적으로 컴퓨터를 사용한 수치해석의 경우 반올림오차(rounding error), 절단오차(truncation error) 등에 의해 오차가 발생하게 된다. 1.0은 자신을 무한히 곱해도 결과는 1.0이지만 0.99999는 자신을 무한히 곱하면 결국 0에 수렴하는 결과를 가져온다. 결국 제한된 수자 즉 유효숫자만으로 계산을 수행하는 컴퓨터의 경우 이러한 반복 계산은 큰 수치오차를 유발하게 된다. 유한요소법의 경우 선형방정식을 해석할 때 수치오차가 발생할 수 있는 가능성이 있다. 이러한 성질은 강성매트릭스[K]가 약조건(ill-condition) 또는 호조건(well-condition) 인지를 계산하여 판단할 수 있으며 식 (9)와 같이 정의되며 조건수(condition number)라 한다.

$$C(K) = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|} \quad (9)$$

식 (9)에서 λ_{\min} 은 강성매트릭스의 가장 작은 고유치를 나타내며, λ_{\max} 는 가장 큰 고유치를 나타낸다. $C(K)$ 가 클수록 약조건 매트릭스가 되어 선형방정식의 해석시 수치적 불안정성을 초래한다. 극단적으로 λ_{\min} 이 0즉, $C(K) = \infty$ 이면 특이조건으로 해석이 불가능하게 된다. $\text{LOG } C(K)$ 는 유효자리수의 손실을 나타내고 S 를 보유자리수라 하고 d 를 컴퓨터의 유효자리수라하면 식 (10)과 같은 등식이 성립한다.

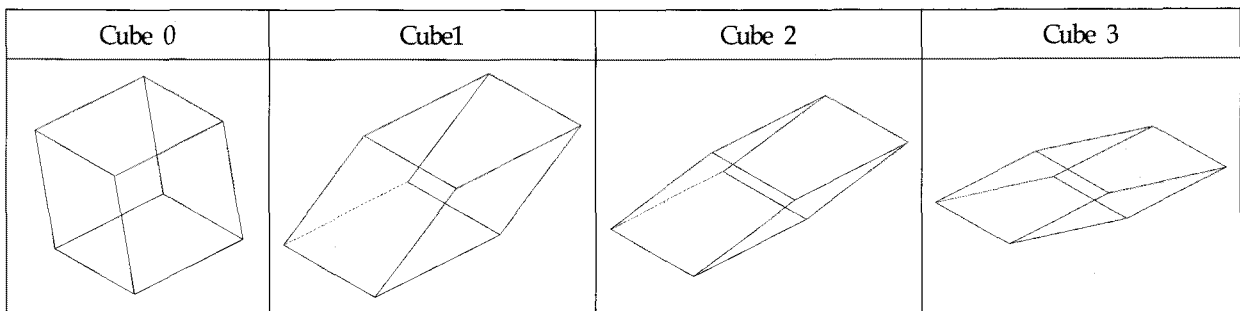
$$S = d - \text{LOG } C(K) \quad (10)$$

만약, $d=7$, $C(K) = 1000$ 이면 $S \approx 4$ 가 된다. 본 연구에서는 3차원 p-Version 고체요소를 <그림 1>과 같이 변형시켜 조건수를 구해봄으로써 각 형태

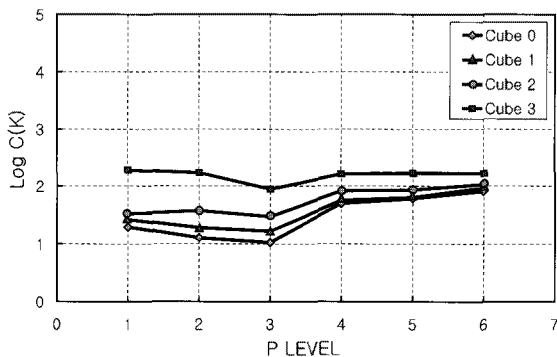
<표 6> p-Version 고체요소의 조각시험결과(요소2번 좌측하단의 응력상태)

