

Lipschitz 비선형 시스템의 강인 저차 상태 관측기

Robust Reduced Order State Observer for Lipschitz Nonlinear Systems

이 성 렬*
(Sungryul Lee)

Abstract : This paper presents a robust reduced order state observer for a class of Lipschitz nonlinear systems with external disturbance. Sufficient conditions on the existence of the proposed observer are characterized by linear matrix inequalities. It is also shown that the proposed observer design can reduce the effect on the estimation error of external disturbance up to the prescribed level. Finally, a numerical example is provided to verify the proposed design method.

Keywords : robust reduced order state observer, Lipschitz nonlinear systems, linear matrix inequalities

I. 서론

최근에 Lipschitz 비선형 시스템의 관측기 설계 문제가 여러 논문에서 많은 관심을 끌고 있다. Lipschitz 비선형 시스템은 선형부분시스템과 Lipschitz 특성을 갖는 비선형 부분시스템으로 구성된 시스템을 말한다. 로봇 매니플레이터의 동적모델에서 흔히 나타나는 삼각함수는 Lipschitz 특성을 갖는다. 또한 대부분의 비선형 함수는 로컬한 영역에서 Lipschitz 특성을 만족시킨다. 따라서 Lipschitz 비선형 시스템은 대부분 비선형 시스템의 모델을 포함할 수 있다는 점에서 중요성을 가진다.

Thau[1]는 최초로 Lipschitz 비선형 시스템의 관측기 연구를 수행하였다. [1]에서 관측기의 안정도를 보장하는 충분조건을 유도하였다. 그러나 이 조건은 선정된 설계 변수가 안정도를 만족시키는지를 분석하는데 유용하지만 안정도를 만족시키는 설계 변수를 체계적으로 유도하는 방법을 제공하지는 못한다. Raghavan은 [2]에서 어떤 대수적 리카티 방정식의 해를 이용하여 관측기를 설계하는 방법을 제안하였다. 그러나 선형부분시스템이 관측 가능한 경우에도 그의 알고리즘이 실패하는 단점이 있다. 또한 관측기의 이득행렬과 안정도 사이의 관계가 분명하지 않은 단점이 있다. 이런 문제점은 Rajamani에 의하여 해결되었다. [3]에서 접근적 안정도를 보장하는 관측기 이득에 관한 분명한 충분조건을 제공하였으며 이득행렬을 체계적으로 계산하는 알고리즘을 제공하였다. 또 H_∞ 제어이론의 관점에서 해석을 제공하였다. [3]의 결과는 [4]에서 저차(reduced order) 관측기 설계에 응용되었다. [4]에서 Lipschitz 비선형 시스템의 전차(full order) 관측기가 존재한다면 항상 저차 관측기도 존재함을 보였다. Pertew는 Rajamani의 H_∞ 관점의 아이디어를 이용하여 Lipschitz 비선형 시스템의 관측기 설계 문제를 선형 H_∞ 제어가 설계 문제로 변환하는 방법을 제안하였고 이를 이용하여 H_∞ 관측기를 제안하였다[5]. Pertew가 제안한 관측기는 동적 상태 관측기이다. 기존의 관측기에 안정한 동역학을 첨가함으로써 설계의 자유도를 증가시킬 수 있다. 한

편, [6]에서는 Thau가 제안한 조건을 선형행렬부등식을 이용하여 표현함으로써 안정도를 만족하는 이득행렬을 수치적으로 쉽게 계산하는 방법을 제시하였다. 또한 추정오차에 대한 외란의 영향을 최소화 하는 강인 관측기를 제안하였다. G. Lu는 [7]에서 시간 지연이 존재하는 이산 시간 Lipschitz 비선형 시스템에 대한 H_∞ 관측기를 제안하였다. [8]에서는 기존의 Lipschitz 비선형 시스템의 관측기 설계가 갖는 제약들, 즉 Lipschitz 상수에 관한 제약, 수동성, 기타 비선형성에 대한 구조적 제약 등을 해결할 수 있는 새로운 설계 방법을 제안하였다. [8]은 선형 LRT 관측기 이론을 이용하여 시스템의 Lipschitz 상수와 무관한 리카티 방정식으로부터 관측기를 설계 할 수 있는 장점이 있다. [9]에서는 외란이 존재하는 Lipschitz 비선형 시스템에 대하여 [6,7]과 비슷한 결과를 얻었다.

