財務管理研究 第二十五券 第一號(2008. 3), 85~108

Fractional Brownian Motion을 이용한 이자율모형

이준희*

〈요 약〉

본 연구는 Bender(2003), Duncan et al.(2000)등의 Wick 적분을 이용하여, fBm을 이자율모형의 불확실성으로 사용하였다. Affine 모형에 대표적인 CIR, Hull and White 모형, Quadratic 모형, 그리고 HJM 모형에 차례로 적용한 결과 이론적으로 새로운 결과를 얻었으며, 특히 새로운 확률측도(probability measure)를 정의하여, 할인채권의 옵션가격을 제시하였다.

주제어 : Fractional Brownian Motion, Wick-Integral, HJM, Affine 모형, Quadratic 모형

논문접수일 : 2007년 07월 17일　　논문게재확정일 : 2007년 12월 10일
* 숭실대학교 경영학부, E-Mail : joonrh@ssu.ac.kr
** 본 연구는 숭실대학교 교내연구비 지원으로 이루어졌음.

Ⅰ. 서 론

Mandelbrot(1971)의 연구로부터 시작하여, 주가 수익률의 장기 기억성(long memory or long range dependence)에 대한 사항은 하나의 정형화된 사실(stylized fact)로 받아들여지고 있다. 이자율의 장기기억성의 경우는 Bakus and Zin(1993)의 연구가 처음이라 할 수 있는데, 그들의 실증연구에 의하면, 미국의 경우 3개월물 zero bond의 수익률이 장기 기억성을 갖는 결과를 보였다. 이후 Tsay(2000)는 미국의 실질이자율이 장기 기억성을 보임을 실증분석으로 보였다. 이외에도 Baroulas and Baum(1998), MaCarthy et al.(2004)등이 이자율의 장기 기억성을 실증 검증하였고, Cajuerio and Tabak(2003)은 브라질 자료를 이용하여, 이자율의 장기 기억성을 실증 검증 하였다. Baillie(1996)은 Granger(1980)가 처음으로 고안한 ARFIMA(Auto Regressive Fractional Integrated Moving Average) 모형을 이용하여, 이자율을 비롯한 광범위한 거시자료의 장기 기억성을 검증하여, 이자율을 포함하여 대다수 상태변수가 장기 기억성을 갖고 있음을 보였다.

장기 기억성을 실증 분석함에 있어 이들 연구의 다수의 공통점은 시계열 분석 방법이며, 이러한 시계열 분석 방법에서는 모든 상태변수를 관찰가능한 것으로 간주하게 된다. 그러나 재무이론의 대표적 이자율 모형인 Vasicek 모형이나 CIR(Cox-Ingersoll-Ross) 모형과 같은 단기이자율(short rate) 모형은, 연속시간형의 단기이자율(instantaneous short rate in the continuous time)로 실제로 관찰이 불가능하며, 결국 채권가격과 같은 상품을 통하여, 간접적으로만 추출 할 수 있다.[1] 따라서 채권상품가격과 같은 금융상품을 통한 실증분석을 수행하기 위하여서는 장기 기억성을 갖도록 이론적인 모형의 설정과 EMM(Equivalent Martingale Measure)인 가격측도(pricing measure)의 엄격한(rigorous) 정립이 선행되어야 한다.

본 연구의 목적은, 장기 기억성(long memory)을 반영한 이자율모형의 이론적 고찰에 있다. 이자율의 기억성을 모형에 반영하기 위해서는 fBm(Fractional Brownian Motion)을 사용하는 것이 일반적이다. 그러나 Rogers(1997)는 fBm을 자산가격의 불확실 요인으로 사용할 경우, 자산 가격 결정이론에서 가장 핵심이 되는 비재정거래(no-arbitrage)의 개념을 사용할 수가 없다고 주장한 바가 있다. 즉 fBm은 브라우니언 모션이나, 레비모션(Levy motion)과는 달리 세미마팅게일(semimartingale)이 아니기 때문에, 가격측도(pricing measure)를 찾을 수가 없다는 것이다. 특히, 특정의 Hurst 모수(para-

1) 채권가격으로부터 현도수익률(spot yield)을 찾을 경우 현도수익률은 단기이자율의 함수가 되며, 이 상태변수를 Kalman filtering과 같은 방법을 이용하여 추출하게 된다.

meter)가 특정의 값을 제외하고는 quadratic variation의 계산이 용이하지 않기 때문에 fBm의 이토공식(Ito formula)을 쉽게 얻을 수 없으며, 있다 하더라도 복잡성으로 인해 재무이론에 적용하는데 한계가 있었다.

그러나 최근에 재무 분야가 아닌 순수 수학분야에서, Ito적분과는 다른 새로운 적분법을 이용함으로서 fBm을 새롭게 조명하게 되었다. Bender(2003), Duncan et al.(2000) 등의 Wick 적분의 도입이 그것이다. 이 Wick 적분은 이토적분과 같이 마팅게일[2)]의 특성을 갖기 때문에 fBm에서는 "Ito-type integral"이라고도 부르며, 기존과 유사한 방식으로 이토공식를 사용할 수 있게 된다. 이러한 연구를 재무이론에 적용하기 하기 시작한 것이 Oksendal(2003), Elliot and Hoek(2003)등의 연구라 할 수 있다.[3)]

한편 최근의 이준희(2007)의 연구에서는 fBm을 이용한 채권가격을 계산한 바 있으나, Wick 적분(integral)을 사용하지 않고 소위 이토적분(또는 pathwise integral)만을 사용하였다. 이 경우 이토공식을 사용하는데 제약이 있기 때문에 그 연구의 범위가 매우 제한적 이었다. 이에 본 연구는 Wick 적분을 이용하여, 기존의 이자율 이론을 재정립하고 그 범위를 확대하고자 한다.

fBm의 이자율모형에 도입이라는 본 연구의 목적에 따라 그 범위를 언급하고자 한다. 이자율모형으로 잘 알려진, (i) Affine 모형, (ii) Square Gaussian 또는 Quadratic 모형, (iii) HJM(Heath-Jarrow-Morton) 모형 등이 기존의 틀에서 fBm으로 변경될 경우, 그 결과가 어떻게 되는가 하는 것이 본 연구의 범위라 하겠다.

특히 Affine 모형의 경우 가우지언(Gaussian)의 경우에만 기존의 Affine 모형이 성립하고, CIR 모형의 경우는 Affine의 채권 해를 갖지 못함을 보이게 된다. 또한 Square Gaussian 형태의 이자율 모형도 성립이 되었는데, 두 가지 사항을 고려하면, 이자율의 잔차(diffusion)항이 비확률적인(non-stochastic) 함수의 경우에만 채권의 해가 도출될 수 있음을 보인다. HJM의 경우는 추세(drift)항의 비재정거래 조건이 새롭게 도출되며, 선도측도(forward measure)에 대한 해석이 새롭게 됨을 보인다.