요소 번호	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{zz}	τ_{xy}	τ_{yz}	τ_{zx}
2	1.00000E+00	-1.77636E-15	-2.13163E-14	1.22125E-14	-2.84217E-14	-1.37668E-14
2	1.52656E-16	1.00000E+00	5.27356E-16	-2.94903E-17	-3.46945E-17	6.93889E-17
2	1.52656E-16	2.28983E-16	1.00000E+00	8.76035E-17	2.77556E-17	9.71445E-17
2	-1.10675E-15	-3.08781E-16	-2.22045E-16	1.00000E+00	1.38778E-17	-1.95156E-16
2	-8.46545E-16	-6.24500E-16	-3.74700E-16	9.08995E-16	1.00000E+00	-7.96238E-16
2	-2.55351E-15	-6.32827E-15	1.11022E-16	2.55351E-15	-1.66533E-16	1.00000E+00

<표 7> 수치오차발생을 검증하기위한 요소모양



에서 모우드 수의 증가가 따른 수치오차에 미치는 영향 즉 정확도에 미치는 영향을 알아보려고 했다. <표 7>에는 계산에 사용된 요소의 모양을 나타내며 <그림 2>에서는 요소의 형상에 따른 계산오차가 도 시되어 있으나 그 영향이 미미하며 형상함수의 증가시에는 요소의 형상에 별 관계 없이 비슷한 계산 오차량이 발생됨을 알 수 있다.

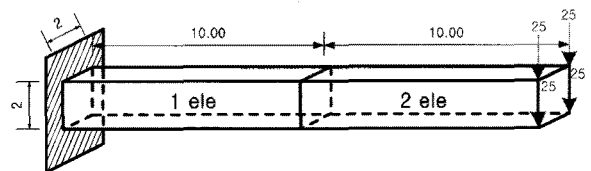


<그림 2> 요소의 기하형상에 따른 수치오차발생

4. 수치해석 예제

해석예제로서 캔틸레버보를 선택하였다. 해석루틴을 검증하기 위해 1차부터 6차까지 점진적으로 형상함수의 차수를 높여가면서 해석을 수행하였다. 또

한 적응적 유한요소해석을 수행하기 위해 요소별 차수를 다르게 설정하여 해석을 수행하였다. 보의 크기는 <그림 3>과 같이 단면이 2cm×2cm이며 길이가 20cm이다. 재료상수는 $E = 2.0 \times 10^7 N/cm^2$ 이며, $\nu = 0.3$ 으로 설정했고 자유단 부분에 25N를 4군데 재하하여 총 100N를 적용하였다. 고정단의 절점과 모우드의 자유도는 모두 고정하였고 요소의 크기는 2cm×2cm×10cm로 하였다.

