〈학술논문〉 DOI:10.3795/KSME-B.2008.32.11.817

최대 열손실에 대한 열손실 비에 기준한 Pin 핀의 최적화

강 형 석†

(2008년 1월 24일 접수, 2008년 5월 6일 수정, 2008년 10월 8일 심사완료)

Pin Fin Optimization Based on the Ratio of Heat Loss to the Maximum Heat Loss

Hyung Suk Kang

Key Words: Heat Loss(열손실), Outer Radius(바깥 반경), Convection characteristic number(대류특성계수), Efficiency(효율), Fin length(핀 길이)

Abstract

A pin fin with variable fin base thickness is optimized based on the ratio of heat loss to the maximum heat loss using a two-dimensional analytic method. The temperature profile along the normalized radius position in the fin is presented. For fixed fin outer radius, the optimum heat loss, fin length and efficiency as a function of fin base thickness, outer radius, convection characteristic numbers ratio and ambient convection characteristic number are presented. One of the results shows that the effect of fin outer radius and ambient convection characteristic number on the optimum fin length is remarkable.

기호설명

h : 주위 대류열전달계수 [W/m^2·℃]
h_e : 핀 끝 대류열전달계수 [W/m^2·℃]
J_0 : 0계 제1종 Bessel 함수
J_1 : 1계 제1종 Bessel 함수
k : 열전도율 [W/m·℃]
l_b : 핀 바닥 두께 [m]
l_c : 특성 길이 [m]
l_e : 핀 끝 길이 [m]
L_b : 무차원 핀 바닥 두께, l_b/l_c
L_e : 무차원 핀 끝 길이, l_e/l_c
M : 주위 대류특성계수, $(= hl_c/k)$
M_e : 핀 끝 대류특성계수, $(= h_el_c/k)$
NR : 일반화된 반경 위치, R/R_o
OV^* : 최적 값들, (η^*, $5Q^*$, $L_e^*/10$ 등)
q : 핀으로부터의 열손실 [W]
Q : 핀으로부터의 무차원 열손실, $q/(k\phi_i l_c)$
q_{id} : 핀으로부터의 이상적 열손실 [W]
Q_{id} : 핀으로부터의 이상적 무차원 열손실, $q_{id}/(k\phi_i l_c)$
r : 핀 반경 방향 좌표 [m]
R : 무차원 핀 반경 좌표, r/l_c
r_o : 핀 바깥 반경 [m]
R_o : 무차원 핀 바깥 반경, r_o/l_c
T : 온도 [℃]
T_i : 내벽 온도 [℃]
T_∞ : 핀 주위 온도 [℃]
x : 길이 방향 좌표 [m]
X : 무차원 길이 방향 좌표 $(=x/l_c)$

그리스문자
β : 대류특성계수 비, M_e/M

† 회원, 강원대학교 기계·메카트로닉스공학부
E-mail : hkang@kangwon.ac.kr
TEL : (033)250-6316 FAX : (033)242-6013

η : 핀 효율
θ : 무차원 온도, $(T-T_\infty)/(T_i-T_\infty)$
λ_n : 고유 값, n=1, 2, 3 · · ·
ϕ_i : 변형된 핀 내벽 온도, (T_i-T_∞) [℃]

하첨자
b : 핀 바닥
c : 특성
e : 핀 끝
I : 내벽
id : 이상적
max : 최대
o : 바깥 반경
∞ : 주위

상첨자
* : 최적

1. 서 론

핀이 부착된 표면은 오랜 기간 동안 보다 더 많은 열전달을 일으키기 위하여 사용되어 왔다. 몇몇 대표적인 예로는, 전자부품의 방열 부품, 화학과정, 자동차의 라디에이터 그리고 항공기 등 많은 시스템에서 열전달 향상을 위하여 사용되고 있다.

따라서 핀에 대한 연구가 많이 이루어져 왔으며 최근에는 최적화에 대한 관심이 높아지고 있다. 가장 보편적인 핀의 형상으로는 사각, 삼각, 사다리꼴 핀 그리고 환형 또는 원형 핀 등이 있는데 이러한 핀들에 관한 해석 및 최적화에 관한 예로는, Casarosa와 Franco[1]는 일정한 두께를 가진 하나의 사각 핀에 대한 최적화된 설계에 접근한 반면 Abrate와 Newnham[2]은 유한요소법을 사용하여 벽에 붙어있는 삼각 핀의 정열에서 열전도를 발표하였다. Yu와 Chen[3]은 변화하는 열적 매개변수를 고려하며 원형 핀을 최적화하였다. Razelos와 Satyaprakash[4]는 열적 성능을 묘사하는 사다리꼴 형상의 핀 해석을 발표 하였으며 또한 최적 문제에 대한 개선된 풀이를 제시하였다. 최근에는 Kang과 Look[5]이 열적 비대칭 상태에서 복사와 전도를 고려하는 환형 핀의 최적화를 다루었다.