구체적으로 본 연구의 순서는 다음과 같다. 제 Ⅰ장에서는 본 연구의 이해를 fBm에 대한 설명 및 재무이론에서의 fBm의 역할 그리고 Wick 적분의 개념에 대하여 언급하고, 제 Ⅲ장에서 부터 본격적인 이자율 모형을 소개한다. 제 Ⅲ장에서 Affine 모형 중 CIR 모형과 Hull and White 모형에 대하여 언급하고자 한다.[4)] 그리고 제 Ⅳ장에서는

---

2) 정확한 표현은 "quasi martingale"이다.

3) Bjork and Hult(2005)은 Wick 적분으로 자기금융(self-financing) 포오트폴리오를 정의할 경우 약간의 해석상의 문제가 발생할 수 있음을 지적하였다. 이에 대한 언급은 제 Ⅱ장에서 하겠다.

4) Vasicek 모형은 Hog and Frederiksen(2006)이 최근에 연구한 바가 있다.

Square Gaussian 모형에 대하여 설명하고, 제 Ⅴ장에서는 HJM 모형을 그리고 제 Ⅵ장에서는 fBm을 이용한 채권옵션 가격평가에 대하여 논하기로 한다. 그리고 마지막장인 제 Ⅶ장에서 결론을 맺고자 한다.

Ⅱ. fBm의 확률적 특성, 재무이론에서의 역할과 Wick Integration

1. fBm의 확률적 특성

우선 이자율 모형을 설명하기 위하여 독자를 위하여 fBm의 여러 가지 특성과 재무이론과의 관련성에 대하여 알아보도록 하자. $0<H<1$을 만족하는 H에 대하여, 다음을 만족하는 가우지언 과정(process)인 $\{W_t^H, t\in R\}$를 정의해보자. 즉,

(i) $E[W_t^H]=0$,

(ii) $E[W_t^H W_s^H]=\frac{1}{2}\{|t|^{2H}+|s|^{2H}-|t-s|\}$.

위 (i), (ii)를 만족하는 가우지언 과정을 Hurst 모수 H를 갖는 fBm(Fractional Brownian Motion)이라 부른다. fBm은 브라우니언 모션과 같이 “self-similar 과정”의 성격을 갖는다. 즉 $W_{\alpha t}^H$와 $\alpha^H W_t^H(\alpha>0,\ t>0)$는 같은 확률적 법칙을 갖게 된다. 이는 브라우니언 모션과 같이 시간변경(time change)을 이용한 분석이 가능하다는 것을 의미한다.

$H=\frac{1}{2}$일 경우 일반적인 브라우니언 모션과 일치하며, $H>\frac{1}{2}$일 경우, fBm이 “persistence”하다고 표현하며, 이 경우 $\rho_n \doteq E[W_1^H(W_{n+1}^H-W_n^H)]>0$, $\sum_{n-1}^{\infty}\rho_n=\infty$이 되어 장기 기억성을 갖게 되며, $H<\frac{1}{2}$일 경우는 $\rho_n<0$, $\sum_{n-1}^{\infty}|\rho_n|<\infty$이 되어 과정이 매우 들쭉날쭉(choppy)해지는 성격을 갖게 된다. 따라서 fBm은 브라우니언 모션에 비해 완만하거나(long memory) 들쭉날쭉(choppy)한 상태변수를 기술하는데, 유용하다고 할 수 있다. 부록 (4)에는 Hurst 모수에 따른 fBm의 움직임을 보여주고 있다. 그림에서 보듯이 Hurst 모수가 중가 할수록 움직임이 완만해짐을 알 수 있다. $H=\frac{1}{2}$일 경우가 통상적

인 브라우니언 모션에 해당된다.

2. fBm의 재무이론에서의 역할과 Wick Integration

fBm이 재무이론에 등장하기 시작한 것은 매우 오래전이나, 마팅게일의 개념과 더불어 체계적으로 설명이 시작된 것은 Rogers(1997)로부터 시작된다고 할 수 있다. 이후 fBm이 갖고 있는 성질, 즉, 브라우니언 모션과는 달리, 자산가격이나, 상태변수가 완만하게 움직이거나 또는 매우 급변하게 움직이는 경우를 표현 할 수 있기 때문에, 날씨파생상품이나 전기파생상품에 적용된 바 있다(Benth(2003), Brody et al.(2003)). 아직 이자율 모형에 대한 응용은 저자가 아는 한 미천한 것으로 보이나 서론에서 언급한 이자율에 대한 많은 실증연구에 비추어 볼 때, 이자율에 대한 적용도 활발히 이루어져야 할 것으로 보인다.

그러나 fBm의 재무이론 적용에 문제가 되는 것은 이토공식이라 할 수 있다. fBm은 세미마팅게일이 아니기 때문에 “Ito Lemma”로 알려진 미분법을 사용할 수 없다. Decreusefond and Ustunel(1999)의 연구에서 보듯이 fBm에 기존의 방법을 사용하게 되며, 이토공식이 나오기는 하나, Hurst 모수에 따라 이토공식이 변하게 되며, 이 경우도 Decreusefond and Ustunel(1999)의 Theorem 5.1에서 보듯이 식이 너무 복잡하여, 재무이론에는 물론 수학응용분야에도 그 사용에 한계점을 들어내게 된다. 이를 해결한 연구가 Duncan et al.(2000)의 Wick 적분이다. 즉 Wick 적분은 이토적분과는 성격은 다르나, 기존의 브라우니언 모션에 적용되는 이토공식과 같은 “좋은 성격”의 미분식을 제공해줄 뿐 아니라, 브라우니언 모션에 대한 확률적분(stochastic integral)이 마팅게일의 성격을 갖듯이, fBm에 대한 확률적분이 마팅게일이 되도록 하는 특성을 갖게 한다. 따라서 이 방법을 사용하면, 자산가격의 핵심이 되는 마팅게일 방법을 사용할 수 있게 된다. 다만 서론에서 잠시 언급한 자기금융(self-financing)의 비재정거래의 개념이 모호하게 되는 문제가 있다.

이 문제와 함께 Wick 적분의 직관적인 의미를 설명해 보도록 한다. Wick 적분[5]에 대한 정의는 Oksendal(2003)에 비교적 쉽게 나와 있으나, 수학적인 의미보다는 직관적인 의미를 생각해 보도록 한다. 우선 포아송(Poisson) 과정의 경우를 생각하면, 포아송 과정은 점프 (jump)의 갯수에 대한 과정이기 때문에 증가하는 과정(submartingale)이

5) Wick 적분에 대한 이론적 설명은 본 연구의 범위를 넘어서 다루지 않기로 한다. 다만 Oksendal(2003), Bender(2003), Duncan et al.(2000)등을 참조하기 바람.

다. 따라서 이를 마팅게일로 만들어주기 위해서는 점프의 강도(intensity)로 차감하여 이를 마팅게일로 만들어 준다. 즉 N_t를 포아송 과정이라 하고 λ를 점프에 대한 강도로 정의하면, $N_t - \lambda t$는 마팅게일이 된다. 이 경우 우리는 세미마팅게일에 대한 Doob 추출(decomposition)을 사용하였다.