본 논문에서는 미지의 외란이 존재하는 Lipschitz 비선형 시스템의 강인 저차(reduced order) 상태관측기 설계 방법을 제안하고자 한다. 제안한 관측기 설계는 미지의 외란이 존재함에도 불구하고 추정오차에 대한 외란의 영향을 최소화 할 수 있는 설계 방법이다. 관측기 존재조건들은 선형행렬 부등식을 이용하여 제시된다. 마지막으로 제안한 설계 방법의 유효성을 증명하기 위하여 수치 예제를 제공한다.

II. 문제 정의

이번 장에서는 앞으로 논문에서 다룰 시스템의 형태를 소개하고자 한다. 먼저, 다음 (1)과 같은 형태의 비선형 시스템을 고려해보자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \Phi(x(t), u(t)) + Bw(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1)$$

위 식에서 $x(t) \in R^n$ 는 시스템의 상태 벡터, $y(t) \in R^p$ 는 시스템의 출력, $u(t) \in R^m$ 는 시스템의 제어 입력, $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times q}$, $C \in R^{p \times n}$ 는 상수 행렬, $\Phi: R^n \times R^m \rightarrow R^n$ 는 비선형 벡터함수를 나타낸다. $w(t) \in R^n$ 는 유한한 크기를 갖는 미지의 외란 입력을 나타낸다. 앞으로, 외란 $w(t)$ 를 제외한 (1)에 대한 모든 정보가 알려져 있다고 가정한다. 본 논문에서는 (1)의 형태를 가지는 시스템

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2008. 4. 11., 채택확정 : 2008. 5. 19.

이성렬 : 군산대학교 전자정보공학부(2sungryul@kunsan.ac.kr)

중에서 다음 가정을 만족하는 시스템을 고려한다.

가정 1: 시스템 (1)의 비선형 함수 Φ 는 모든 $x_1, x_2 \in R^n$ 와 모든 $u \in R^m$ 에 대하여 다음 (2)를 만족시키는 어떤 상수 $\alpha > 0$ 가 존재한다.

$$\|\Phi(x_1, u) - \Phi(x_2, u)\| \leq \alpha \|x_1 - x_2\| \quad (2)$$

가정 2: 시스템 (1)의 행렬 $C \in R^{p \times n}$ 는 다음 (3)을 만족시킨다.

$$\text{Rank}(C) = p \quad (3)$$

가정 1은 (1)의 비선형 함수가 Lipschitz 조건을 만족함을 의미한다. α 를 Lipschitz 상수라고 부른다. 실제로 로보틱스 모델에서 나타나는 삼각함수는 가정 1을 만족한다. 또한, 대부분의 비선형 함수들이 로컬한 영역에서는 가정 1을 만족시킨다. 가정 2는 일반적으로 대부분 시스템에서 만족되는 가정이다.

다음에서 앞으로 제안할 강인 상태 관측기의 정의를 제공하겠다. 먼저 다음과 같은 시스템을 고려해 보자.

$$\dot{\hat{x}}(t) = f_o(\hat{x}(t), u(t), y(t)), \hat{x}(t) \in R^n \quad (4)$$

정의 1: 만약 (4)가 (1)의 $\omega(t) = 0$ 인 경우 추정오차의 점근적 안정도를 보장하는 상태 관측기이고 외란이 $\omega(t) \neq 0$ 인 경우 어떤 행렬 $Q \geq 0$ 에 대하여 다음 (5)를 만족시키는 상수 $0 < \gamma < 1$ 가 존재할 때 (4)를 (1)의 강인 상태 관측기라고 정의한다.

$$\int_0^t e^T(s) Q e(s) ds \leq \gamma^2 \int_0^t \omega^T(s) \omega(s) ds + \beta, \forall t \geq 0 \quad (5)$$

여기서 $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ 이고 β 는 클래스 K 함수이다.

본 논문의 목표는 미지의 외란이 존재하는 시스템 (1)에 대하여 관측기의 추정오차가 (5)와 같은 특성을 만족시키는 강인 저차(reduced order) 상태 관측기 설계 방법을 개발하는 것이다. 본론으로 들어가기 전에 주요 결과의 증명을 위하여 필요한 보조 정리를 소개한다.