근래 들어 더욱 많이 관심이 모아지는 로봇 등의 관절 부분에서 방열 수단으로 사용되기도 하며, 지속적으로 많이 연구되어온 또 다른 보편적 형상의 핀이 pin 핀이다. 이에 관한 연구들로, Gerencser와 Razan[6]은 단위 바닥 면적당 주어진 핀 재질에 대하여 단면적이 변화하는 최적의 pin 핀 정렬을 조사하였으며 Razelos[7]는 pin 핀을 포함한 확장 표면으로부터의 열전달에 대한 재조사에 대한 발표를 하였다. 또한 Su와 Hwang[8]은 세 경우의 핀 끝 대류 상태에 대하여 pin 핀으로부터의 1차원과 2차원의 열전달의 상대오차를 해석한 반면 Almogbel과 Bejan[9]은 실린더에 붙어있는 pin 핀들에 대한 최적화 방법을 발표하였다. 최근에는 Kang[10]이 1차원 해석적 방법을 사용하여 직경이 고정되었을 때 pin 핀의 최적화에 대하여 논하였다.

이상의 pin 핀에 관한 논문들에서 핀 바닥의 직경은 상수로 일정하게 주어지고 핀 바닥 두께의 변화는 고려되지 않았다. 본 논문에서는 바깥 반경과 핀 바닥 두께가 변화될 수 있는 pin 핀에 대하여 최대열손실에 대한 열손실 비에 기본을 둔 최적화를 다루었으며 최대열손실의 90%에서 98%의 범위의 열손실을 최적열손실로 정의하였다. 이러한 최적화를 위하여 2차원 해석적 방법이 사용되었으며 핀 바닥의 경계조건으로는 일정한 온도 대신 핀 내벽으로부터 핀 바닥까지의 열전도와 핀 바닥을 통하여 핀으로 전달되는 열전도가 고려된다.

2. 2차원 해석적 방법

2.1 온도

Figure 1에서 보여 지는 pin 핀에 대한 무차원 형태의 2차원 지배 방정식은 식 (1)과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial\theta}{\partial R}+\frac{\partial^2\theta}{\partial X^2}=0 \qquad (1)$$

무차원 지배방정식 (1)를 풀기 위하여 네 개의 경계 조건이 요구 되는데 무차원 형태로 식 (2)부터 (5)로 표현된다.

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial R}\right|_{R=0}=0 \qquad (2)$$

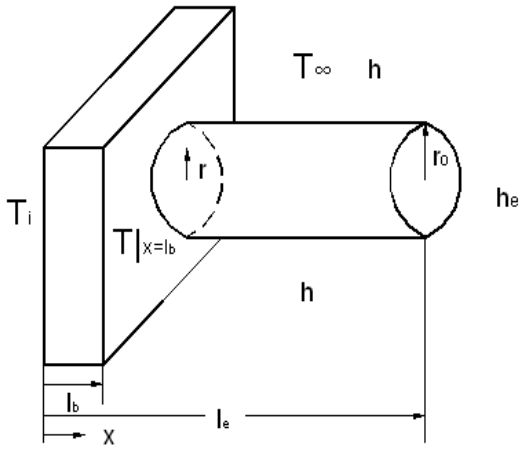

Fig. 1 Schematic diagram of a pin fin

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial R}\right|_{R=R_o} + M\theta\Big|_{R=R_0} = 0 \quad (3)$$

$$\left.\frac{d\theta}{dX}\right|_{X=L_e} + M_e\,\theta\Big|_{X=L_e} = 0 \quad (4)$$

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial X}\right|_{X=L_b} + \frac{1-\theta|_{X=L_b}}{L_b} = 0 \quad (5)$$