이 개념을 fBm에 적용해보자. 단 fBm은 세미마팅게일이 아slam로 Doob 추출을 직접 적용할 수는 없으나 해석은 비슷하게 된다. 다음을 정의를 해본다. 적분 가능한 함수 F_t에 대하여, Wick 적분을 $\int_0^t F_s dW_s^H$로 정의하고 $\int_0^t F_s \delta W_s^H$를 기존의 이토적분이라 하면, 두 적분의 다음의 관계가 성립한다.

$$\int_0^t F_s \delta W_s^H = \int_0^t F_s dW_s^H - \int_0^t D_s^{\phi} F_s ds,$$

여기서 $D_s^{\phi} F_s$는 Malliavin calculus항으로 다음 장에서 설명하도록 한다. 브라우니언 모션과는 달리 $E[\int_0^t F_s \delta W_s^H] \neq 0$이 성립하고 오히려 $E[\int_0^t F_s dW_s^H] = 0$의 성격을 갖게 됨으로, fBm에 대한 Wick 적분은 이토적분으로부터 마팅게일부분을 추출한 것이라 생각할 수 있으며, $\int_0^t D_s^{\phi} F_s ds$ 부분은 fBm에 대한 이토적분에서의 포아송 과정의 compensator와 같은 역할을 한다고 조심스럽게 해석할 수 있다. 물론 Doob 추출을 사용한 것이 아니기 때문에 compensator라고 부르는 것은 옳지 않다.6) 위의 관계로부터, 앞서 언급하였듯이, Wick 적분을 이용하여 포오트폴리오의 개념을 정의하면, 따라서 기존의 의미와 다르게 됨을 알 수 있다. 즉 주가가 $S_t = \int_0^t \sigma \delta W_s^H$로 움직인다면, 수량을 H_s라 할 경우 $\int_0^t H_s \delta W_s^H$는 포오트폴리오의 의미를 가지나, $\int_0^t H_s dW_s^H$는 포오트폴리오의 의미를 갖지 못한다. 이것 때문에 Oksendal(2003)은 Definition 4.6에서 “strong arbitrage”라는 새로운 개념을 도입한 것이다.

위의 사항들을 고려하면, 재무이론에서 fBm을 불확실성의 상태변수로 사용할 경우

6) 위의 관계는 매우 일시적이라 할 수 있다. 예컨대, 위의 관계로부터 quadratic variation을 계산하면 위의 관계식으로 단순하게 등식이 성립하지 않고 이토공식이 전혀 다르게 나오게 된다. 즉 왼쪽과 오른쪽의 $< \cdot > \neq < \cdot >$이다. 따라서 이를 그냥 martingale이 아닌 quasi-martingale이라 부른다.

Wick 적분은 기존의 이토이론과 비슷하게 마팅게일의 성격을 유지하여 매우 편리한 공식 등을 제공해 줄 수 있는 장점이 있으나,7) 새로운 비재정거래의 개념이 필요하다는 단점이 있다. 그러나 중요한 사항은 이를 사용하지 않을 경우 장기 기억성을 갖는 자산 가격이나, 상태변수를 재무이론에 적용하는 이론을 전개 하는데 한계가 있음을 강조하고자 한다.

상태변수가 포아송 과정과 같은 점프 과정을 따를 경우 EMM(Equivalent Martingale Measure)이 여러 개가 존재하여, 비재정거래의 기존 개념이 훼손됨에도 불구하고 임의의 가격측도(pricing measure)를 이용하여, 파생상품을 평가하고 있는 점을 감안한다면, fBm에 대한 Wick 적분의 사용은 단점에도 불구하고 그 효익 측면에서 충분히 정당화될 수 있다고 판단된다. 이러한 이론적인 타당성을 바탕으로, 다음 장에서 부터는 fBm에 대한 이자율 이론을 전개해 보도록 한다.

Ⅲ. Affine 모형

1. CIR 모형

모형을 설명하기 전에 필요한 몇 가지 정의를 하고자 한다. 모형은 $\left(\Omega, \Im(\Im_t)_{t \geq 0}, P\right)$ 의 확률공간에서 정의한다.

정의 1 : $\phi : R_+ \times R_+ \rightarrow R_+$ *인 함수로서 다음과 같이 정의된다.*

$$\phi(s,t) = H(2H-1)|s-t|^{2H-2}, \quad H \in (\frac{1}{2}, 1)$$

정의 2 : $f : R_+ \rightarrow R$ *의 Borel 측정 가능한 함수일 경우,* L^2*norm은 다음과 같이 정의된다.*

$$|f|_\phi^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty f(s)s(t)\phi(s,t)\,ds\,dt < \infty$$

정의 3 : (Malliavin Calculus) : $\omega \in \Omega$, $F(\omega) \in L^p(\Omega, \Im, P)$ *인 확률변수에 대하여,*

7) 이러한 이유에서 Wick 적분을 "Ito-type integral"이라 부르기도 한다. 그러나 이토적분과는 개념이 다름을 유의.

F ϕ의 $g \in L^2$ directional derivative는 다음과 같이 정의된다.

$$D_{\bullet}^{\phi} F = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \left(F(\omega + \delta \int_0^{\bullet} \phi g(u)\, du) - F(\omega) \right)$$

앞서 정의하였듯이, 본 논문에서는 $\int f\, d W_t^H$ Wick 적분을 의미한다. 단기 이자율(short rate) r_t가 다음의 CIR을 따른다.

$$dr_t = \kappa(\gamma - r_t)\, dt + \sigma \sqrt{r_t}\, d W_t^H,$$

여기서 κ, γ는 상수로 평균회귀속도, 평균회귀수준을 의미하며, $\{ W_t^H \}_{t \geqq 0}$은 표준 fBm이다. 위 식에 이토공식8)을 적용하면, 만기시점T인 t시점$(t < T)$의 무이표 채권가격의 움직임(dynamics)은 다음과 같다.

$$dP(t, x_t) = \left(\frac{\partial P}{\partial t}(t, x_t) + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, x_t) F_t D_t^{\phi} x \right) dt + \frac{\partial P}{\partial x}(t, x_t) F_t\, d W_t^H,$$

여기서, $D_s^{\phi} x_t = \int_0^t D_s^{\phi} F_u\, d W_u^H + \int_0^t F_u \phi(s, u) du,$

$F_u = \sigma \sqrt{r_u}$ 그리고 $x_t = \int_0^t \sigma \sqrt{r_u}\, d W_u^H$

fBm의 Fundamental PDE를 도출하기 위하여 다음을 정의한다.

$$Z(t) = \frac{P(t, x_t)}{B(t)}.$$

그러면 다음이 성립한다.

$$\frac{dZ(t)}{Z(t)} = \frac{dP(t)}{P(t)} - r_t dt.$$

8) fBm에 대한 이토공식은 integrand의 형태와 함수에 따라 매우 다양하여, 이에 대해서는 Bender(2003), Duncan et al.(2000)등을 참조하기 바람.