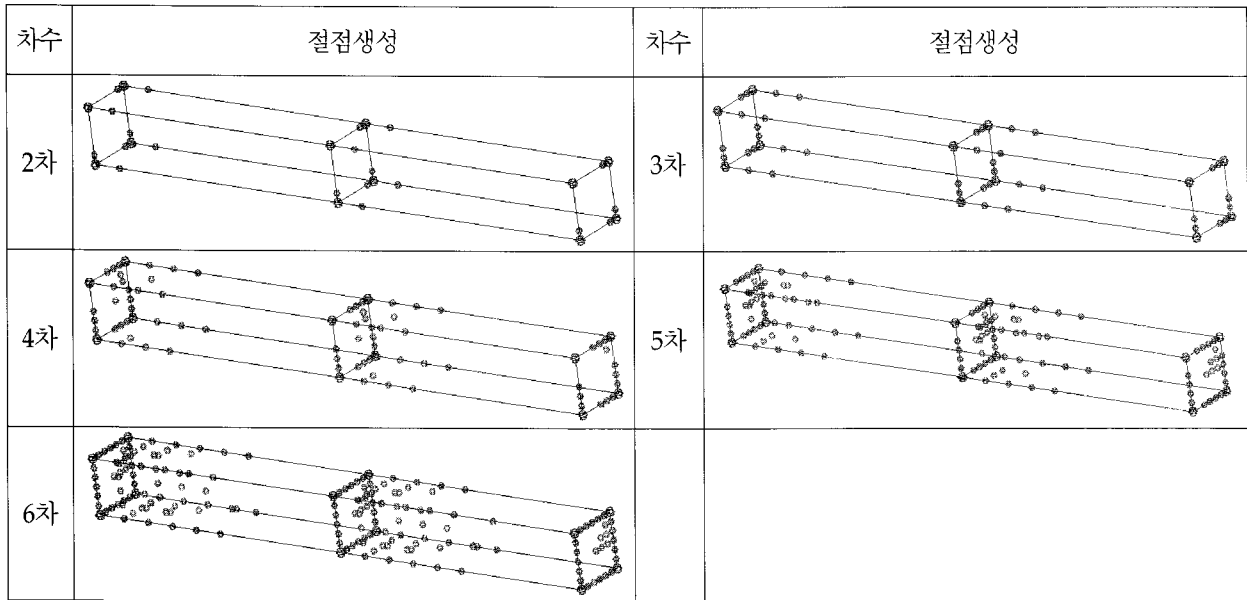


<그림 3> 집중하중을 받는 캔틸레버보(단위: N, cm)

4.1 균등차수 모델

아래 그림에서 보는 바와 같이 요소별 차수를 같게 설정하여 해석을 수행하였다. 점진적으로 차수가 증가함에 따른 절점생성과정은 <그림 4>와 같다.

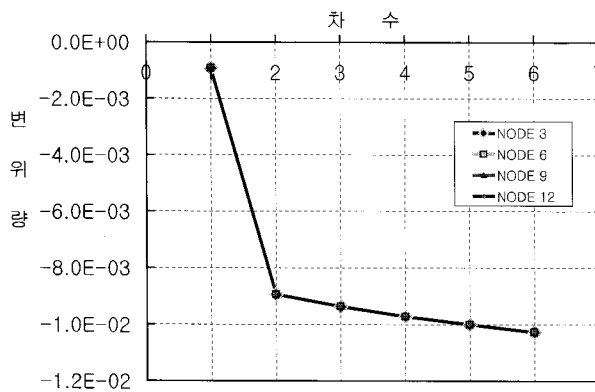
<표 8>과 <그림 5>에서 보는 바와 같이 절점 3, 6, 9, 12는 각각 보의 자유단에 위치한 절점들이다. 이 값들은 $PL^3/3EI$ 에 의해 계산한 0.01(이론 처짐



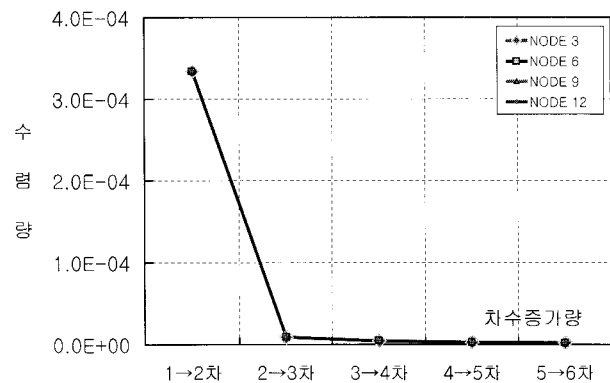
〈그림 4〉 균등차수 모델에 의한 절점생성

〈표 8〉 균등차수 모델의 형상함수 차수증가에 따른 변위값

형상함수구성	NDOF	NODE 3	NODE 6	NODE 9	NODE 12
1차	36	-0.00092937	-0.00092937	-0.00092937	-0.00092937
2차	96	-0.00894243	-0.00894243	-0.00894243	-0.00894243
3차	156	-0.00936576	-0.00936576	-0.00936576	-0.00936576
4차	249	-0.00972449	-0.00972449	-0.00972449	-0.00972449
5차	375	-0.00999842	-0.00999878	-0.00999862	-0.00999870
6차	540	-0.01026850	-0.01026700	-0.01026860	-0.01026680



