

증명학습에 대한 학생들의 성향과 GSP를 활용한 증명학습

한혜숙¹⁾ · 신현성²⁾

본 연구의 목적은 증명학습에 대한 학생들의 성향과 학생들이 증명학습에서 느끼는 어려운 점들을 조사하고, 역동적인 기하 소프트웨어인 The Geometer's Sketchpad의 활용이 어떻게 학생들의 증명학습을 도울 수 있는지 탐구하는 것이다. 2개 고등학교의 117명의 9학년 학생들이 본 연구에 참여하였다. 사전 설문 조사 결과에 의하면 증명학습에 대해서 전체 응답자(116명) 중 16%만이 긍정적인 태도를 보여준 반면 50% 이상의 학생들이 부정적인 태도를 보여주었다. 증명학습에서 가장 어려운 점이 무엇 인지를 묻는 문항에 '여러 종류의 정리, 정의, 공준 등을 암기 및 기억하는 것'이라고 응답한 비율이 가장 높게 나타났다. 본 연구를 통해서 The Geometer's Sketchpad의 사용이 학생들의 증명학습에 대한 흥미를 유발하고 이해를 발달시키는데 긍정적인 역할을 할 수 있음을 확인하였다.

주요용어 : 역동적인 기하 소프트웨어, The Geometer's Sketchpad(GSP), 증명학습, 연역적 증명, 귀납적 접근, 경험적 정당화

I. 서론

학교수학에서 증명학습은 중요한 위치를 차지함과 동시에 많은 학생들이 어려움을 느끼며 낮은 성취도를 나타내는 분야 중 하나이다. 학생들의 증명을 쓰는 능력을 알아보기 위한 국내외의 여러 연구 결과들은 중·고등학생들의 증명쓰기 능력은 대체로 낮은 수준이라고 보고하였다(우정호, 1994; 류성립, 1998; 서동엽, 1999; Usiskin, 1982; Senk, 1985; Kahan, 1999). 예를 들면, 우리나라 중학생 1041명을 대상으로 한 우정호(1994)의 연구 결과에 의하면, 연구에 참여한 중학생들의 약 10-30% 정도만이 기본적인 정리에 대한 타당한 증명을 쓸 수 있는 수준이었다. 외국의 경우, 2700명의 고등학교 학생들을 대상으로 실시된 Senk(1985)의 연구 결과에 의하면 연구에 참여한 학생들의 약 30%만이 증명쓰기를 마스터했다고 보고했다.

연구자들은 교사의 교수법이나 교육 과정이 학생들의 학습에 지대한 영향을 미친다고 주장하였다(van Hiele, 1959/1984; Fennema, Carpenter, & Peterson, 1989; Reys, Reys, Lapan, Holliday, & Wasman, 2003). 중등학교 학생들의 증명 학습에 대한 성취도 또한 증

1) 강원대학교 (hanhyesuk@hanmail.net)

2) 강원대학교 (hsshin@kangwon.ac.kr)

명 지도를 위한 교사의 교수법이나 교육과정과 밀접한 연관이 있을 것이다. 중등학교에서 증명 지도는 학생들의 논리적인 수학적 사고와 추론 능력을 바탕으로 증명 과정의 이해에 주안점을 두어야 하지만 학교 현장에서 증명 지도가 본연의 목적과는 달리 피상적·형식적으로 지도되고 있는 것을 종종 볼 수 있다. 류희찬과 조완영(1999)은 학교수학에서 증명 지도는 증명 절차에 대한 교사의 시범, 학생들의 모방, 암기의 과정으로 피상적으로 행해지고 있으며, 이러한 결과 증명 과제가 주어졌을 때, 학생들은 증명에 필요한 수학적인 생각을 하기 보다는 교사가 제시하는 증명 절차나 방법을 그대로 되풀이한다고 지적했다. 학생들의 기계적 암기에 의존하는 피상적이고 형식적인 증명 지도 및 학습 방법이 증명학습에 대한 어려움과 낮은 성취도를 야기하는 주요한 요인 중의 하나 일 것이다.

Crowley(1987)는 학생들의 사고 수준과 교수·학습 과정에서 요구하는 사고 수준 사이에 갭(gap)이 존재한다면 교사가 계획했던 학습이 이루어지지 않을 것이라고 지적했다. 즉, 교사가 학생들의 사고 수준보다 상위 수준의 학습 내용을 지도할 때, 학생들은 교사의 수업을 이해하지 못하게 된다는 것이다. 전통적으로 중·고등학교에서의 증명 지도는 주로 형식적이고 연역적인 수준의 증명을 강조하고 있는 반면에 학생들은 그들의 직관이나 경험적인 정당화에 의존하려는 경향을 보이고 있다(류희찬, 조완영, 1999). van Hiele의 기하학적 사고 수준 모델(제 1수준-제 5수준)을 적용해 보면, 형식적, 연역적 증명 학습이 의미 있게 이루어지기 위해서는 학생의 사고는 van Hiele 제 4수준(형식적 연역수준)에 도달해 있어야 하지만 학생들은 제 2수준(분석 수준) 또는 3수준(비형식적 연역수준)에서 학습하려는 경향을 보인다는 것이다. 이런 사고 수준의 차이가 학생들이 증명 학습을 어렵게 느끼게 하는 요인이 될 수 있다. 또한 학생들의 사고 수준이 낮을수록 증명 학습에 대한 그들의 어려움은 더 커질 것이다. Senk(1989)는 van Hiele 사고 수준과 학생들의 증명 쓰는 능력 사이에 긍정적인 관계가 있다고 밝혔다. 즉 학생들의 사고 수준이 높을수록 증명 쓰는 능력 또한 높게 나타난다고 보고하였다.

학생들의 증명학습이 의미 있게 행해지고 그들의 증명 쓰는 능력을 향상시키기 위해서 학생들의 사고 수준의 향상이 필수적이고, 이를 위해서 무엇보다 교수·학습 프로그램이 중요한 역할을 한다. 앞서 언급한 학생들의 직관이나 경험적인 정당화 능력이 학생들의 형식적, 연역적 증명 능력과 무관한 것은 아니다. 오히려 직관과 적절한 경험적 정당화 활동은 증명 학습과 밀접하게 관련이 있고 학생들의 증명 능력을 향상시킬 수 있는 토대가 될 수 있다(서동엽, 1992; 류희찬, 조완영, 1999; Tall, 1991; Galindo, 1998). 그러므로 교사는 학생들의 직관력을 향상시키고 경험적 정당화 활동을 풍부하게 하여 그런 활동이 학생들의 사고 수준을 형식적 연역수준으로 이끄는 다리 역할을 할 수 있도록 지도해야 한다. 수학교육 연구자들은 The Geometer's Sketchpad(Jackiw, 2001)와 같은 역동적인 기하 소프트웨어가 학생들의 직관과 경험적 정당화 활동을 풍부하게 만들어 학생들의 증명학습에 긍정적인 영향을 끼친다고 주장을 하였다(류희찬, 조완영, 1999; Scher, 1996; Edwards, 1997; Galindo, 1998; Marrades & Gutierrez, 2000). NCTM (1989, 2000)에서도 학생들의 추론 및 증명 활동에 역동적인 기하 소프트웨어와 같은 테크놀로지의 사용을 적극 권장하고 있다.