경계 조건식 (2)는 R이 0인 면을 통해서는 열전달이 일어나지 않는다는 것을 의미하며 식 (3)은 핀의 바깥 반경인 면을 통한 열전도는 그 면을 통하여 외부로 나가는 열대류와 같다는 것을 나타낸다. 또한 식 (4)는 핀 끝으로 전도에 의해 들어가는 열전달은 핀 끝에서 대류에 의하여 주위로 나가는 열전달이 같음을 나타내는 반면 식 (5)는 핀과 같은 단면적의 내벽으로부터 핀 바닥까지 흐르는 전도 열전달은 핀 바닥을 통해서 핀으로 들어가는 전도 열전달과 같다는 것을 의미한다. 무차원 지배 방정식 (1)을 변수분리법을 이용하여 푼 후 경계 조건식 (2)부터 (4)를 적용하면 pin 핀 내의 온도분포 식 (6)을 얻게 된다.

$$\theta(X,R) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2f_1(X)f_2(R)}{\lambda_n R_o\{g_1(\lambda_n)+g_2(\lambda_n)\}g_3(\lambda_n)} \quad (6)$$

여기서,

$$f_1(X) = \cosh(\lambda_n X) + g_4(\lambda_n)\sinh(\lambda_n X) \quad (7)$$

$$f_2(R) = J_1(\lambda_n R_0)\,J_0(\lambda_n R) \quad (8)$$

$$g_1(\lambda_n) = \{1-\lambda_n L_b g_4(\lambda_n)\}\cosh(\lambda_n L_b) \quad (9)$$

$$g_2(\lambda_n) = \{g_4(\lambda_n)-\lambda_n L_b\}\sinh(\lambda_n L_b) \quad (10)$$

$$g_3(\lambda_n) = \{J_0(\lambda_n R_o)\}^2 + \{J_1(\lambda_n R_o)\}^2 \quad (11)$$

$$g_4(\lambda_n) = -\frac{g_5(\lambda_n)}{g_6(\lambda_n)} \quad (12)$$

$$g_5(\lambda_n) = \lambda_n\sinh(\lambda_n L_e) + M_e\cosh(\lambda_n L_e) \quad (13)$$

$$g_6(\lambda_n) = \lambda_n\cosh(\lambda_n L_e) + M_e\sinh(\lambda_n L_e) \quad (14)$$

식 (6)부터 (14)에서 보여 지는 고유값 λ_n은 경계조건 식 (5)를 풀어서 정리한 식 (15)로부터 구할 수 있다.

$$M = \frac{\lambda_n J_1(\lambda_n R_o)}{J_0(\lambda_n R_o)} \quad (15)$$

2.2 열손실

원통형 pin 핀으로부터의 열손실은 식 (16)을 이용하여 계산할 수 있다.

$$q = \int_0^{r_o} -k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=l_b} 2\pi r dr \quad (16)$$

식 (16)을 풀어 정리한 무차원 형태의 열손실은 식 (17)로 표현된다.

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4\pi g_7(\lambda_n)\{J_1(\lambda_n R_o)\}^2}{\lambda_n\{g_1(\lambda_n)+g_2(\lambda_n)\}g_3(\lambda_n)} \quad (17)$$

여기서,

$$g_7(\lambda_n) = \sinh(\lambda_n L_b) + g_4(\lambda_n)\cosh(\lambda_n L_b) \quad (18)$$

2.3 핀 효율

핀의 전체 표면온도가 핀 바닥 온도와 같다고 가정할 때, 식 (19)를 사용하여 핀으로부터의 이상적 열손실을 구할 수 있다.

$$q_{id} = \left\{h\,2\pi r_o(l_e-l_b) + h_e\pi r_o^2\right\}(T|_{x=l_b} - T_\infty) \quad (19)$$

식 (19)를 정리하여 무차원 형태로 나타내면 식 (20)으로 표현된다.

$$Q_{id} = \left\{M2\pi R_o(L_e-L_b) + M_e\pi R_o^2\right\}\theta|_{X=L_b} \quad (20)$$