측도 P에서 Q로 변경되는 위험의 시장가격(market price of risk)를 λ라 가정하면,

$$\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial t}(t,x_t)+\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,x_t)F_t D_t^{\phi}x-\lambda F_t\frac{\partial P}{\partial x}(t,x_t)\right)}{P(t,x_t)}-r_t=0.$$

따라서 Fundamental PDE는 다음과 같다.

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t,x_t)+\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,x_t)F_t D_s^{\phi}x-\lambda F_t\frac{\partial P}{\partial x}(t,x_t)-rP(t,x_t)=0. \tag{1}$$

그리고 $A(T,T)=B(T,T)=0$을 만족하여야 한다. 식 (1)의 두 번째 항의 Malliavin 항이 확정적(deterministic)이지 않기 때문에 이 PDE는 Affine 채권모형으로 구할 수 없음을 알 수 있다. 또한 CIR 형태의 SDE는 강해(strong solution) 또한 존재하지 않기 때문에 Wick 적분의 형태라도 채권가격 계산이 불가능하게 된다.

2. Hull and White

Hull and White 단기이자율 모형은 다음과 같다.

$$dr_t=(\alpha(t)-\beta(t)r_t)dt+\sigma(t)\,dW_t^H,$$

여기서 $\alpha(t)$, $\beta(t)$, 그리고 $\sigma(t)$는 시간에만 의존하는 함수이다. 이토공식을 적용하기 위하여 이를 적분방정식으로 표시하면 다음과 같다.

$$r_t=r_0+\int_0^t(\alpha(s)-\beta(s)r_s)ds+\int_0^t\sigma(s)\,dW_s^H.$$

다음을 정의하자 $F_s=\sigma(s)$, $x_t=\int_0^t F_u dW_u^H$, 그리고 $G_u=\alpha(u)-\beta(u)r_u$. 그러면 CIR 모형의 경우와 마찬가지로 다음의 식이 성립한다.

$$\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial t}(t,x_t)+\frac{\partial P}{\partial x}(t,x_t)G_t+\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,x_t)F_t D_s^{\phi}x-\lambda F_t\frac{\partial P}{\partial x}(t,x_t)\right)}{P(t,x_t)}-r_t=0.$$

여기서 $D_s^{\phi} x_t = \int_0^t F_u \phi(s,u)\, du.$

Fundamental PDE는 다음과 같다.

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t,x_t) + \frac{\partial P}{\partial x}(t,x_t)(G_t - \lambda F_t) + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,x_t) F_t D_s^{\phi} x - r_t P(t,x_t) = 0. \tag{2}$$

그리고 $A(T,T) = B(T,T) = 0$을 만족하여야 한다. 식 (2)는 식 (1)과는 달리 Malliavin 항이 확정적이기 때문에 해를 구하는 것이 가능하다. 다음의 Proposition에서 fBm Hull and White 할인채권가격을 구해보도록 한다. $P(t,T)$를 $P(\tau, x_t)$로 표시하고 $\tau = T-t$로 정의한다.

Proposition 1 (Hull and White) : 단기이자율이 다음의 식을 따를 경우,

$$dr_t = (\alpha(t) - \beta(t) r_t)\, dt + \sigma(t)\, dW_t^H,$$

만기 T시점에 1을 주는 무이표 채권가격은 다음과 같이 표현된다.

$$P(\tau, x_t) = \exp(A(\tau) - B(\tau) x_t) \tag{3}$$

$A(t,T) \doteq A(\tau) = -\int_t^T B(s,T)(\alpha(s) - \lambda F_s)\, ds + \int_t^T B^2(s,T) F_s D_s^{\phi} x ds,$

$B(t,T) \doteq B(\tau) = \dfrac{1 - e^{-\beta(t)\tau}}{\beta(t)},$

그리고 $D_s^{\phi} x_t = \int_0^t F_u \phi(s,u)\, du,\ F_s = \sigma(s).$

Proof : <부록 1> 참조.

식 (3)을 보면, 듀레이션 역할을 하는 함수 $B(\tau)$는 브라우니언 모션의 Hull and White 모형과 경우와 같으나, $A(\tau)$에 Malliavin 항이 생긴 것을 알 수 있다. 이는 fBm 모형의 조정(calibration)을 용이하게 할 수 있는 여지를 마련하는 항이라 할 수 있으며, Hurst

모수가 모형을 더욱 유동적(flexible)으로 만들고 있음을 알 수 있다.

Ⅳ. Quadratic 모형 : Square Gaussian

제 Ⅱ장을 통해 우리는 자산가격 또는 상태변수(state variable)의 불확실 요인을 fBm으로 가정할 경우, Affine 모형의 범위가 매우 축소되어, 이자율 모형으로 즐겨 사용하는 CIR 이자율 모형을 사용할 수 없음을 찾아냈다. 그러면, Quadratic 이자율 모형은 어떻게 되는지를 살펴보도록 한다. 이를 위하여 다음의 상태변수를 가정하자.

$$du=(\theta(t)-au)dt+\sigma dW_t^H,$$

여기서 a, σ는 상수이며, 시간에만 의존하는 함수 $\theta(t)$, 즉 평균회귀(mean reversion)를 Hull and White처럼, 확정적 함수로 가정하였다. 단기이자율은 다음으로 가정한다. $r=u^2$이 경우 Fundamental PDE는 다음과 같게 된다.

$$P_t+P_u(\theta(t)^*-au)+P_{uu}F_tD_s^{\phi}u-u_t^2P=0,$$

여기서, $\theta(t)^*$는 Q측도변경에 따른 평균회귀의 $\theta(t)$의 변화이다. 초기의 기간구조(initial term structure)를 모형에 감안하기 위하여, 다음의 변수변환을 한다.[9] 즉,

$$y=u-\alpha(t),\ \alpha(t)=e^{-at}(\sqrt{r_0}+\int_0^t e^{as}\theta(s)^*ds).$$

이 경우 새로운 채권가격 $h(t,y)=P(t,y+\alpha(t))$로 정의되고, PDE는 다음과 같이 변하게 된다.

$$h_t-ayh_y+h_{yy}F_tD_s^{\phi}x-(y+\alpha(t))^2h=0,\ dy=-aydt+\sigma dW_t.$$

이 경우 단기 이자율은 $r=(y+\alpha(t))^2$로 바뀌게 된다. 다음의 Proposition에서 채권가격을 구해보도록 한다.

9) Brigo and Mecurio(2001)를 참조.