본 논문은 두 가지 연구 과제에 대한 결과를 제시하고자 한다. 먼저 증명학습에 대한 학생들의 성향 및 증명학습에서 학생들이 느끼는 어려움이 무엇인지를 보고하고, 역동적인 기하 소프트웨어인, The Geometer's Sketchpad(이하 GSP)의 사용이 어떻게 학생들의 증명학습을 도울 수 있는지 제시하고자 한다.

II. 이론적 배경 및 선행 연구

2.1 The Geometer's Sketchpad의 특성

GSP는 학생들의 기하학 학습을 돕기 위해서 개발되어진 교육용 컴퓨터 소프트웨어 중의 하나이다. 그 소프트웨어가 제공하는 작도, 측정, 변환, 드래그(drag) 등의 기능들이 학생들의 탐구 및 추론 과정을 용이하게 만들어 교사 중심의 정적인 학습 분위기에서 벗어나 학습자 중심의 활기찬 학습 분위기를 형성하는데 효과적으로 사용될 수 있다(Marrades & Gutierrez, 2000).

GSP의 가장 큰 특징은 수학적 아이디어 대한 역동적인 시각화이다. GSP를 사용하여 작도한 도형은 전통적 학습 도구인 종이와 연필을 사용하여 작도한 도형과는 다른 특징을 갖는다(Laborde, 1996). 종이와 연필로 작도한 도형이 정적인 반면, GSP로 작도한 도형은 역동성을 갖는다. GSP의 드래그(drag)기능이 도형의 역동성을 가능하게 한다. GSP가 제공하는 도형의 역동성이란, 도형의 꼭짓점을 드래그(drag)하여 도형의 근간을 이루는 기하학적 성질(관계)은 유지한 채 도형의 외관을 자유자재로 변화시킬 수 있다는 것이다. 예를 들면, GSP로 작도한 (표준형)평행사변형의 꼭짓점을 드래그(drag)하여 그것을 정사각형, 직사각형, 마름모와 같은 다양한 형태의 평행사변형으로 변화시킬 수 있다. 즉 평행사변형의 불변의 성질은 항상 유지되면서 다른 가변적인 요소들이 변화되어 외관의 형태가 다른 다양한 예들이 창출되어진다. 그런 드래그(drag)기능이 기하학적 아이디어에 대한 학생들의 탐구 과정을 풍부하게 만들 뿐 아니라 그들의 직관 및 추측에 대한 즉각적인 피드백(feedback)도 제공하여 학습을 촉진시킬 수 있다.

2.2 증명학습에서 the Geometer's Sketchpad의 역할

선행 연구들은 역동적인 기하 소프트웨어의 사용이 학생들의 증명학습에 긍정적인 영향을 끼칠 수 있다고 보고하였다(류희찬, 조완영, 1999; Scher, 1996; Edwards, 1997; Galindo, 1998; Marrades & Gutierrez, 2000). GSP는 학생들의 증명학습에서 크게 두 가지 역할을 할 수 있다. 먼저 그 소프트웨어의 사용은 학생들에게 구체적이고 조작적인 탐구 과정을 제공함으로써 증명학습을 도울 수 있다. 나귀수(1998)는 학교 수학에서 증명은 단지 형식적이고 연역적인 정당화 과정만을 의미하는 것이 아니라 정당화, 발견, 확신과 이해, 조직화, 분석과 종합 등 여러 측면이 통합되어진 과정으로 제시되어야 한다고 제안하였다. NCTM(2000)도 증명과 추론 학습 과정에서 학생들의 탐구 및 추측 활동을 강조하였다. 이런 관점에서 증명에 대한 지도는 형식적인 증명 절차에만 중점을 두기 보다는 학생들의 직관이나 귀납적 접근을 통한 탐구 과정 또한 중요시 여겨져야 한다. Simon & Blum(1996)은 학생들의 증명에 대한 이해는 귀납적 방식에서 연역적 방식으로 발전한다고 주장하였다. 이는 학생들의 연역적 증명에 대한 이해를 돕기 위해서 교사는 학생들의 귀납적 탐구 과정이 활발하게 일어날 수 있는 학습 환경을 제공해야 한다고 볼 수 있다. GSP의 사용은 증명 과제에 대한 시각적 표현을 가능하게 하여 학생들의 귀납적 탐구 활동을 용이하게 하고, 또한 학생들의 추론에 대한 즉각적인 피드백을 제공함으로써 학생들의 증명학습을 도울 수 있다(Marrades & Gutierrez, 2000). 비록 그 소프트웨어의 사용은 학생들에게 직접적으로 형식

적인 연역적 증명 과정을 제시하지는 못 하지만, 수학적 아이디어에 대한 추측과 확인의 기회를 제공하여 학생들의 증명학습을 돕는데 기여할 수 있다(Scher, 1996)

수학교과에서 교수학적 프로그램은 학생들이 추론과 증명을 수학의 근본적이고 필수적인 요소로서 인식할 수 있도록 행해져야 한다(NCTM, 2000). 즉, 증명 지도에 있어서 학생들이 증명의 필요성에 대해 인식할 수 있는 기회를 제공해주는 것 또한 증명 과정에 대한 지도만큼 중요하다. 연구자들은(예, 류희찬, 조완영, 1999; Galindo, 1998; Marrades & Gutiérrez, 2000) GSP와 같은 역동적인 기하 소프트웨어의 사용이 학생들에게 연역적 증명의 필요성을 인식하는데 긍정적인 역할을 할 수 있다고 보고하였다. 예를 들면, 그런 소프트웨어의 사용이 학생들 스스로 경험적 정당화에 대한 한계를 깨닫게 하여 연역적 증명의 필요성을 인식하게 하는데 효과적이었다.

그러나 증명학습에 역동적인 기하 소프트웨어의 사용에 대한 부정적인 견해 또한 있다. Chazan(1993)은 역동적인 기하 소프트웨어의 사용이 오히려 연역적 증명의 역할이나 필요성을 약화시키는 결과를 초래할 수 있다고 주장하였다. 즉, 그 소프트웨어의 측정, 변환, 드래그(drag)기능을 통한 다양한 귀납적 추론 및 탐구 활동이 학생들의 경험적 정당화 대한 의존도를 높여 연역적 증명의 필요성에 대한 인식을 저해할 수 있다.