〈그림 5〉 균등차수 모델에 의한 변위수렴도



〈그림 6〉 균등차수 모델에 의한 1자유도당 수렴량

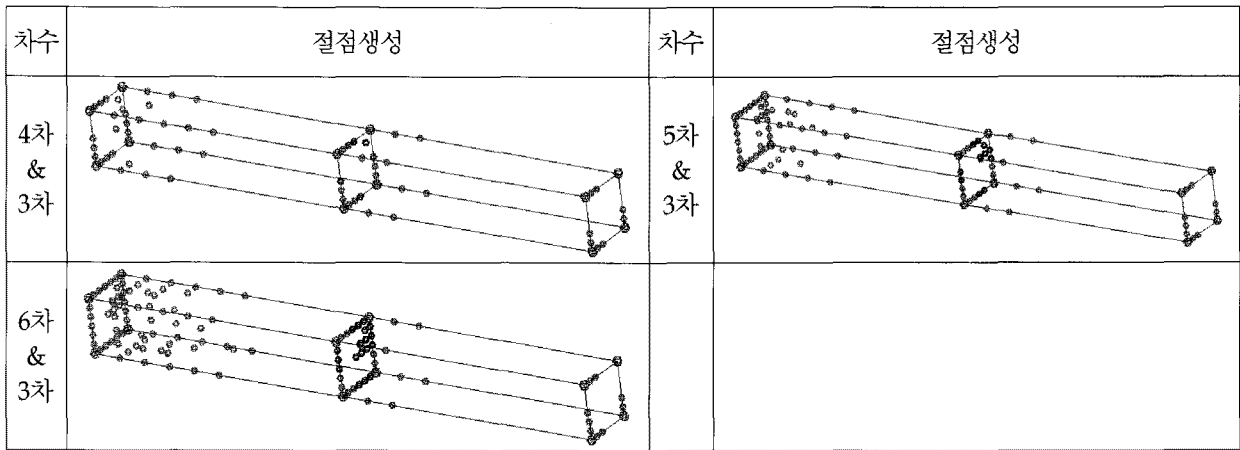
량)에 근접한 것을 볼 수 있다. 그리고, <그림 6>과 같이 차수가 증가함에 따라 1자유도당 수렴량이 감소하는 것을 볼 수 있다. 그림을 통해 판단하건데 약 4-5차 정도의 형상함수로도 충분한 수렴정도를 얻을 수 있을 것으로 생각된다. 또한 그 이상의 해석을 심화시키기 위해서는 형상함수의 증가와 동시

에 요소의 세분화 시키는 방식이 필요할 것으로 생각된다.

4.2 불균등차수 모델

<표 9>와 같이 요소별 차수를 다르게 설정하여 해석을 수행하였다. 즉 불균등 p -분포가 해에 미치

<표 9> 불균등차수 분포에 의한 절점생성



<표 10> 불균등차수 모델에 의한 변위 수렴성

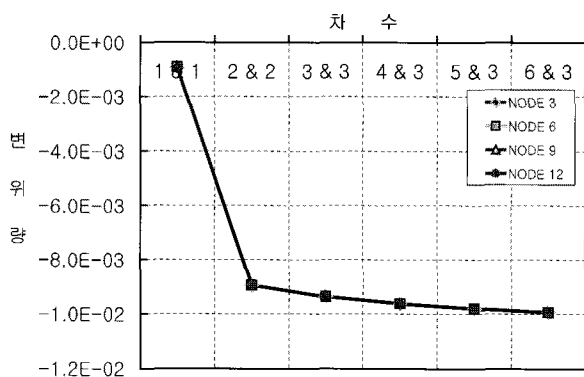
형상함수구성	NDOF	NODE 3	NODE 6	NODE 9	NODE 12
1차 & 1차	36	-0.00092937	-0.00092937	-0.00092937	-0.00092937
2차 & 2차	96	-0.00894243	-0.00894243	-0.00894243	-0.00894243
3차 & 3차	156	-0.00936576	-0.00936576	-0.00936576	-0.00936576
4차 & 3차	188	-0.00962754	-0.00962754	-0.00962754	-0.00962754
5차 & 3차	248	-0.00980338	-0.00980338	-0.00980338	-0.00980338
6차 & 3차	327	-0.00994319	-0.00994319	-0.00994319	-0.00994319

는 영향을 검증하고자 하였다.