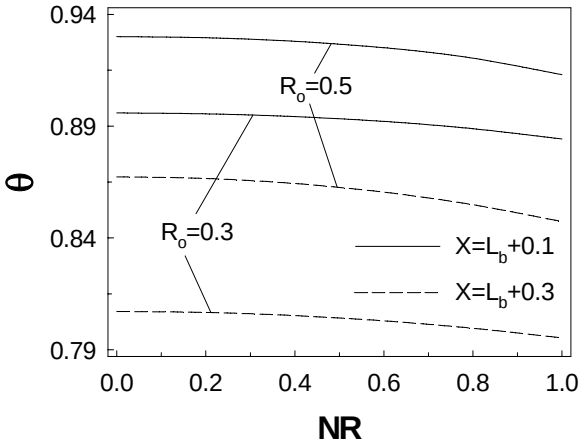

Fig. 2 Temperature along the normalized radius position (M=0.1, L_b=0.1, L_e=1.1, β=1)

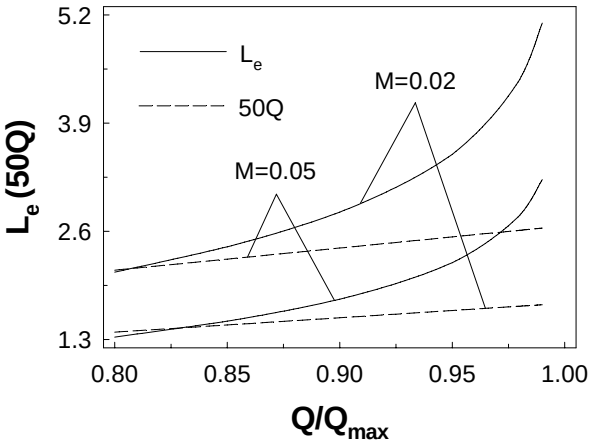

Fig. 3 Fin length and heat loss vs. the ratio of heat loss to the maximum heat loss (R_o=0.15, L_b=0.1, β=1)

핀으로부터 이상적 열손실에 대한 실제 열손실의 비로 정의 되는 효율은 식 (21)로 씌어진다.

$$\eta = \frac{Q}{Q_{id}} \tag{21}$$

본 연구에서 정의 된 무차원 핀 끝 길이, 열손실 그리고 대류특성계수 등의 무차원 변수들에서 보이는 특성길이 l_c는 임의의 길이이다. 임의의 적절한 값을 특성길이에 주고 무차원 변수들에 적용하여 실제차원 변수를 얻을 수 있다. 예를 들면, 무차원 핀 끝 길이가 L_e가 2인 경우 l_c에 임의의 값 0.05m를 주면 실제 핀 끝 길이 l_e=l_c·L_e=5cm×2=10cm가 된다.

3. 결과 및 고찰

Figure 2는 두 X지점에서 무차원 바깥 반경이 0.3과 0.5일 때 일반화된 반경위치 NR을 따른 온도분포를 나타낸다. 일반화된 반경위치 NR은 R/R_o로 정의되며 따라서 NR이 0은 pin 핀의 중심을 의미하며 NR이 1은 바깥반경의 위치를 표시한다. 바깥 반경이 클수록 반경을 따른 온도 변화는 현저해지고 핀 길이를 따른 온도 변화는 작아 진다. 또한 NR이 0.5이후가 0.5이전보다 반경을 따른 온도변화가 확연함을 보여준다.

Figure 3은 두 경우의 대류특성계수에 대하여 Q/Q_{max}값이 0.8부터 0.99까지 변하는 동안 그에 따른 열손실과 핀 길이의 변화를 보여주는데, 열손실은 당연히 선형적으로 증가하는 반면 핀 길이는 포물선 적으로 증가한다. 여기서 주지할 점은 Fig. 3 및 앞으로 나타나는 Q_{max}는 핀 길이가 충분히 길어졌을 때 실제 핀에서 발생하는 최대열손실인 반면 식 (21)의 분모에 있는 Q_{id}는 핀 길이에 관계없이 핀 전체가 핀 바닥의 온도와 같다고 가정하였을 때 발생하는 이상적인 열손실이라는 점이다. 최대열손실에 대한 열손실의 비가 0.99에서 핀 길이의 경사가 급격함을 보여주는데 이는 물리적으로 나머지 1%의 열손실을 얻기 위해서는 핀 길이를 굉장히 길게 하여야 한다는 의미이다. 구체적으로 M=0.02인 경우 그 비가 0.99일 때 약 L_e=5.10이 그 비가 1이 되기 위해서는 L_e=11.01이 되며 M=0.05인 경우 그 비가 0.99일 때 약 L_e=3.22에서 그 비가 1이 되기 위해서는 L_e=7.16이 된다.