2.3 역동적인 기하학습 환경에서 교사의 역할

앞서 살펴본 것처럼, 비록 증명학습에서 역동적인 기하 소프트웨어의 사용에 대한 부정적인 견해도 있지만, 많은 연구자들이 그 소프트웨어의 사용에 대한 긍정적인 측면들을 보고하였다. 그러나 그 소프트웨어의 사용 그 자체가 저절로 학생들의 증명 능력이나 증명의 필요성에 대한 인식을 향상시키지 못 할 것이다. 소프트웨어의 사용이 학생들의 증명학습에 긍정적인 역할을 하기 위해서는 무엇보다 교사의 역할이 중요하다. 먼저, 소프트웨어의 활용 방법에 따라서 학습 효과가 다르게 나타날 수 있기 때문에(Connell, 1998), 적절한 증명 과제 및 학습 자료 개발을 위한 교사의 노력도 필수적이다. 교사의 주의 깊은 관찰과 적절한 발문 활동은 학생들의 경험적 탐구에 의한 추론과 연역적 정당화 과정을 연결하고 학생들이 연역적 증명의 필요성을 인식하는데 중요한 역할을 한다(류희찬, 조완영, 1999). 컴퓨터 소프트웨어를 사용한 학습 환경에서 교사의 또 다른 중요한 역할은 메타인지의 이동과 같은 교수학적 변환 현상이 일어나지 않도록 학생들을 안내하는 것이다. 즉, 증명에 대한 이해가 본질적인 학습 요소로서 여겨지는 학습 분위기를 조성하도록 노력해야 한다(Simon & Blume, 1996).

III. 연구 방법

연구의 첫 날에 실시된 학생 설문지를 통해서 학생들의 증명학습에 대한 성향 및 그들이 기존에 갖고 있던 증명학습에 관한 어려움이나 문제점들을 조사하였고, 연구의 마지막 날에 실시된 사후 검사와 학생 설문지를 통해서 GSP의 사용이 어떻게 학생들의 증명학습에 영향을 끼치는지에 대해서 살펴보았다.

본 연구는 미네소타주에 위치한 A고등학교 9학년 2개 학급(65명), B고등학교 9학년 2개 학급(52명)을 대상으로 실시되었다.

본 연구를 위해 A고등학교에서는 연구자가 준비한 학습 과제를 사용하여 14차시(1-4차시: 증명학습에 중점, 5-14차시: 도형의 성질 탐구에 중점)의 수업이 실시되었다. 매 차시에 사용된 학습 과제는 Key Curriculum Press에서 출판한 2권의 교재: Exploring Geometry with the Geometer's Sketchpad(Bennett, 2002), Rethinking Proof with the Geometer's Sketchpad(de Villiers, 1999)를 토대로 재구성 되었다. 각 차시의 수업은 90분 동안 진행되었고, 학생들은 평균 40분을 컴퓨터실에서 탐구 활동을 위해 사용하였고, 나머지 50분은 교실로 돌아와 소그룹 활동과 교사가 이끄는 토론 및 정리 학습을 위해서 사용하였다. 본 논문에서는 증명 학습과 관련된 1-4차시의 수업관련 내용만을 보고한다. 1-4차시의 주제는 [표 1]과 같다.

[표 1] A집단의 차시별 학습 주제

차시	주제
1	삼각형의 내각의 크기의 합 증명
2	삼각형의 외각의 성질 증명
3	삼각형의 중점연결정리의 증명
4	삼각형의 한 변에 평행한 직선의 성질 탐구 및 증명

비록 1, 2차시의 주제들은 이미 학생들에게 소개된 내용이었으나, 연역적 증명에 대한 지도가 이루어지지 않았다는 교사의 언급에 따라 그 주제들과 관련된 학습 과제를 본 연구에 포함하기로 결정하였다. A고등학교(이하 A집단)의 학생들은 대부분 GSP의 사용에 대한 사전 경험이 없었으므로 연구를 시행하기 전에 소프트웨어의 기본적인 사용법에 관한 지도가 2차례 시행되었다.

B고등학교(이하 B집단)에서는 본 연구를 위해 4차시의 수업이 실시되었다. B집단에서는 교사가 개발한 프로젝트식 학습 과제를 토대로 수업이 진행되었다. 각 차시의 수업은 90분 동안 진행되었고, 1, 3차시의 수업은 컴퓨터실에서 학생들의 탐구 활동을 위해서 실시되었고, 2, 4차시의 수업 중 일부는 교실에서 소그룹 활동 및 토론 활동을 위해서 실시되었다. 1, 2차시의 수업은 정삼각형의 삼등분선과 각의 크기의 대한 탐구 및 증명 활동에 관해서 실시되었고, 3, 4차시의 수업은 원과 관련되어진 3종류의 명제에 대한 탐구 및 증명 활동을 중심으로 실시되었다. B집단의 학생들은 GSP 사용에 대한 사전 경험이 있었으나, 주어진 과제를 수행하기 위해서 필요한 소프트웨어의 몇몇 기능들의 사용법에 관한 지도가 1차시 수업 중 약 40분 동안 이루어졌다.

두 집단 모두에서 매 차시마다 학생들의 조별 활동, 토론 활동, 탐구 활동이 강조되었고 학생들은 발견 학습/안내된 발견학습 환경에서 과제를 수행하였다. 연구자는 연구 기간 동안 본 연구에 참여한 4개 학급의 수학 수업에 모두 참관을 하여 수업 진행 상황, 교사와 학생들 간의 상호작용(interaction), 학생들의 학습 활동에 대한 반응이나 학습 태도 등을 관찰하며 관찰지에 기록하였다. 또한 학생들이 학습 도구(GSP)의 사용법이나 학습지 활동에 대해 부연 설명이 필요할 때 본 연구자는 학습 보조자 또는 안내자로서 학생들의 학습 활동을 도와주었다. 그러나 연구자는 직접적으로 학생들의 증명 과정에 관여하지는 않았다. 연구에 참여한 2명의 교사들 또한 학습 안내자로서의 역할을 수행했다. 그들은 학생들에게 직접적인 힌트나 해법을 제시해주기 보다는 적절한 발문을 통해서 학생들의 학습을 도와주었다.

두 집단에서 연구의 시작과 끝에 사전, 사후 학생 설문 조사가 시행되었으나, 사후 지필 검사는 A집단에서만 실시되었다. B집단에서는 사후 지필 검사 대신 수업시간에 수행했던 프로젝트가 평가되었다.