Proposition 2 (Quadratic Model) : 상태변수는 다음의 식을 따르고,

$$du = (\theta(t) - au)dt + \sigma d W_t^H$$

단기이자율은 $r = u^2$로, 그리고 다음의 변수변환을 가정하면,

$y = u - \alpha(t),\ \alpha(t) = e^{-at}(\sqrt{r_0} + \int_0^t e^{as}\theta(s)^* ds)$, 만기 T시점에 1을 주는 무이표 채권가격은 다음과 같이 표현된다.

$$P(\tau) = \exp(A(\tau) - B(\tau)y - C(\tau)y^2)$$

$$A(t,T) \doteq A(\tau) = \int_t^T (F_s D_s^{\phi} x B(s,T) - 2F_s D_s^{\phi} x C(s,T) - \alpha(s)^2) ds$$

$$B(t,T) \doteq B(\tau) = 2\int_t^T \frac{e^{\gamma s}\left((a+\gamma)e^{2\gamma(T-s)} + (\gamma - a)\right)}{e^{\gamma t}\left((a+\gamma)e^{2\gamma(T-t)} + (\gamma - a)\right)} \alpha(s) ds$$

$$C(t,T) \doteq C(\tau) = \frac{e^{2\gamma(T-t)-1}}{(a+\gamma)e^{2\gamma(T-t)} + (\gamma - a)}$$

$$D_s^{\phi} x_t = \int_0^t D_s^{\phi} F_u d W_u^H + \int_0^t F_u \phi(s,u) du,$$

$$\gamma = \sqrt{a^2 + 4F_t D_t^{\phi} x}$$

$$F_u = \sigma$$

그리고 $x_t = \int_0^t F_u d W_u^H$

Proof : <부록 2>참조.

흥미롭게도 fBm의 경우 Quadratic 이자율 모형은 기존 브라우니언의 경우와 같이 그대로 성립함을 알 수 있다. 그러나 $A(\bullet)$항에는 Malliavin항이 등장하게 된다. affine 모형과 마찬가지로 모형 조정에 활용가능하다. Malliavin항이 단기 이자율의 변동성에 영향을 받는 바, 이는, 단기 이자율의 변동성구조(volatility structure)가 fBm 채권가격 결정이론 얼마나 크게 영향을 미치는 가를 알 수 있다. 다음으로 이자율파생상품가격

평가에 중요한 역할을 하는 HJM 모형을 fBm에서 재현해 보도록 한다.

V. HJM 모형

HJM의 채권가격은 다음과 같이 정의된다.

$$P(t,T)=\exp\left(-\int_t^T f(t,s)ds\right)$$

여기서, $f(t,T)=f(0,T)+\int_0^t \alpha(s,T)ds+\int_0^T \sigma(s,T)dW_s^H$. Fubini를 적용하면, $P(t,T)=\exp\left(-\int_t^T f(0,s)ds-\int_0^t\int_t^T \alpha(s,u)duds-\int_0^t\int_t^T \sigma(s,u)dudW_s^H\right)$이성립한다. 다음을 정의하자. 즉, $Z(t,T)=B(t)^{-1}P(t,T)$. 여기서, B(t)는 현금채권(money market account)이다. 이토공식을 적용하면,

$$\frac{dZ(t,T)}{Z(t,T)}=-(\alpha'(t,T)dt+\sigma'(t,T)\phi'(t,T)dt+\sigma'(t,T)dW_t^H),$$

여기서,

$$\alpha'(t,T)=\int_t^T \alpha(t,u)du,\ \ \sigma'(t,T)=\int_t^T \sigma(t,u)du,\quad \phi'(t,T)=\int_0^t \phi(t,u)\sigma'(u,T)du.$$

위 식에서 볼 수 있듯이 $\phi'(t,T)$는 채권가격의 변동성의 역사(all the history of volatility of bond price)를 담고 있음을 알 수 있다. 확률측도 Q에서,

$$\frac{dZ(t,T)}{Z(t,T)}=-\sigma'(t,T)dW_t^H(Q)$$

를 만족하여야 함으로, 위험의 시장가격은 다음과 같아야 한다. 즉,

$$\gamma_t=-\sigma'(t,T)^{-1}\alpha'(t,T)-\phi'(t,T),\ \ dW_t^H=\gamma_t+dW_t^H(Q). \tag{4}$$

위 식으로부터 다음의 정리(theorem)를 통해 HJM 이론의 핵심이라 할 수 있는 drift 조건을 구해보도록 한다.

Theorem 3 (HJM condition) : fBm HJM 모형에서 선도이자율(forward rate)의 drift 조건은 다음과 같다.

$$\alpha(t,T) = -\left(\sigma(t,T)\phi'(t,T) + \sigma'(t,T)\frac{\partial\phi'(t,T)}{\partial T}\right) - \sigma(t,T)\gamma_t.$$

Proof : 식 (4)를 만기에 대하여 미분하고, 위험의 시장가격의 만기 독립조건을 이용한다.

위 정리를 보면 알 수 있는 기존의 HJM 모형의 비재정거래 조건에서는 없는 Hurst 모수 함수가 이 조건에 영향을 미친다. 이는 이자율 과정이 장기기억정도(Hurst 모수)가 비재정거래 조건에 영향을 미침을 의미한다.

다음으로는 HJM 모형으로부터 선도측도 (Q_T)를 구하여 본다. 선도측도는 이자율 파생상품 가격결정에 핵심적인 역할을 하는바 이에 대한 명확한 규정은 매우 의미 있는 일이라 할 수 있다. 위의 정리로 부터 우선 확률측도 Q에서 할인채권가격을 구하여 보도록 한다.

$$P(t,T) = P(0,T)\exp\left(\int_0^t r_s ds + \int_0^t \sigma'(s,T)\phi'(s,T)ds - \int_0^t \sigma'(s,T)dW_s^H(Q)\right) \quad (5)$$

브라우니언 모션하에서의 측도 Q로부터 Q_T로의 변경에 이용되는 Radon-Nikodym Derivative는 다음과 같다.

$$\epsilon_t = \frac{P(t,T)}{P(0,T)B(t)}$$

이 식을 fBm에 적용하면,

$$\epsilon_t = \frac{P(t,T)}{P(0,T)B(t)} = \exp\left(\int_0^t \sigma'(s,T)\phi'(s,T)ds - \int_0^t \sigma'(s,T)dW_s^H(Q)\right) \quad (6)$$

문제는 위 식 (6)은 마팅게일이 되지 않는다는 것이다. 따라서 측도변경을 위한 Radon-Nikodym Derivative로는 사용할 수 없다. 따라서 측도 Q_T로의 위험의 시장가격을 기존과 같이 채권가격변동의 변동성이 되기 위해서는(또는 선도측도 목적을 기존과 그대로 유지하기 위하여서는) 다음과 같이 정의하여야 한다.

$$\begin{aligned}\epsilon' &= \frac{P(t,T)}{P(0,T)B(t)} \times \exp\left(-\int_0^t \sigma'(s,T)\phi'(s,T)ds - \frac{1}{2}|\sigma'|_\phi^2\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^t \sigma'(s,T)dW_s^H(Q) - \frac{1}{2}|\sigma'|_\phi^2\right) \end{aligned} \tag{7}$$