보조정리 1[10]: 선형행렬 부등식 (6)는 (7)과 동가이다.

$$\begin{pmatrix} Q(z) & S(z) \\ S^T(z) & R(z) \end{pmatrix} < 0 \quad (6)$$

$$R(z) < 0, Q(z) - S(z)R^{-1}(z)S^T(z) < 0 \quad (7)$$

위 식에서 $Q(z) = Q^T(z), R(z) = R^T(z), S(z)$ 는 모든 성분들이 z 에 대한 아핀(affine)함수인 행렬이다.

증명: [10]을 참조할 것. ■

III. 강인 저차 상태 관측기 설계

이번 장에서는 시스템 (1)에 대한 강인 저차(reduced order) 상태 관측기 설계 방법을 제안한다. 가정 2에 의하여 행렬 $W = (C^T D^T)^T \in R^{n \times n}$ 가 비특이 행렬이 되도록 하는 행렬 $D \in R^{(n-p) \times n}$ 가 반드시 존재한다. 또, 행렬 A_{ij} 와 N 을 다음처럼 정의한다.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = W A W^{-1}, N = W^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ I_{n-p} \end{pmatrix} \quad (8)$$

위 식에서 $I_i \in R^{i \times i}$ 는 단위행렬을 나타낸다. 그리고 다음과 같은 좌표변환을 고려해보자.

$$z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ KC + D \end{pmatrix} x(t) = T x(t) \quad (9)$$

위 식에서 $K \in R^{(n-p) \times p}$ 는 설계 변수로서 관측기의 이득행렬이다. 가정 2와 행렬 D 의 정의를 고려하면 좌표 변환 행렬 T 가 비특이함을 보이는 것은 매우 쉽다. 새로운 z 좌표계에서 $z_1 = Cx = y$ 이므로 저차 관측기는 부분 상태 변수 $z_2 \in R^{n-p}$ 만을 추정하면 된다. 먼저, z_2 에 대한 동역학 방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_2(t) &= (KC + D)\dot{x}(t) \\ &= (KC + D)(Ax(t) + \Phi(x(t), u(t)) + Bw(t)) \\ &= (KC + D)A \begin{pmatrix} C \\ KC + D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} \\ &\quad + (KC + D)\Phi(T^{-1}z(t), u(t)) + (KC + D)Bw(t) \\ &= (KI_{n-p}) W A W^{-1} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ KI_{n-p} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} \\ &\quad + (KC + D)\Phi(T^{-1}z(t), u(t)) + (KC + D)Bw(t) \\ &= (KI_{n-p}) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -KI_{n-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} \\ &\quad + (KC + D)\Phi(T^{-1}z(t), u(t)) + (KC + D)Bw(t) \\ &= ((KA_{11} + A_{21}) - (KA_{12} + A_{22})K)y(t) \\ &\quad + (KA_{12} + A_{22})z_2(t) \\ &\quad + (KC + D)\Phi(T^{-1} \begin{pmatrix} y(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}, u(t)) \\ &\quad + (KC + D)Bw(t) \end{aligned} \quad (10)$$

이제, (10)에 대하여 다음과 같은 강인 저차 관측기를 설계한다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_2(t) &= ((KA_{11} + A_{21}) - (KA_{12} + A_{22})K)y(t) \\ &\quad + (KA_{12} + A_{22})\hat{z}_2(t) \\ &\quad + (KC + D)\Phi(T^{-1} \begin{pmatrix} y(t) \\ \hat{z}_2(t) \end{pmatrix}, u(t)) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\hat{x}(t) = T^{-1} \begin{pmatrix} y(t) \\ \hat{z}_2(t) \end{pmatrix}$$

다음 정리에서 관측기 (11)이 (5)를 만족시키는 관측기임을 증명하겠다.

정리 1: 만약 시스템 (1)이 가정 1과 2를 만족시키고 비선형 행렬부등식 (12)를 만족시키는 양한정 대칭 행렬 P , 행렬 K , 상수 $0 < \gamma < 1$ 이 존재한다면 시스템 (11)은 시스템 (1)의 강인 저차 상태 관측기이다.