IV. 연구의 결과

4.1 사전 학생 설문 조사 결과

사전 학생 설문지는 10개의 문항으로 구성되었으나 본 논문에서는 연구의 목적에 가장 관련성이 깊은 5개 문항의 결과만을 보고한다. A집단에서는 65명의 학생이, B집단에서는 51명의 학생이 설문 조사에 참가하였다. 각 문항에 대한 조사 결과는 아래와 같다.

먼저 문항 1은 학생들의 증명학습에 대한 선호도를 조사하였다.

문항 1. 수학시간에 증명 배우기를 좋아 합니까?

[표 2] 사전 설문 조사-문항 1의 결과

	그렇다	중립	아니다
A집단 65명(%)	10(15)	14(22)	41(63)
B집단 51명(%)	9(18)	18(35)	24(47)
총 116명(%)	19(16)	32(28)	65(56)

[표 2]에서 알 수 있듯이, A, B 두 집단에서 증명학습을 좋아하지 않는다고 응답한 비율이 좋아한다고 응답한 비율보다 훨씬 더 높게 나타났다. A집단의 경우 63%가 증명 배우는 것을 좋아하지 않는다고 응답한 반면, 단지 15%만이 좋아한다고 응답하였다. B집단에서도 47%가 좋아하지 않는다고 응답한 반면, 18%만이 좋아한다고 응답하였다.

문항 2는 증명학습을 좋아하지 않는다고 응답한 학생들을 대상으로 왜 그들이 증명학습을 좋아하지 않는지 그 이유를 기술하도록 요청하였다. 이 문항에 대한 학생들의 응답을 분석하기 위해서 연구자는 모든 학생들의 응답을 검토한 후, 분석상의 편이를 위해 학생들의 응답을 6개의 카테고리로 분류하였다. 그 결과는 아래의 [표 3]과 같다.

문항 2. 증명학습을 좋아하지 않는 이유는 무엇입니까?

[표 3] 사전 설문 조사-문항 2의 결과 (%)

	A집단 41명	B집단 24명	총 65명
1. 증명학습은 어렵고(어렵거나)시간 낭비이기 때문	25(61)	13(54)	38(58)
2. 흥미가 없기 때문(지루함, 반복적, 귀찮음)	6(15)	5(21)	11(17)
3. 많은 정리들을 외우는 것이 어렵기 때문	4(10)	2(8)	6(9)
4. 증명은 너무 많은 과정(단계)을 포함하기 때문	4(10)	1(4)	5(8)
5. 실생활에 적용을 할 수 없기 때문	0(0)	2(8)	2(3)
6. 기타	2(5)	1(4)	3(5)

증명학습에 대한 학생들의 성향과 GSP를 활용한 증명학습

A, B 두 집단 모두에서 ‘증명학습이 어렵고(어렵거나)시간낭비이기 때문’이라고 응답한 비율이 가장 높게 나타났다. 학습에서 느끼는 어려움이 증명학습 자체를 학생들에게 별 의미가 없는 단지 시간 낭비로 여겨지게 하는 것 같았다. 다음으로 A, B 두 집단 모두에서 증명학습에 흥미가 없기 때문에 좋아하지 않는다는 의견이 15%와 21%를 차지하였다.

문항 3은 증명학습에서 학생들이 가장 어렵게 느끼는 것이 무엇인지에 대해서 기술하도록 요청하였다. 학생들의 응답은 문항 2와 같은 방법으로 분석되었고 [표 4]가 그 결과를 나타낸다.

문항 3. 증명학습에서 가장 어려운 점은 무엇입니까? (자세히 설명하세요)

[표 4] 사전 설문 조사-문항 3의 결과 (%)

	A집단 65명	B집단 51명	총 116명
1. 증명 과정에 사용하기 위해서 많은 정리, 정의, 공준 등의 암기 및 기억하는 것	38(58)	18(35)	56(48)
2. 이유 제시를 위해 적절한 정리, 정의, 공준 등을 찾는 것	8(12)	9(18)	17(15)
3. 증명 절차를 빠뜨리지 않고 완벽하게 쓰는 것	9(14)	15(29)	24(21)
4. 일반적인 증명법을 기억하는 것	5(8)	0(0)	5(4)
5. 어떻게 증명을 시작할지 결정하는 것	3(5)	3(6)	6(5)
6. 기타 (예, 증명학습에 관한 모든 것, 증명에 대한 이해)	2(3)	6(12)	8(7)

A, B 두 집단 모두에서 증명학습에서 가장 어려운 점은 ‘증명 과정에 필요한 많은 종류의 정리, 정의, 공준 등을 기억하고 적절하게 사용하는 것’이라는 응답이 58%, 35%로 가장 높은 비율을 차지하였다. 학생들이 증명 시 절차를 빠뜨리지 않고 완벽하게 모든 과정을 쓰는 것이 어려운 점이라는 의견이 그 뒤를 따랐다. 그 외 의견으로는 일반적인 증명법을 기억하는 것, 증명의 방향을 설정하는 것, 증명에 대한 이해... 등도 학생들이 증명학습에서 어렵게 생각하는 부분들이었다.

문항 4는 학생들에게 증명학습의 필요성에 대한 의견을 물었고, 그 결과는 [표 5]와 같다.

문항 4. 왜 증명학습이 필요하다고 생각합니까?

A, B 두 집단 모두에서 어떤 명제가 참임을 보여주는 방법을 배우기 위한 수단으로 증명학습이 필요하다는 의견이 57%, 37%로 가장 높은 비율을 차지하였다. 그 다음으로는 증명학습을 통해서 수학적 개념에 대한 이해가 향상될 수 있기 때문에 증명학습이 필요하다는 의견이 15%, 25%를 차지하였다. 그러나 카테고리 3, 4와 같이 증명학습을 단지 의무적으로 배워야 하는 과정으로 여기거나 증명학습의 필요성을 인식하지 못한다는 부정적인 의견 또한 A, B집단에서 15%, 28%의 비율을 차지하였다(퍼센트는 카테고리 3, 4의 수치를 합한 값이다).

[표 5] 사전 설문 조사-문항 4의 결과 (%)

	A집단 65명	B집단 51명	총 116명
1. 타인에게 나의 생각을 확신시키거나 무언가가 사실임을 보여주기 위한 방법을 배우기 위해서	37(57)	19(37)	56(48)
2. 수학 개념들에 대한 이해를 돕기 위해서	10(15)	13(25)	23(20)
3. 의무적(학교 수학 책에 있기 때문에)	8(12)	6(12)	14(12)
4. 증명의 필요성을 인식하지 못 함	2(3)	8(16)	10(9)
5. 일상생활 속에서 필요한 논리력의 향상을 위해	3(5)	2(4)	5(4)
6. 기타 (예, 문제 해결, 무응답..등등)	5(8)	3(6)	8(7)

문항 5는 학생들에게 앞으로 고등학교 수학 시간에 또는 대학에 들어가서 증명에 대해서 더 배워볼 의향이 있는지를 물었다. 그 결과는 [표 6]과 같다.