위 식 (7)은 Duncan et al.(2000)로부터 측도 Q에서 기대값이 1임을 알 수 있다. 따라서 ϵ'를 quasi-martingale이라 부르기도 한다. 한편 식 (7)은 가격측도(pricing measure)로 좋은 성질을 갖추고는 있으나, 브라우니언 모션의 경우와 같이 채권의 선도가격을 마팅게일로 만들어 주는지를 알아보아야 할 것이다. 이는 측도 Q_T에서 채권의 선도가격이 마팅게일이 되지 않으면, 이를 선도측도라 부를 이유가 없기 때문이다. 이를 고려해 보도록 한다. 채권의 선도가격의 정의 $F(t,T,\tau) = \frac{P(t,\tau)}{P(t,T)}$와 이토공식을 이용하면 채권선도가격의 움직임은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\frac{dF}{F} &= (\sigma'(t,\tau)\phi'(t,\tau) - \sigma'(t,T)\phi'(t,T) \\ &\quad + (\sigma'(t,\tau) - \sigma'(t,T))\int_0^t (\sigma'(u,\tau) - \sigma'(u,T))\phi(t,u)du\Big)dt \\ &\quad + (\sigma'(t,\tau) - \sigma'(t,T))dW_t^H(Q). \end{aligned} \tag{8}$$

다음을 정의하면,

$$\sigma'(t,\tau) - \sigma'(t,T) = \int_T^\tau \sigma(t,u)du = \sigma''(t,T,\tau)$$

$$\phi''(t,T,\tau) = \sigma'(t,\tau)\phi'(t,\tau) - \sigma'(t,T)\phi'(t,T)$$

식 (8)은 다음과 같다.

$$\frac{dF(t,T,\tau)}{F(t,T,\tau)} = \left(\phi''(t,T,\tau) + \sigma''(t,T,\tau)\int_0^t \sigma''(u,T,\tau)\phi(t,u)\,du\right)dt$$

$$+\sigma''(t,T,\tau)\,dW_t^H(Q).$$

따라서 측도 Q와 Q_T의 관계는 다음과 같다.

$$dW_t^H(Q)=dW_t^H(Q_T)-\frac{\phi''(t,T,\tau)}{\sigma''(t,T,\tau)}-\int_0^t\sigma''(u,T,\tau)\phi(t,u)du \tag{9}$$

위 식 (9)와 식 (7)를 비교하면, 서로 다른 결과가 발생하는바, 자산가격의 불확실성을 브라우니언 모션을 기반으로 이자율을 모형화하는 경우와 달리, fBm의 경우, Q_T 측도는 채권의 선도가격을 마팅게일로 만들어 주지 않기 때문에 선도측도라 부를 이유가 없음을 알 수 있다. 따라서 본 연구에서 고안한 Q_T 측도는 단순히 이자율 파생상품의 가격결정을 용이하게 하는 측도로 해석하여야 할 것이다. 다음 절에서는 이렇게 고안된 측도를 이용하여, 할인채권에 대한 옵션가격을 계산하여 보도록 한다.

Ⅵ. fBm을 이용한 할인채권옵션

채권옵션 가격은 $\Psi(P(t,T))=E^Q\left(\exp(-\int_t^T r_s ds)(P(T,u)-K)^+|\Im_t\right)$로 표현된다. 단기이자율은 제 Ⅲ장 2절의 Hull and White 모형을 가정하고, 제 Ⅴ장에서 정의된 선도측도를 이용하여 다음의 정리에서 채권옵션가격을 제시한다.

Theorem 4 (채권옵션) : 단기 이자율이 측도 Q_T에 다음을 Hull and White 모형을 따를 때,

$$dr_t=(\alpha(t)-\beta(t)r_t)dt+\sigma(t)dW_t^H(Q_T)$$

만기 u인 채권의 만기 T옵션 가격은 다음과 같다 $(u>T)$.

$$\Psi(P(t,T))=P(t,T)\left(\exp(A(T,u)+B(T,u)\hat{\mu}+\frac{1}{2}B^2(T,u)\widehat{\sigma^2})N(B(T,u)\hat{\sigma}-z)-KN(-z)\right),$$

여기서,

$$\hat{\mu}= e^{-H(t)}r_0 + \int_0^T (e^{H(u)-H(t)}\alpha(u))du,$$

$$\widehat{\sigma^2} = |gI_{[0,T]}|_\phi^2,$$

$$g(u) = e^{H(u)-H(t)}\sigma(u),$$

$$A(t,T) \doteq A(\tau) = -\int_t^T B(s,T)(\alpha(s) - \lambda F_s)\,ds + \int_t^T B^2(s,T) F_s D_s^\phi x\,ds,$$

$$B(t,T) \doteq B(\tau) = \frac{1-e^{-\beta(t)\tau}}{\beta(t)},$$

$$z = \frac{\dfrac{\ln K - A(T,u)}{B(T,u)} - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$$

$$H(t) = \int_0^t \beta(s)\,ds,$$

그리고 $N(\cdot)$는 표준정규분포의 누적확률밀도함수

Proof : <부록 3>참조.

위 정리에서 보듯이 fBm도 가우지언이기 때문에 채권옵션가격이 쉽게 계산됨을 알 수 있으며, 채권옵션에 내재변동성(implied vol)에 해당되는 $\hat{\sigma}$의 형태가 바뀐 것을 알 수 있다. 또한 채권가격과 마찬가지로 Malliavin 항이 등장하여, 채권가격으로부터 조정을 통하여 모수를 쉽게 추정할 수 있는 여지를 주고 있다. 그리고 채권가격과 마찬가지로 옵션 가격도 Hurst 모수에 영향을 받음을 알 수 있다.

Ⅶ. 결 론

본 연구는 기존의 이자율 또는 자산가격의 불확실성을 fBm으로 대체할 경우, 기존에 확립되어온 이자율 이론에 어떠한 변화가 이루어지는가를 살펴보았다. 새로운 이자율 모형의 정립을 위하여서는 기존의 확률적분(stochastic integral)의 형태를 Wick 적분으로 변경하여야 함을 강조하였다.