Table 1은 pin 핀에서 대류특성계수가 0.02와 0.05인 경우 열손실이 최대 열손실의 80%, 90%, 98% 그리고 99%가 일어날 때 그에 해당하는 효율과 그 때의 핀 길이에서 0.1이 길어질 때 열손실의 상대 증가율을 나열한다. 이 Table 넷째 열에 주어진 값들의 한 예에 대하여 구체적으로 설명하면, Q/Q_{max}=0.8과 M=0.02인 경우에 L_e=2.1099, Q=0.027758인데 무차원 핀 끝 길이를 0.1 더 늘려서 L_e=2.2099로 하면 Q=0.028379가 되어 Q가 상대적으로 2.237% 증가하는 것을 나타낸다. 대류특성계수가 0.02인 경우 Q/Q_{max}가 0.8에서 0.99

Table 1 Efficiency for Q/Q_{max} and increasing rate of heat loss (R_o=0.15, L_b=0.1, β=1)

Q/Q_{max}	M	η for Q/Q_{max}	$\{Q(L_e+0.1)-Q(L_e)\}/Q(L_e)$
0.8	0.02	0.7348	2.237 (%)
	0.05	0.7377	3.465 (%)
0.9	0.02	0.6145	1.041 (%)
	0.05	0.6202	1.607 (%)
0.98	0.02	0.4303	0.197 (%)
	0.05	0.4319	0.304 (%)
0.99	0.02	0.3771	0.096 (%)
	0.05	0.3783	0.152 (%)

의 범위에서 열손실의 증가 비는 2.237%에서 0.096%의 범위에 있으며 0.05인 경우 Q/Q_{max}의 주어진 같은 범위에서 열손실의 증가 비는 3.465%에서 0.152의 범위에 있음을 나타낸다. 본 연구에서는 하나의 Q/Q_{max}에 기준을 두지 않고 다소 임의적으로 최대열손실에 대한 열손실의 비가 0.9에서 0.98의 범위 내에 있는 열손실을 최적 열손실로 정의하였으며, 최적열손실이 일어날 때의 핀 길이와 효율을 최적 핀 길이와 최적 효율로 정의하였다. 이와 같이 최대열손실에 대한 열손실의 비가 0.9에서 0.98의 범위를 최적 값의 범위로 잡아주어 수행한 이유는 너무 길거나 짧지 않은 핀의 길이에서 핀으로부터 충분한 열전달을 얻을 수 있다고 생각되어지기 때문이나 주어진 환경이나 사용자의 취향에 따라 이 범위보다 좀 더 작거나 큰 범위의 값을 최적 값으로 잡아줄 수 있으리라 생각된다.

핀 바닥두께의 변화에 따른 최적 값들의 변화가 Fig. 4에서 보여 진다. 핀 바닥두께가 변화하기 때문에 최적 핀 길이의 변화를 나타내기 위하여 최적 핀 끝 길이에서 핀 바닥두께를 빼준 값의 (i.e. $L_e^* - L_b$) 변화를 보여준다. 또한 최적 열손실과 최적 핀 길이에 10을 곱하거나 나누어준 이유는 세 개의 최적 값들의 변화를 함께 보여주면서 변화 경향을 좀 더 뚜렷하게 나타내기 위한 것이다. 최적 값들은 모두 핀 바닥 두께의 변화에 대하여 선형적으로 변화하는데 핀 바닥 두께가 두꺼워짐에 따라 최적의 열손실과 핀 길이는 감소하는 반면 최적의 효율은 증가한다. 최대열손실에 대한 열손실의 비가 0.9에서 0.98로 변함에 따라 핀 바닥 두께의 변화에 따른 각 최적 값들의 기울기 변화는 거의 없음을 보여준다.

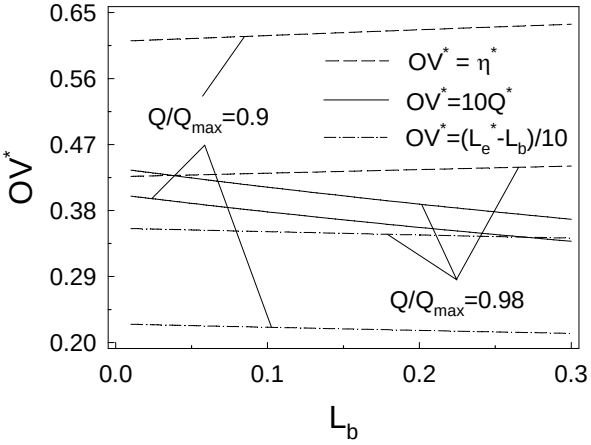

Fig. 4 Optimum values vs. fin base thickness (M=0.03, R_o=0.15, β=1)