증명: 저차 관측기 (11)의 추정오차를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} &\left((KA_{12} + A_{22})^T P + P(KA_{12} + A_{22}) + N^T N + I_{n-p} \right. \\ &\quad \left. + \alpha^2 P(KC + D)(KC + D)^T P P(KC + D)B \right) < 0 \quad (12) \\ &\quad - \gamma^2 I_q \end{aligned}$$

P , 행렬 X , 상수 $0 < \gamma < 1$ 이 존재한다면 시스템 (11)은 시스템 (1)의 강인 저차 상태 관측기이다. 그리고, 관측기 이득 행렬은 $K = P^{-1}X$ 이다.

증명: 증명은 보조 정리 1의 결과를 이용하여 (12)와 (24)가 등가임을 보이는 것으로 충분하다. 나머지 증명은 정리 1과 같다. (19)의 행렬 Δ 는 다음처럼 분해할 수 있다.

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Pi & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12}^T & -\gamma^2 I_q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P(KC+D) \\ 0 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{\alpha^2} I_{n-p} \right)^{-1} ((KC+D)^T P 0) \quad (25)$$

(25)에서 $X = PK$ 으로 정의하면 보조정리 1에 의하여 (12)와 (24)는 등가이다. ■

IV. 수치 예제

이번 장에서는 수치 예제를 통하여 제안한 관측기 설계 방법의 유효성을 증명하고자 한다. 다음과 같은 행렬 및 비선형 함수를 갖는 (1)과 같은 형태의 비선형 시스템을 고려해보자.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -48.6 & -1.26 & 48.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 1.95 & 0 & -1.95 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = (0 \ 1 \ 0 \ 0)^T, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(x, u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 21.6u \\ 0 \\ -0.03\sin(x_1) \end{pmatrix} \quad (26)$$

(26)의 비선형 함수 Φ 는 가정 1을 만족시키고 Lipschitz 상수는 $\alpha = 0.03$ 이다. 또한, 행렬 C 는 가정 2를 만족시킨다. 정의에 의하여 행렬 W 는 다음과 같다.

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (27)$$

또, 행렬 A_{ij} 는 (8)에 의하여 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -48.6 & -1.26 & 48.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 1.95 & 0 & -1.95 & 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

관측기 이득 행렬 K 는 (24)으로부터 구해진다. 선형행렬 부등식 (24)를 만족시키는 양한정 대칭 행렬 P, X , 상수 γ 를 구하기 위하여 Matlab의 mincx 명령을 이용한다. (24)를 만족시키면서 γ 를 최소화하는 해를 구하면 다음과 같다.

$$P = \begin{pmatrix} 0.0492 & -0.1 \\ -0.1 & 0.2522 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & -0.0492 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & -5.1624 \\ 0 & -2.0471 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5.1624 & 1 & 0 \\ 0 & -2.0471 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (29)$$

$$\gamma_{\min} = 0.0318$$

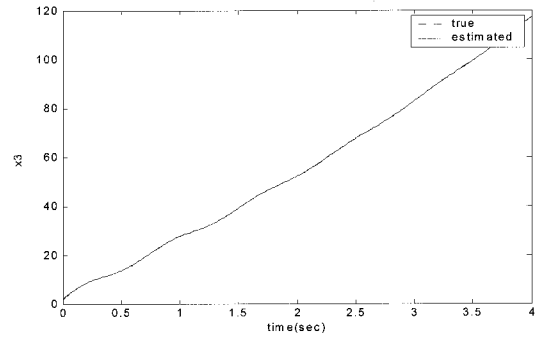


그림 1. x_3 의 실제값과 추정값.
Fig. 1. The true and estimated value of x_3 .

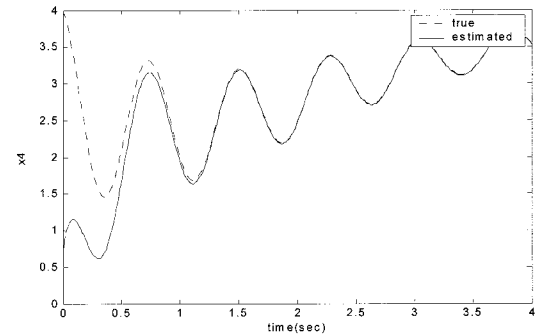


그림 2. x_4 의 실제값과 추정값.
Fig. 2. The true and estimated value of x_4 .