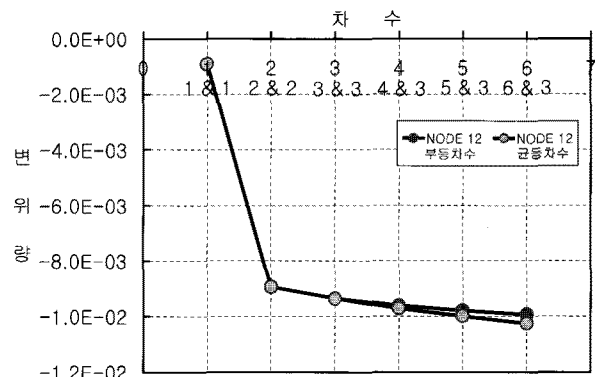
<표 10>과 <그림 7-8>에 나타난 것처럼 해석을 수행했을 경우 역시 절점 3, 6, 9, 12의 치짐값이 이론값인 0.01값에 근접한 것을 볼 수 있다. <표 10>에서 윗부분 음영표시가 된 3줄은 그래프의 연속성을 위해 나타내었다. 전 영역을 6차로 설정했을 때 보다 6차와 3차로 설정했을 때 약간 더 0.01에 가까운 안정적인 수치를 나타낸다. 이는 불필요한 모드에 의해 해의 진동이 발생한 것으로 생각된다. 이러한 문제는 2차원 p-적응적 해석을 수행하여 오차

를 평가할 때 발생하는 현상으로 무조건적인 고차의 사용이 해의 정확도를 항상 보장하지 않는 것을 나타낸다.

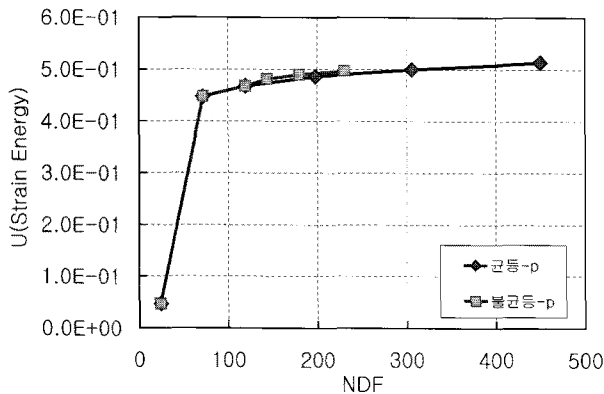
또한 <그림 8>과 <그림 10>과 같이 변위 및 변형 에너지의 수렴성을 조사한 그래프를 보면 역시 균등차수해석과 불균등차수해석의 차이를 잘 알아볼 수 있다. 특히 균등해석의 경우 변형에너지 0.5를 넘어가는 경향을 볼 수 있으나 불균등 해석의 경우 0.5에 근접한 결과를 얻을 수 있다. 물론 $0.5 = (1/2) P\delta = (1/2) P(PL^3/3EI)$ 를 통해 계산한 값이므