문항 5. 수학 시간에 (또는 대학에 진학해서) 증명에 대해서 더 배우고 싶습니까?

[표 6] 사전 설문 조사-문항 5의 결과

	그렇다	중립	아니다
A집단 65명(%)	25(38)	1(2)	39(60)
B집단 51명(%)	6(12)	18(35)	27(53)
총 116명(%)	31(27)	19(16)	66(57)

A, B 두 집단 모두에서 응답자의 50% 이상의 학생들이 증명을 더 이상 배우고 싶지 않다는 의견을 나타냈다. A집단에서는 38%의 학생들이 앞으로 증명을 더 배워보고 싶다고 대답한 반면에 B집단에서는 단지 12%의 학생만이 더 배우고 싶다고 응답하였다. 이 결과를 문항 1의 결과와 비교했을 때, 비록 증명 배우는 것을 좋아하지는 않지만 더 배우기를 원하는 학생들이 있음을 알 수 있었다.

4.2 사후 학생 설문 조사 결과

사후 학생 설문 조사는 14개의 문항들로 구성되었고, 주로 GSP의 사용에 관한 학생들의 의견을 묻는 문항들이었다. 본 논문에서는 연구의 목적에 가장 관련이 깊은 5개 문항의 결과만을 보고한다. A집단에서는 65명의 학생이, B집단에서는 52명의 학생이 사후 설문 조사에 참가하였다. 각 문항에 대한 조사 결과는 아래와 같다.

문항 1은 증명학습 동안 GSP 사용에 대한 학생들의 만족도를 조사하였고, 그 결과는 [표 7]과 같다.

문항 1. 나는 증명학습 동안 GSP의 사용에 대해서 대체로 만족한다.

A집단에서는 증명학습에 GSP 사용의 만족도에 대해서 부정적인 의견이 긍정적인 의견보다 약간 많았지만, 큰 차이는 없었다. 그러나 B집단에서는 긍정적인 의견이 부정적인 의견보다 약 2배가량 더 많았다. B집단이 A집단보다 GSP사용에 대한 만족도가 더 큰 것으로 나타났다.

[표 7] 사후 설문 조사- 문항 1의 결과

	긍정	중립	부정
A집단 65명(%)	23(35)	17(26)	25(39)
B집단 52명(%)	22(42)	18(35)	12(24)
총 117명(%)	45(38)	35(30)	37(32)

문항 2는 GSP의 사용이 증명에 대한 학생들의 이해를 향상시키는데 효과적이었는지를 묻는 문항이었고, 그 결과는 [표 8]과 같다.

문항 2. GSP의 사용은 증명학습에 대한 이해를 향상시키는데 아주 효과적이었다.

[표 8] 사후 설문 조사-문항 2의 결과

	긍정	중립	부정
A집단 65명(%)	24(37)	18(28)	23(35)
B집단 52명(%)	32(62)	14(27)	6(12)
총 117명(%)	56(48)	32(28)	29(25)

A집단에서는 GSP의 사용이 학생들의 증명에 대한 이해를 향상시키는데 아주 효과적이라는 의견이(37%) 그렇지 않다는 의견(35%)보다 약간 많았으나, 큰 차이는 없었다. 반면 B집단에서는 긍정적인 의견(62%)이 부정적인 의견(12%)보다 5배 이상 더 많았다.

문항 3은 지필도구에 의존하는 기존의 증명 학습 방법과 GSP를 사용하는 학습 방법 중 어떤 방법이 학생들의 증명학습을 더욱 풍부하게 만들 수 있는지를 묻는 문항이었다. 그 결과는 [표 9]와 같다.

문항 3. 나는 지필도구를 사용하는 일반적인 증명학습 방법 보다 GSP를 이용한 조작활동을 통해서 증명에 대해서 더 많은 것을 배울 수 있었다.

[표 9] 사후 설문 조사-문항 3의 결과

	긍정	중립	부정
A집단 65명(%)	35(54)	14(22)	16(25)
B집단 52명(%)	42(81)	5(10)	5(10)
총 117명(%)	77(66)	19(16)	21(18)

A, B 두 집단 모두에서 긍정적인 반응이 부정적인 반응보다 훨씬 더 높은 비율을 차지하였다. 특히 B집단의 경우 응답자의 81%가 GSP를 이용한 조작활동을 통해서 증명에 대해서 더 많은 것을 배울 수 있다고 응답한 반면에 단지 10%만이 그렇지 않다고 응답하였다.

문항 4는 GSP의 사용이 어떻게 학생들의 증명학습에 도움이 되었는지를 묻는 열린 문항이었다. 학생들은 다양한 응답을 제시하였고, 대표적인 응답은 다음과 같다.

- GSP의 신속하고 정확한 측정 기능
- 증명 과제에 대한 시각적 표현(도형의 작도), 시각적 표현을 통한 증명 과제의 이해
- 드래그(drag)기능을 사용하여 도형의 자유로운 변환
- GSP의 사용이 발견 학습(탐구 과정)에 효과적이었다.

A집단의 경우 GSP가 제공하는 시각적 효과가 증명 과제를 이해하는데 도움을 주었다는 응답이 55%로 가장 높은 비율을 차지하였다(B집단의 경우 23%). B집단에서는 GSP의 사용이 주어진 과제에 대한 발견 및 탐구의 과정을 용이하게 하여 증명 과정에 대한 이해를 돕는다는 응답이 35%로 가장 높은 비율을 차지하였다(A집단의 경우 15%). 두 집단에서 증명 학습을 위해서 GSP를 활용하는 방법상에 차이가 있음을 알 수 있었다.

다음 문항은 GSP의 사용이 증명 학습을 좋아하지 않았던 학생들에게 어떤 영향을 끼쳤는지를 알아보기 위해서 GSP를 사용하기 전에 증명 배우는 것을 좋아하지 않았다고 응답한 학생들을 대상으로 조사하였다. 그 결과는 [표 10]과 같다.

문항 5. 만약 GSP를 사용할 수 있다면, 앞으로 증명 학습이 더 즐거워질 것이다.