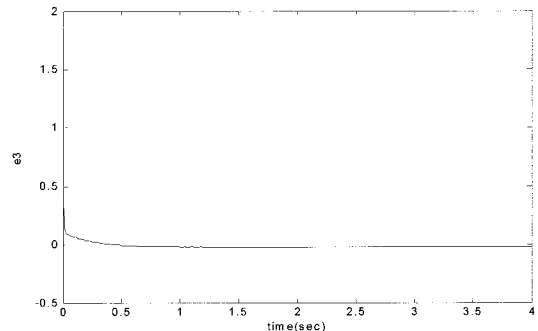


그림 3. x_3 에 대한 추정 오차
Fig. 3. The estimation error of x_3 .

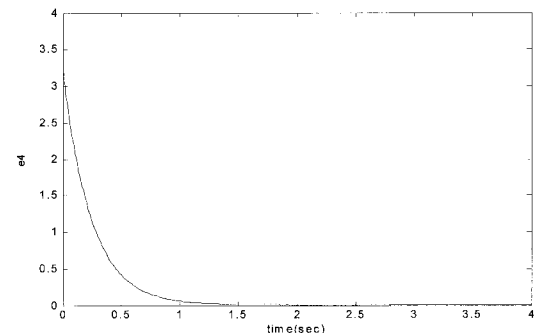


그림 4. x_4 에 대한 추정 오차
Fig. 4. The estimation error of x_4 .

(27), (28), (29)으로 부터 강인 저차 관측기 (11)을 설계할 수 있다. 모의실험을 위하여 $u(t) = \sin t, \omega(t) = 2, x(0) = (0, 0, 2, 4)^T, z(0) = (0, 0)^T$ 으로 설정하였다. 그림 1,2는 각각 x_3, x_4 에 대한 실제 값과 관측기의 추정 값을 비교한 그림이다. 그림 3,4는 각각 x_3, x_4 에 대한 관측기의 추정오차를 나타낸다. 모의실험 결과를 통하여 제안한 설계 방법이 유효함을 확인할 수 있다.

V. 결론

본 논문에서 미지의 외란이 존재하는 Lipschitz 비선형 시스템의 강인 저차 관측기 설계 방법을 제안하였다. 제안한 설계 방법은 추정 오차에 대한 외란의 영향을 최소화할 수 있다. 관측기의 이득 행렬은 상용 소프트웨어를 이용하여 쉽게 풀 수 있는 선형행렬 부등식을 이용하여 구할 수 있다. 마지막으로 수치 예제를 통하여 제안한 방법의 타당성을 입증하였다.

참고문헌

[1] F. Thau, "Observing the state of nonlinear dynamic systems," *Int. J. of Contr.*, vol. 17, no. 3, pp. 471-479, 1973.

[2] S. Raghavan and J. Hedrick, "Observer design for a class of nonlinear systems," *Int. J. of Contr.*, vol. 59, pp. 515-528, 1994.

[3] R. Rajamani, "Observers for Lipschitz nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 43, no.3, pp. 397-401, 1998.

[4] F. Zhu and Z. Han, "A note on observers for Lipschitz nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 47, pp. 1751-1754, 2002.

[5] A. M. Pertew, H. J. Marquez, and Q. Zhao, " H_∞ observer design for Lipschitz nonlinear systems," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. 51, no. 7, pp. 1211-1216, 2006.

[6] M. Abbaszadeh and H. Marquez, "A robust observer design method for continuous-time Lipschitz nonlinear systems," *Proc. of the 45th IEEE Conf. on Decision & Control*, pp. 3795-3800, 2006.

[7] G. Lu and G. Feng, "Robust H_∞ observers for Lipschitz nonlinear discrete-time systems with time delay," *IET Control Theory & Appl.*, vol. 1, no. 3, pp. 810-816, 2007.

[8] M. S. Chen and C. C. Chen, "Robust nonlinear observer for Lipschitz nonlinear systems subject to disturbances," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. 52, no. 12, pp. 2365-2369, 2007.

[9] A. Zemouche, M. Boutayeb, and G. Bara, "Observers for a class of Lipschitz systems with extension to H_∞ performance analysis," *Systems & Control Letters*, vol. 57, pp. 18-27, 2008.

[10] S. P. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnam, "Linear matrix inequalities in system and control theory," vol. 15, Philadelphia, PA: SIAM, 1994.



이 성 렬

2003년 연세대학교 전기전자공학과 박사학위 받음. 2003년~2006년 삼성전자 책임연구원 재직. 2007년~현재 군산대학교 전임강사 재직 중. 관심분야는 비선형제어 및 응용.