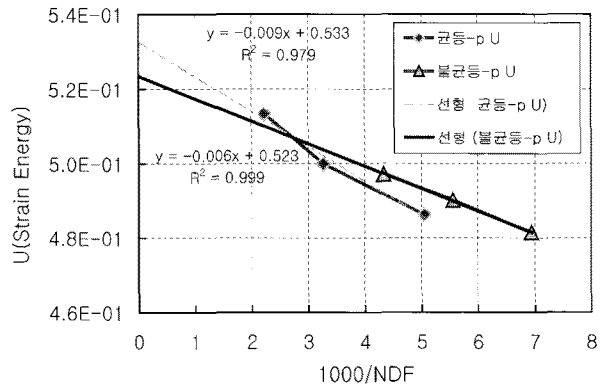
<그림 7> 불균등차수 모델에 의한 변위수렴량



<그림 8> 균등차수와 불균등차수 모델의 변위수렴성 비교



<그림 9> 균등차수와 불균등차수 모델의 변형에너지 비교



<그림 10> 균등차수 모델과 불균등차수 모델에 의한 변형에너지의 극한치 비교

로 고체평형미분방정식의 정해라고 보기는 어렵다. 그러나 변형에너지를 외삽(extrapolation)하여 정해를 추적하는 <그림 10>을 보면 불균등-p를 사용한 해석에서 강력한 선형성이 나타남을 확인할 수 있다. 이 선형성은 수렴구간에서 나타는 성질로 선형성이 확보될수록 극한치는 정해에 가깝다고 할 수 있다. 따라서 최소한 균등-p를 사용한 해석보다 불균등-p를 사용한 해석의 값이 정해에 더 가깝다고 할 수 있고 불균등-p를 사용한 해석이 나타내는 값은 <그림 10>에서 보면 0.5에 가까워지고 있다. 그러므로 위에서 간략 계산한 0.5를 비교의 대상으로 하여도 크게 문제는 없을 것으로 생각된다.

5. 결론 및 고찰

2차원문제에 적용되어서 우수한 성능을 보인 p -Version 유한요소법은 3차원문제에서도 유효함을 나타내었다. 그러나 주의할 사항은 차원의 증가에 의해 형상함수의 완전성(completeness)에 의해 모우드 수가 급격하게 늘어난다는 단점이 있다. 이러한 문제점은 본 논문에서 기본적인 예제를 보이고 있는 적응적 유한요소해석 또는 필요한 부분에 필요한 모우드를 선택적으로 사용하는 방법을 강구함으로써 해결되어야 할 것이다. 2차원 적응적 p -체는 세분화와 위의 예제에서 본 바와 같이 높은 차수로 해석하는 것이 늘 안정적인 해를 주지는 않는다. 그러한 선택적 사용에 있어서 수치적 안정성은 충분한 연구를 통해 보장되어야 할 것으로 생각된다.

본 연구에서 수행한 3차원 p -Version 고체요소는 향후에 전반적인 적응적 해석기법의 구성을 하는데 있어 해석을 담당하는 중요한 부분을 차지하게 될 것이다. 또한 기존의 2차원에 적용되어 해를 구한 문제들에 대해 3차원적 비교가 가능하므로 해의 신뢰성을 평가할 수도 있을 것이다.

3차원 적응적 해석기법을 구성하기 위해서는 2차원 적응적 해석기법에서 사용하였던 사후오차(a posteriori error) 평가기법, 자동체눈(auto-mesh) 생성기능 및 자동절점생성기능, 평가한 에러를 바탕으로 차수를 증감시킬 수 있는 적절한 판단기법이 필요할 것으로 생각된다. 특히 자동절점 생성기능은 자동체눈 생성기능과 함께 p -Version 유한요소법의 르장드르형상함수의 특성을 살려서 구성되어야 할 것으로 생각된다.

참고문헌

1. K.S. Woo, C.H. Hong and Y.S. Shin, "An Extended Equivalent Domain Integral Method for Mixed Mode Fracture Analysis by p -Version of F.E.M.", Numer. Meth. Eng., Vol. 42, No. 5, 1998, pp. 857-884.
2. K.S. Woo, C.H. Hong, and P.K. Basu "Materially and geometrically nonlinear analysis of laminated anisotropic plates by p -version of F.E.M.", Comput. & Struct., Vol. 81, No. 16, 2003, pp. 1653-1662.

3. 우광성, 조준형, 안재석, "사후오차평가에 의한 적응적 p-체분 세분화", 대한토목학회 논문집, Vol. 23, No. 2A, 2003, pp. 177-185.
4. P.K. Basu and B.A. Szabo, "Adaptive control in p-convergent approximations," Proc. 15th Annual Meeting, Society of Engineering Science, Gainesville, Florida, 1978.
5. K.S. Surana and K.W. Teong, "A twenty-seven node three-dimensional solid element for heat conduction based on p-version", Comput. & Struct., Vol. 41, No. 5, 1991, pp. 897-907.
6. D.K. Ghosh, Parallelism in Adaptive p-Version Finite Element Analysis, Ph.D. Dissertation, Vanderbilt University, 1998.

접수일자 : 2007년 12월 10일

심사완료일자 : 2008년 7월 23일