본 연구의 학술적 공헌은 Wick 적분을 이용하여, 국내외 처음으로 fBm에 대한 이자율 이론을 정립하였다. 구체적으로, 첫째, fBm 이자율 모형의 경우 Vasicek 형태(Hull and White 포함)의 Affine 모형은 가능하나, CIR 형태의 Affine 모형은 유지되지 않았고, 즉 Affine 모형의 경우 가우지언의 경우에만 기존의 Affine 모형이 성립하고, CIR 모형의 경우는 Affine의 채권 해를 갖지 못함을 보였다. 둘째, Square Gaussian인 Quadratic 이자율 모형은 그대로 유지 되었다. 위의 두 가지 사항을 고려하면, 이자율의 잔차(diffusion)항이 비확률적(non-stochastic)인 함수의 경우에만 채권의 해가 도출될 수 있었다. 셋째, HJM의 경우 추세(drift) 조건이 변경되며, 선도측도는 존재하지 않고, 기존의 선도측도와 같은 목적을 수행하기 위해서는 기존의 선도측도에 대한 Radon-Nikodym Derivative에 약간의 수정을 가함을 보였다. 그리고 아울러 이 측도에서는 채권선도가격이 마팅게일이 되지 않음을 보였다. 마지막으로 할인 채권에 대한 옵션가격을 제시하였다.

fBm에 대한 추가적인 연구는 본 연구를 바탕으로 한 실증분석에 있다고 하겠다. 본 연구에서는 수행하지 못하였으나, 향후 이 분야의 연구가 기대되며, 다변량(multi-variate)의 연구가 수행되어야 할 것이다. fBm의 경우 다변량이 서로 상관관계를 갖고 있는 경우, 기존의 브라우니언 모션과는 달리 이토공식이 존재하지 않게 된다. 이를 극복하는 방법이 새로이 등장하기를 기대한다.

참 고 문 헌

이준희, Fractal 이자율 모형, Working Paper, 2007.

Ait-Sahalia, Y., "Transition Densities for Interest Rates and Other Nonlinear Diffusions," *Journal of Finance*, 54, (1999), 499-547.

Bakus, D. and S. Zin, "Long Memory Inflation Uncertainty : Evidence of the Term Structure of Interest Rate," *Journal of Money and Credit and Banking*, 25, (1993), 687-700.

Baillie, R., "Long Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics," *Journal of Econometrics*, 73, (1996), 5-59.

Baroulas, J. and C. Baum, "Fractional Dynamics in Japanese Financial Time Series," *Pacific-Basin Finance Journal*, 6, (1998), 115-124.

Bender, C., "An Ito Formula for Generalized Functional of a fBm with Arbitrary Hurst Parameters," *Stochastic Processes and Their Applications*, 104, (2003), 81-106.

Benth, F., "On Arbitrage Free Pricing of Weather Derivatives Based on Fractional Brownian Motion," *University of Oslo, Working paper*, 2003.

Bjork, T. and H. Hult, "A Note on Wick Products and the Fractional Black-Scholes Model," *Finance and Stochastics*, 9, (2005), 197-209.

Brigo, D. and F. Mercurio, "A Deterministic-Shift Extension of Analytically Tractable and Time Homogeneous Short Rate Model," *To appear Finance and Stochastics*, 2001.

Brody, D., J. Syroka, and M. Zervos, "Dynamical Pricing of Weather Derivatives," *Working paper*, 2003.

Cajueriro D. and B. Tabak, "Testing for Fractional Dynamics in the Brazilian Term Structure of Interest Rates," *Working paper*, 2003.

Comte F. and E. Renault, "Long Memory Continuous Time Model," *Journal of Econometrics*, 73, (1996), 101-149.

Decreusefond, L. and A. Ustunel, "Stochastic Analysis of the Fractional Brownian Motion," *Potential Analysis*, 10, (1999), 177-214.

Duncan, T., H. Yaozhong, and B., "Duncan, Stochastic Calculus for fBm, SIAM," *Journal of Control and Optimization*, 38(2), (2000), 582-612.

Elliot, R. and J. Hoek, "A General Fractional White Noise Theory and Application to Finance," *Mathematical Finance*, 13(2), (2003), 301-303.

GilBazo J. and G. Rubio, "A Nonparametic Dimension Test of Term Structure," *Working paper*, 2003.

Granger, C, "Long Memory Relationships and the Aggregation of Dynamic Models," *Journal of Econometrics*, 14, (1980), 227-238.

Hog, E. and P. Frederiksen, "The Fractional O-U Process : Term Structure Theory and Application," *Working paper*, 2006.

MaCarthy, J., R. Disario, H. Saroglu, and H. Li, "Test Long Range Dependence in Interest Rate Using Wavelet," *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 44, (2004), 180-189.

Mandelbrot, B., "When Can Price Be Arbitraged Efficiently? A Limit to the Validity of the Random Walk and Martingale Models," *Review of Economics and Statistics*, 53, (1971), 2-25.

Norros, I. and E. Valkeila, "An Elementary Approach to a Girsanov Formula and Other Analytical Results on Fractional Brownian Motions," *Working paper*, 2000.

Oksendal, B., "Fractional Brownian Motion in Finance," *Working paper*, 2003.

Rogers, C. C., "Arbitrage with fBm," *Mathematical Finance*, 7(1), (1997), 95-105.

Tsay, W., "Long Memory Story of the Real Interest Rate," *Economics Letters*, 67, (2000), 325-330.

<부 록>

(1) 부록 1 : Proposition 1의 증명

fBm Hull and White는 다음의 PDE를 만족한다.

$$-(A'-B'x)-B(G_t-\lambda F_t)+B^2F_tD_s^{\phi}x-x=0$$

$P_\tau=(A'-B'x)P,\ P_x=-BP,\ P_{xx}=B^2P$임으로 Affine 모형의 해로부터 다음의 ODE를 풀면 각각의 로딩(loading function)은 다음과 같다.

(i) $B'=-\beta(t)B+1,\ B(\tau)=\dfrac{1-e^{-\beta(t)\tau}}{\beta(t)}$

(ii) $A'=-B(\alpha(t)-\lambda F_t)+B^2F_tD_t^{\phi}x,$

$$A(t,T)=-\int_t^T B(s,T)(\alpha(s)-\lambda F_s)ds+\int_t^T B^2(s,T)F_sD_s^{\phi}xds$$

(2) 부록 2 : Proposition 2의 증명

추측해(guessing solution)는 다음과 같다.

$$h(t,y)=\exp(A(t,T)-B(t,T)y-C(t,T)y^2)$$

이 경우 fundamental PDE는 다음의 ODE형태로 전환되어 다음의 (i), (ii), (iii)이 성립한다.

(i) $C_t-2aC-4F_tD_t^{\phi}xC^2+1=0$

$$C(t,T)=\frac{e^{2\gamma(T-t)-1}}{(a+\gamma)e^{2\gamma(T-t)}+(\gamma-a)}$$

여기서, $\gamma=\sqrt{a^2+4F_tD_t^{\phi}x}$

(ii) $B_t-aB-4F_tD_t^{\phi}xBC+2\alpha(t)=0$

$$B(t,T)=2\int_t^T\frac{e^{\gamma s}\big((a+\gamma)e^{2\gamma(T-s)}+(\gamma-a)\big)}{e^{\gamma t}\big((a+\gamma)e^{2\gamma(T-t)}+(\gamma-a)\big)}\alpha(s)ds$$

(iii) $A_t+F_tD_t^{\phi}xB-2F_tD_t^{\phi}xC-\alpha(t)^2=0$

$$A(t,T)=\int_t^T(F_sD_s^{\phi}xB(s,T)-2F_sD_s^{\phi}xC(s,T)-\alpha(s)^2)ds$$

(3) 부록 3 : Theorem 4 증명

Hull and White 모형의 강해(strong solution)를 구하면,

$$r_t = e^{-H(t)} r_0 + \int_0^t (e^{H(u)-H(t)} \alpha(u)) du + \int_0^t (e^{H(u)-H(t)} \sigma(u)) d W_u^H(Q_T)$$

이 된다. 여기서, $H(t) = \int_0^t \beta(u) du.$

이를 이용하여 채권옵션의 가격을 구해 보도록 한다.