[표 10] 사후 설문 조사-문항 5의 결과

	긍정	중립	부정
A집단 27명(%)	7(26)	10(37)	10(37)
B집단 22명(%)	10(45)	5(23)	7(32)
총 49명(%)	17(35)	15(31)	17(35)

A집단의 경우, 증명 학습을 좋아하지 않는다고 응답한 27명 중 7명(26%)의 학생이 GSP를 사용한다면 증명 학습이 더 즐거워질 것이라고 응답하였고, B집단에서는 22명 중 10명(45%)의 학생이 긍정적인 응답을 제시하였다. 이는 GSP의 사용이 증명 학습에 대한 학생들의 부정적인 성향을 긍정적으로 전환하는데 도움이 될 수 있음을 시사한다.

4.3 사후 지필 검사와 학습 과제 평가 결과

10개의 문항으로 구성된 사후 검사가 A집단의 학생들에게 실시되었지만, 본 논문에서는 직접적인 증명과 관련된 4개 문항의 결과만을 보고한다. A집단의 64명의 학생이 사후 검사에 참여하였다.

문항 1은 ‘삼각형의 내각의 크기의 합이 180° ’ 라는 명제를 증명하는 문항이었다. 이 문항에 단지 13%의 학생만이 완벽한 증명 과정을 제시하였다. 그들은 GSP를 활용한 탐구 과정에 대한 언급을 하거나 탐구 과정 동안 사용했던 그림을 이용해서 연역적 증명 과정을 바르게 제시하였다. 연역적 증명 과정을 바르게 제시하지 못한 많은 수의 학생들이 비슷한 오류를 보여주었는데 그들은 몇 개의 구체적인 예를 통해서 삼각형의 내각의 합이 항상 180° 임을 보여주었다. 그들의 과거 학습 방법(연구 전에 교사는 다양한 예를 사용해서 삼각형의 내각의 크기의 합이 180° 임을 보여주었다고 함)과 GSP를 이용한 구체적인 사례에 대한 탐구 내용이 학생들의 오류에 영향을 끼친 것 같다.

문항 2는 ‘삼각형의 두 내각의 크기의 합은 이웃하지 않는 한 외각의 크기와 같다’는 명제를 증명하는 문항이었다. 응답자의 45%가 완벽한 연역적 증명 과정을 제시하였다. 첫 번째 문항의 경우처럼 연역적 증명 과정을 제시하지 못한 학생들의 대다수는 몇 가지 구체적인 예를 제시하면서 주어진 명제를 증명하고자 하였다. 이런 반응 또한 위에서 언급한 이유와 관련이 있는 것 같다.

문항 3, 4는 문항 1, 2 보다 난이도가 높을 뿐 아니라 학생들이 사전에(연구 전에) 경험적

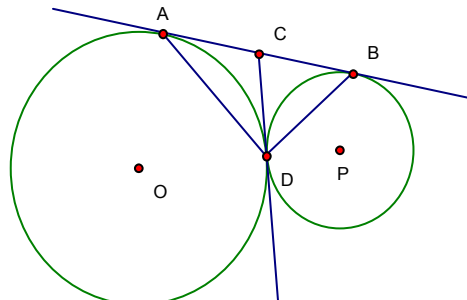
정당화(귀납적 접근법)에 의해 학습한 적이 없는 문항들이었다. 문항 3은 삼각형의 중점연결 정리의 증명에 관한 문항이고, 문항 4는 ‘삼각형의 한 변에 평행한 직선이 나머지 두 선분을 같은 비율로 나눈다’는 명제를 증명하는 문항이었다. 응답자의 27%가 문항 3에 완벽한 증명 과정을 제시하였고, 36%는 문항 4에 완벽한 증명 과정을 제시하였다. 문항 3의 경우 두 가지 요소(1.삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분은 나머지 변과 평행하고, 2.길이는 나머지 변의 길이의 반과 같다) 모두에 대한 증명을 제시했을 때만이 완벽한 증명으로 간주되었다. 응답자의 약 30%가 두 가지 요소 중 하나에 대해서만 증명을 제시하여 완벽한 점수를 받지 못 하였다. 문항 1, 2와는 달리 문항 3, 4에서는 단지 소수(6%, 9%)의 학생들만이 구체적인 예들을 이용하여 증명을 시도하였다.

네 가지 증명 과제에 대한 분석 결과, 학생들에게 이미 과거에 학습한 내용을 다시 증명 하도록 요청했을 때, GSP는 주로 다양한 예를 창출하여 이미 학습한 내용을 재확인 하는 과정에 사용되었다. 이런 경우, GSP 활동이 학생들의 경험적 정당화에 대한 의존도를 더 높이는 것 같았다.

B집단의 경우 사후 지필검사 대신 학생들이 수업시간에 행했던 원과 관련된 세 가지 증명에 대한 평가가 이루어졌다. 세 가지 과제 중 하나는 아래와 같다.

과제 2.

주어진 조건: 아래의 <그림 1>처럼 직선 AB는 원 O와 P의 접선이고 직선 CD는 점 D에서 두 원에 접한다. 결국 원 O와 P는 점 D에서 서로 접한다.



<그림 1> 과제 2의 다이어그램

- 1) 작도: GSP를 사용하여 <그림 1>의 다이어그램을 작도하여라. 작도를 한 후 점들을 드래그(drag)하여 항상 주어진 조건을 만족하는 도형이 되는지 확인하여라.
- 2) 탐구: 각 ADB의 크기를 추측하고, GSP를 사용하여 측정하여라. 그림위의 점들을 이동했을 때, 각 ADB의 크기가 어떻게 변하는지 관찰하여라. 3)단계로 가기 전에 작도한 다이어그램의 각 요소들을 관찰하여 발견한 것들을 모두 기록하여라.
- 3) 증명: 각 ADB의 크기가 GSP를 이용하여 측정한 크기임을 증명하여라.

증명 쓰는 능력의 평가를 위해서 교사와 연구자는 학생들이 연역적 증명을 쓰는 과정에 전혀 개입하지 않았다. 각 문항 당 5점이 배정되었고(총 15점 만점), 완벽한 증명을 제시할 경우 5점, 증명 과정은 타당하나 1가지 정도의 미비한 오류를 포함한 경우 4점, 증명을 시도

는 했으나 증명 과정이 불완전한 경우 3점, 직관이나 구체적인 예를 통해서 증명을 시도했을 경우 2점, 증명 과제를 부분적으로만 이해를 하여 직관이나 경험에 의존했을 경우 1점, 증명 과제를 전혀 이해하지 못 했거나 증명을 시도하지 못 했을 경우 0점으로 채점되었다. 55명의 학생 중 71%의 학생들이(39명) 13점 이상의 점수를 받았다. 20%의 학생들은(11명) 10-12점, 9%의 학생은(5명) 7-9점을 받았다.