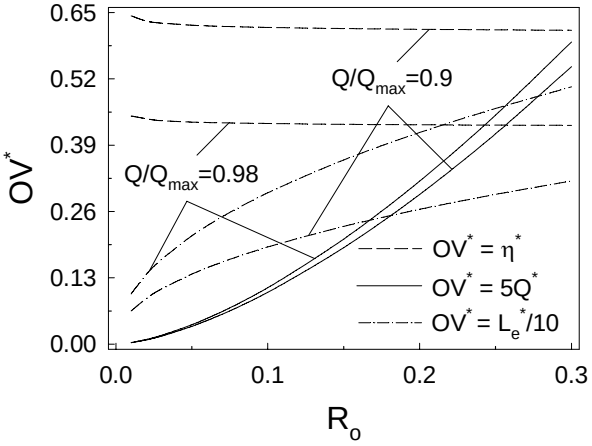

Fig. 5 Optimum values vs. fin outer radius (M=0.03, L_b=0.1, β=1)

Figure 5부터 Fig. 7에서는 핀 바닥두께가 일정한 값으로 고정되었으므로 최적의 핀 길이를 위해서 주어진 변수들의 변화에 대한 최적의 핀 끝 길이의 변화가 보여 진다. 먼저 Fig. 5는 pin 핀 바깥 반경의 변화에 따른 최적 값들의 변화를 보여준다. 핀 바깥 반경이 커짐에 따라 최적의 열손실은 처음에 다소 급격히 증가하다 그 이후 지속적으로 증가하며, 최적 핀 길이는 기울기가 점점 커지는 포물선 적으로 길어지는 반면 최적 효율은 아주 조금씩 감소한다. 핀 바깥 반경의 변화가 최적 효율의 변화에 미치는 영향은 상대적으로 작음을 보여준다.

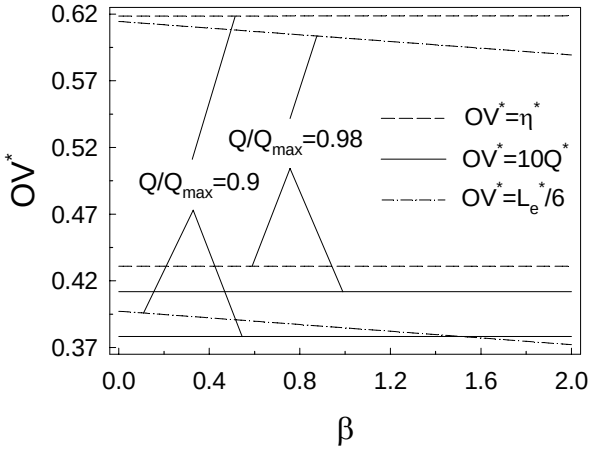

Fig. 6 Optimum values vs. convection characteristic numbers ratio (M=0.03, L_b=0.1, R_o=0.15)

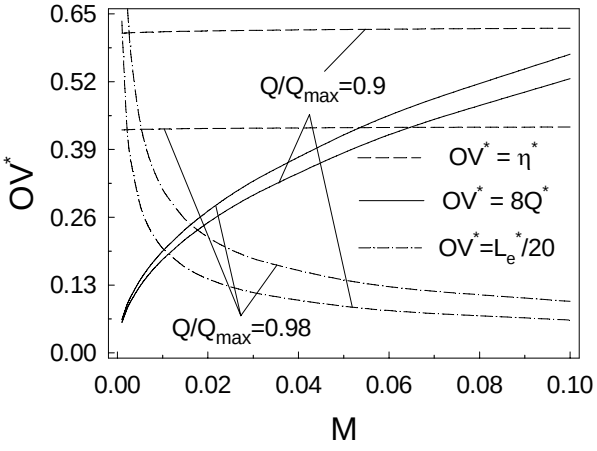

Fig. 7 Optimum values vs. convection characteristic number (R_o=0.15, L_b=0.1, β=1)