채권옵션의 가격은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
\Psi(P(t,T)) &= E^Q \left(\exp(-\int_t^T r_s ds)(P(T,u)-K)^+ | \Im_t \right) \\
&= P(t,T) E^{\overline{T}} ((P(T,u)-K)^+ | \Im_t) \\
&= P(t,T) E^{\overline{T}} ((\exp(A(T,u) - B(T,u) r_T) - K)^+ | \Im_t) \\
&= P(t,T) \int_{\frac{\ln K - A(T,u)}{B(T,u)}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\hat{\sigma}} exp\left(- \frac{(x-\hat{\mu})}{2\widehat{\sigma^2}} \right) f(x) dx
\end{aligned}$$

여기서, $f(x) = \exp(A(T,u) - B(T,u)x) - K,$

$$\hat{\mu} = e^{-H(t)} r_0 + \int_0^T (e^{H(u)-H(t)} \alpha(u)) du,$$

$$\widehat{\sigma^2} = |g I_{[0,T]}|_\phi^2, \ g(u) = e^{H(u)-H(t)} \sigma(u)$$

이를 위 식에 대입하면,

$$\Psi(P(t,T)) = P(t,T) \int_z^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(- \frac{y^2}{2} \right) f(x) dx, \ z = \frac{\frac{\ln K - A(T,u)}{B(T,u)} - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$$

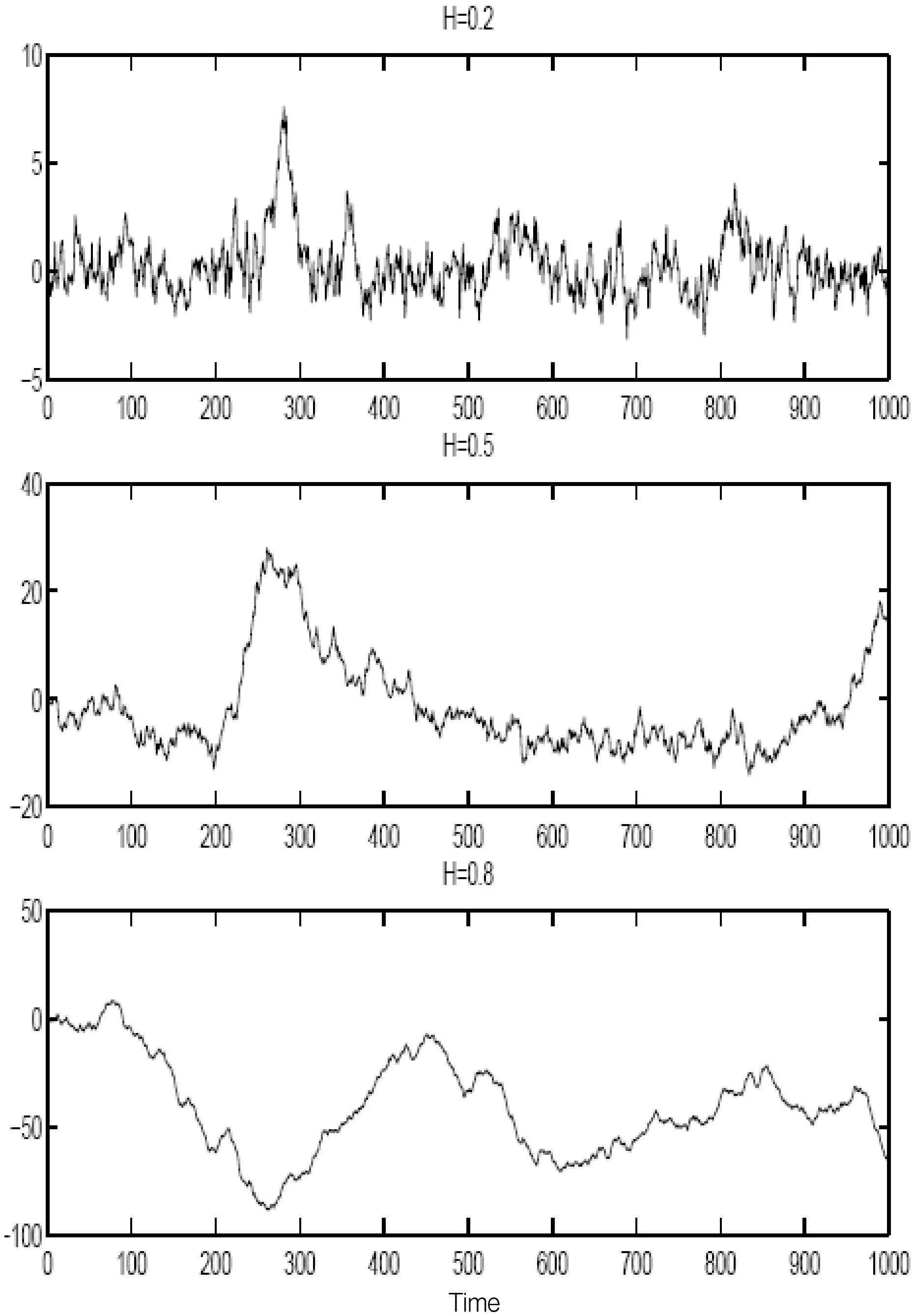
$$= P(t,T) \left(\exp(A(T,u) + B(T,u)\hat{\mu} + \frac{1}{2} B^2(T,u) \widehat{\sigma^2}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty \exp(-\frac{1}{2}(y - B(T,u)\hat{\sigma})^2 dy \right)$$

$$+ P(t,T) \int_z^\infty K f(y) dy$$

$$= P(t,T) \left(\exp(A(T,u) + B(T,u)\hat{\mu} + \frac{1}{2} B^2(T,u)\widehat{\sigma^2}) N(B(T,u)\hat{\sigma} - z) - KN(-z) \right)$$

이 성립된다.

(4) 부록 4 : Hurst Parameter H에 따른 fBm에 대한 움직임



THE KOREAN JOURNAL OF FINANCIAL MANAGEMENT
Volume 25, Number 1, March 2008

No-Arbitrage Interest Rate Models Under the Fractional Brownian Motion

Joonhee Rhee*

〈abstract〉

In this paper, the fBm interest rate theory is investigated by using Wick integral. The well-known Affine, Quadratic and HJM are derived from fBm framework, respectively. We obtain new theoretical results, and zero coupon bond pricing formula from newly obtained probability measure.

Keywords : Fractional Brownian Motion, Wick-Integral, HJM, Affine and Quadratic Model

* Department of Business and Administration, Soong-Sil University