과제 2와 같이 다른 두 가지 과제들도 연역적 증명 뿐 아니라 작도 및 탐구 과정을 포함하고 있었다. 비록 학생들은 GSP를 이용해서 주어진 다이어그램을 정확하게 작도하는데 어려움을 갖기도 하였지만, 많은 시행착오를 거치면서 작도 과제를 수행할 수 있었다. 작도 과제를 수행한 후 학생들은 그 다이어그램에 대한 탐구 시간이 주어졌는데 대부분의 학생들이 각의 크기나 선분의 길이 등을 측정하고, 그것들의 변화를 관찰하면서 자신의 추론을 확인하는 과정을 거쳤다. 이런 작도와 탐구 과정이 학생들에게 연역적 증명에 필요한 아이디어들을 발견할 수 있는 기회를 제공하는 것 같았다. 증명을 쓰기 전에 학생들은 자신들이 발견한 아이디어에 대해 소집단 토론을 할 기회도 주어졌다. 이런 모든 활동들이 학생들이 증명과제를 이해하고 증명을 쓰는데 많은 도움이 된 것 같다.

V. 결론

본 연구는 증명학습에 대한 학생들의 성향 및 증명학습에서 그들이 느끼는 어려움이 무엇 인지를 살펴보고, 역동적인 기하 소프트웨어인, GSP의 사용이 어떻게 학생들의 증명학습을 도울 수 있는지 탐구하였다. 연구 결과 분석을 토대로 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 전체 응답자의 절반 이상의 학생들이 증명학습에 대해서 부정적인 견해를 보여주었다. 예를 들면, 전체 응답자 중에서 56%는 증명학습을 좋아하지 않는다고 응답한 반면, 단지 16%만이 증명학습을 좋아한다고 응답하였다. 학생들은 다양한 이유로 증명 배우는 것을 좋아하지 않는다고 응답하였는데, 그 중에서 가장 높은 비율을 차지하는 이유는 증명학습 자체의 어려움이나 증명학습의 필요성을 인식하지 못해 학습 자체를 의미 없는 과정으로 생각하는 경향이였다. 또한 학습에 흥미나 관심이 없어 증명학습을 좋아하지 않는다는 의견도 그 뒤를 따랐다. 이는 증명 지도에 대한 교수·학습 방법상의 변화가 필요함을 암시한다.

둘째, 학생들이 증명학습에서 느끼는 어려움은 주로 학습한 내용에 대한 기억/암기에 관련된 내용이 많았다. 증명 과정에 사용하기 위해서 많은 종류의 정리, 정의, 공준 등을 암기하고 기억하는 것 또는 일반적인 증명법을 기억하는 것이 학생들의 증명학습을 어렵게 만드는 요인들이었다. 비록 증명 지도는 학생들의 논리적 사고와 개념적 이해를 토대로 이루어져야 하지만, 위와 같은 응답들은 학생들의 증명학습은 주로 암기에 의존함을 보여준다. 이는 증명 뿐 아니라 수학적 개념이나 성질 등의 지도가 기존의 암기식 방식에서 벗어나 학생들의 개념적 이해에 토대를 둔 학습자 중심의 접근 방식으로 변화되어야 함을 시사한다.

셋째, 많은 연구자들이(예, 류희찬, 조완영, 1999; Scher, 1996; Edwards, 1997; Galindo, 1998; Marrades & Gutierrez, 2000) 학생들의 증명학습에 GSP가 긍정적인 역할을 한다고 보고하였고, 본 연구에서도 그 소프트웨어의 사용에 대한 여러 긍정적인 측면들이 발견되었다. 먼저, GSP를 사용하여 증명과제를 시각적으로 표현하고(작도), 그 소프트웨어의 측정이나 드래그(drag)등의 기능을 이용하여 그 시각적 표현에 대해서 관찰하는 과정이 학생들이 증명과제를 이해하는데 도움이 되었다. 또한 소프트웨어의 측정, 변환, 드래그(drag) 등의

기능들은 학생들 스스로 증명 과정에 필요한 아이디어를 발견하고 탐구하는데 효과적으로 사용되어질 수 있었다. 예를 들면, '삼각형의 두 내각의 크기의 합은 이웃하지 한 외각의 크기와 같다'라는 명제를 증명하는 과제를 제시했을 때, 그 명제에 대한 직접적인 증명에 앞서, GSP를 사용하여 학생들 스스로 삼각형을 작도하고, 그 삼각형의 내각과 외각의 크기를 측정하고, 삼각형의 각 꼭짓점을 드래그 (drag)하여 생성되는 많은 종류의 예들을 관찰함으로써 그 명제가 항상 참이 됨을 확인하는 과정이 학생들이 증명해야할 과제에 대해 이해하는데 도움이 되었다. 명제에 대해 이해를 한 후 학생들은 연역적 증명 과정에 필요한 아이디어들을 발견하기 위해서 자신의 추측을 토대로 삼각형을 변환시켜보거나, 보조선 또는 보조 도형들을 작도하여 자신들의 추측을 확인하고, 다시 추측 하고, 확인하는 지속적인 추론 과정을 통해 증명 과정에 필요한 아이디어들을 발견할 수 있었다. GSP가 제공하는 탐구 및 발견의 과정들은 증명학습의 인지적 측면 뿐 아니라 학생들의 창의력, 도전정신, 학습에 대한 흥미와 호기심, 자신감과 같은 정의적인 측면에서도 긍정적인 역할을 할 수 있었다. 증명학습을 좋아하지 않았다고 응답한 학생들의 35%가 소프트웨어의 사용 후 증명학습에 소프트웨어를 사용할 수 있다면 증명학습이 더 즐거워질 것이라고 응답하였다. 즉, 그 소프트웨어의 사용은 학생들에게 증명학습에 대한 자신감 및 흥미를 유발하게 하는 계기가 될 수 있다.