대류특성계수 비의 변화에 따른 최적 열손실, 효율 그리고 핀 길이의 변화가 Fig. 6에서 나타난다. 다른 변수들에 비하여 상대적으로 대류특성계수 비의 변화에 따른 최적 값들의 변화가 미미함을 보여준다. 특히 최적의 열손실은 대류특성계수 비의 변화에 전혀 영향을 받지 않는데 이는 최대 열손실이 대류특성계수 비의 영향이 없는 긴 핀 길이에서 길어나기 때문이다. 대류특성계수 비의 증가에 따라 최적의 핀 길이가 감소하는 이유는 비록 최대열손실은 대류특성계수 비의 변화에 영향을 받지 않으나 최적의 열손실은 대류특성계수 비가 커질수록 짧은 핀 길이에서 일어나기 때문이다. 대류특성계수 비의 증가에 따라 최적의 효율도 그래프 상에서는 거의 일정하게 보이나 실제로는 아주 조금씩 증가한다.

Figure 7은 최적 열손실, 효율 그리고 핀 길이를 주위 대류특성계수의 함수로 나타낸다. 최적의 효율은 대류특성계수의 증가에도 큰 변화를 보이지 않고 미미하게 증가함을 보여준다. 대류특성계수가 0.001부터 0.1까지 커짐에 따라 최적의 열손실은 포물선 적으로 증가하는 반면 최적의 핀 길이는 포물선 적으로 감소함을 주지할 수 있다.

4. 결 론

Pin 핀 바깥 반경이 일정하게 고정되었을 경우 핀에 대한 최적화를 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

(1) 최대열손실에 대한 열손실의 비가 0.9에서 0.98의 범위 내에 있는 pin 핀의 최적 열손실, 핀 길이 그리고 효율 값들이 핀 바닥 두께, 핀 바깥 반경, 대류특성계수 비 그리고 대류특성계수의 함수로 제시된다.

(2) 본 연구에서 정의 된 최적 효율은 핀 바닥 두께, 핀 바깥 반경, 대류특성계수 비 그리고 대류특성계수 등의 변수에는 거의 영향을 받지 않으나 최대열손실에 대한 열손실의 비에는 많은 영향을 받는다.

(3) 최적의 열손실과 핀 길이에 대한 핀 바깥 반경과 대류특성계수의 영향은 현저한 반면 핀 바닥 두께와 대류특성계수 비의 영향은 상대적으로 크지 않다.

참고문헌

(1) Casarosa, C. and Franco, A., 2001, "On the Optimum Thermal Design of Individual Longitudinal Fins with Rectangular Profile," *Heat Transfer Engineering*, Vol. 22, No. 1, pp. 51~71.

(2) Abrate, S. and Newnham, P., 1995, "Finite Element Analysis of Triangular Fins Attached to a Thick Wall," *Computer & Structures*, Vol. 57, No. 6, pp. 45~57.

(3) Yu, L. T. and Chen, C. K., 1999, "Optimization of Circular Fins with Variable Thermal Parameters,"

J. of The Franklin Institutes, Vol. 336(B), pp. 77~95.

(4) Razelos, P. and Satyaprakash, B. P., 1993, "Analysis and Optimization of Convective Trapezoidal Profile Longitudinal Fin," *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 115, pp. 461~463.

(5) Kang, H. S. and Look, D. C. Jr., 2007, "Optimization of a Thermally Asymmetric Convective and Radiating Annular Fin," *Heat Transfer Engineering*, Vol. 28, No. 4, pp. 310~320.

(6) Gerencser, D. S. and Razan, A., 1995, "Optimization of Radiative-Convective Arrays of Pin Fins Including Mutual Irradiation Between Fins," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 38, No. 5, pp. 899~907.

(7) Razelos, P., 2003, "A Critical Review of Extended surface Heat Transfer Coefficient," *Heat Transfer Engineering*, Vol. 24, pp. 11~28.

(8) Gerencser, Su, R. J. and Hwang, J. J., 1998, "Analysis of Transient Heat Transfer in a Cylindrical Pin Fin," *J. Thermophysics*, Vol. 12, No. 2, pp. 281~283.

(9) Almogbel, M. and Bejan, A., 2000, "Cylindrical Trees of Pin Fins," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 43, pp. 4285~4297.

(10) Kang, H. S., 2007, "Optimization of a Pin Fin based on the Fixed Diameter," *Proceedings of the KSME 2007 Fall Annular Meeting*, pp. 1637~1641.