넷째, GSP의 사용에 대한 부정적인 측면 또한 발견되었다. 예를 들면, 컴퓨터 사용 그 자체를 좋아하지 않거나, 소프트웨어의 사용법을 익히는데 많은 어려움을 느끼는 학생들에게 그 소프트웨어의 사용은 오히려 학습 방해물이 될 수 있었다. 소프트웨어의 사용법에 익숙하지 않은 학생들이 수업시간에 증명학습에 초점을 두기 보다는 사용법을 익히는데 더 많은 시간을 할애하는 것이 관찰되기도 하였다. 교육용 컴퓨터 소프트웨어를 포함한 많은 종류의 테크놀로지는 훌륭한 학습 도구가 될 수 있다. 그러나 그들 자체가 학습 목적이 되어서는 안 된다. 그러므로 위와 같이 GSP가 학습 목적이 되는 교수학적 변환 현상을 막기 위해서 무엇보다 교사의 역할이 매우 중요하다. 교사는 학생들에게 소프트웨어의 사용법을 익히기 위한 충분한 기회를 제공해야 하며, 교사의 지속적이고 주의 깊은 관찰과 관심이 요구된다. 또 다른 문제점으로는 GSP의 사용이 학생들의 경험적 정당화에 대한 의존도를 더 높여줄 수도 있다는 것이다. 특히, 학생들이 이미 학습한 내용에 대해서 다시 증명을 하도록 요청하였을 때, 소프트웨어는 단지 그 학습 내용에 대한 재확인 과정에만 중점적으로 사용되었다. 그 결과 학생들은 GSP가 제공하는 다양한 구체적인 경험들만을 기억하거나 다양한 예들의 제시가 연역적 증명을 대신할 수 있다고 생각하는 것 같았다. 이러한 문제점을 해결하기 위해서 교사의 적절한 발문 및 잘 구성되어진 학습 과제가 필수적이다. 교사는 학생들 스스로 경험적 정당화의 한계를 깨닫고 연역적 증명의 필요성을 인식할 수 있도록 학생들을 안내해주는 역할을 수행해야 할 것이다.

류희찬과 조완영이(1999) 지적하듯이, 기하 소프트웨어의 사용 그 자체만이 증명 지도 및 증명학습과 관련되어진 여러 가지 문제점을 해결하지는 못 할 것이다. 기하 소프트웨어가 보다 효과적으로 증명학습에 활용되기 위해서는 교사와 학생의 노력이 필수적이다. 교사는 GSP 활용 효과를 극대화하기 위해서 잘 구성된 교재 및 학습 자료 개발에 주의를 기울여야 할 것이고, 학생들은 학습에 대한 주체의식을 가지고 열정적으로 학습에 참여하려는 노력을 해야 할 것이다.

참고문헌

- 나귀수(1998). 증명의 본질과 지도 실제의 분석-중학교 기하단원을 중심으로, 서울대학교 박사학위논문.
- 류성립(1998). 피아제의 균형화 모델에 의한 증명의 지도 방법 탐, 한국교원대학교 박사학위논문.
- 류희찬, 조완영(1999). 증명의 필요성 이해와 탐구형 기하 소프트웨어의 활용, 수학교육학연구(대한수학교육학회지), 제9권 2호, 419-438.
- 서동엽(1999). 중학교 학생의 증명 능력 분석, 수학교육학연구(대한수학교육학회지), 제9권 1호, 183-203.
- 우정호(1994). 증명 지도의 재음미, 대한수학교육학회논문집, 제4권 1호, 3-24.
- Bennett, D.(2002). Exploring geometry with the Geometer's Sketchpad, Calif.: Key Curriculum Press.
- Chazan, D.(1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. Educational Studies in Mathematics, 24, 359-387.
- Connell, M. L.(1998). Technology in constructivist mathematics classrooms. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 17(4), 311-338
- Crowley, M. L.(1987). The van Hiele model of the development of geometric thought, In M. M. Lindquist, and A. P. Shulte(Eds.), Learning and teaching geometry, K-12(pp.1-16). Reston, VA.: NCTM.
- de Villiers, M.(1999). Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad, Calif.: Key Curriculum Press.
- Edwards, L.(1997). Exploring the territory before proof: Students' generalizations in a computer microworld for transformation geometry. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 2, 187-215.
- Fennema, E., Carpenter, T. P., & Perterson, P. L.(1989). Learning mathematics with understanding: Cognitively guided instruction. In J. Brophy(Ed.), Advances in research on teaching (pp.195-221). Greenwich, CT: JAI Press.
- Galindo, E.(1998). Assessing justification and proof in geometry classes taught using dynamic software. The Mathematics Teacher, 91(1), 76-81.
- Jackiw, N.(2001). The Geometer's Sketchpad (Version 4.0) [Computer software].
- Kahan, J.(1999). Relationships among mathematical proof, high-school students, and a reform curriculum. Doctoral dissertation, University of Maryland.
- Laborde, C.(1996). A new generation of diagrams in dynamic geometry software. Paper presented at the 18th conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Panama City, FL.

- Marrades, R., & Gutie´rrez, A.(2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87-125.
- National Council of Teachers of Mathematics.(1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA.: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics.(2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA.: NCTM.
- Scher, D.(1996). Folded paper, dynamic geometry, and proof: A three-tier approach to the conics. *The Mathematics Teacher*, 89(3), 188-193.
- Senk, S. L.(1985). How well do students write geometry proofs? *The Mathematics Teacher*, 78(6), 448-456.
- Simon, M., & Blum, G.(1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematics Behavior*, 15, 3-31.
- Tall, D. O.(1991). Intuition and rigor: The role of visualization in the calculus. In W. Zimmermann, & S. Cunningham(Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics*(pp.105-119). MAA Notes Series #19.
- Reys, R., Reys, B., Lapan, R., Holliday, G., & Wasman, D.(2003). Assessing the impact of standards-based middle grades mathematics curriculum materials on the student achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 74-95.
- Usiskin, Z.(1982). van Hiele levels and achievement in secondary school geometry (Final report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project). Chicago: University of Chicago. (ERIC Document Reproduction Service No. ED220288).
- van Hiele P.M.(1984). The child's thought and geometry. In D. Fuys, D. Geddes, & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hieles* (pp.243-252). New York: Booklyn College. (Original work published 1959).

Students' attitudes toward learning proofs and learning proofs with GSP

Han, Hyesuk³⁾ · Shin, Hyunsung⁴⁾

Abstract

The purposes of this study were to investigate what attitudes students have toward learning proofs and what difficulties they have in learning proofs, and to examine how the use of dynamic geometry software, the Geometer's Sketchpad, helps students' proof learning. The study involved 117 9th graders in 2 high schools. According to questionnaire data, over 50 percent of the total respondents(116) indicated negative attitudes toward learning proofs, on the other hand, only 16 percent of the total respondents indicated positive attitudes toward the learning. Memorizing and remembering many kinds of theorems, definitions, and postulates to use in proving statements was the most difficult part in learning proofs, which the largest proportion of the total respondents indicated. The study found that the use of the Geometer's Sketchpad played positive roles in developing students' understanding of proofs and stimulating students' interests in learning proofs.

Key Words : Dynamic geometry software, The Geometer's Sketchpad(GSP), Proof learning, Deductive proof, Inductive approach, Empirical justification

3) Kangwon National University (hanhyesuk@hanmail.net)

4) Kangwon National University (hsshin@kangwon.ac.kr)