한국학교수학회논문집 제 11 권, 제 2 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 11, Number 2, 285-298, June 2008

실수로의 수 체계 확장을 위한 유리수의 재해석에 대하여

신보미[1]

제 7차 중학교 교육과정에서는 무리수를 순환하지 않는 무한소수로 도입하기 위해 유리수를 소수와 관련하여 재해석하도록 하고 있다. 여러 선행연구는 중학교 과정에서 유리수와 소수의 관계를 살핌에 있어 실제 나누어 보는 전략이 주요한 교수학적 도구가 됨을 지적하였다. 이 연구에서는 나눗셈 알고리즘을 통한 산술적 조작 활동의 관점에 비추어 정수와 유한소수를 9또는 0이 순환하는 소수로 다루는 접근 방안의 적절성을 분석하였다. 또한 무리수를 무한소수로 도입하는데 '무리수=비순환소수', '유리수=순환소수'와 같은 대응이 필수적인가에 대해서도 음미해보았다. 나아가 무리수 도입을 위한 대안적인 방안에 대해서도 간접적으로 살펴보았다.

주요용어 : 유리수, 무리수, 순환소수

Ⅰ. 서론

현행 학교수학에서는 실수계로의 수체계의 확장을 엄밀하게 공리적으로 전개하는 것보다는 정수계, 유리수계를 차례로 구성한 후에 유리수계를 확장하여 실수계를 구성하는 방법으로 그 지도가 이루어지고 있다. 제 7차 교육과정의 학습지도상의 유의점에는 유리수계를 실수계로 확장함에 있어서 '무한소수'의 개념을 사용하여 무리수를 정의하도록 하고 있다. 이에 8단계 교육과정에서는 유리수를 소수와 관련하여 재해석함으로써 실수로의 수체계 확장 가능성을 탐색한다(교육부, 1999, p. 45, p. 48).

이와 같이 8단계에서 '유리수와 소수'의 관계를 음미함에 있어 교과서에 따라서는 $1=0.999\cdots$ 과 $0.3=0.2999\cdots$ 처럼 정수나 유한소수를 9가 순환하는 무한소수로 다루는 경우가 있다. 조한혁・최영기(1999, p. 606, p. 609)는 $1=0.999\cdots$ 이 고등학교 과정에서 무한급수의 값을 부분합의 극한으로 정의함으로써 얻어지는 결론이므로 이를 중학교 교육과정에서 다루는 것은 적절치 않음을 지적하였다. 우정호(1998)에 의하면 유한소수를 9가 순환하는 무한소수로 보는 것은 10진 기수법의 기본 전제를 일관되게 적용한 것이 아니기 때문에 여러 갈등 현상을 낳을 수 있다. 이강섭・엄규연(2007; 김홍기, 2004)은 8단계 수학 교과서마다 유한소수, 무한소수, 순환소수 등에 대한 정의를 각기 다르게 정의함으로써 학습자들이 혼란을 겪고 있다고 지적하였다. 이강섭・엄규연은 유한소수를 '0이 순환하는 소수'로 정의할 것을 제안하였으며, 이를 바탕으로 '모든 유리수는 순환소수로 나타낼 수 있으며, 모든

1) 광주광역시교육정보원 (bomi0210@hanmail.net)

순환소수는 유리수로 나타낼 수 있다'는 관계를 적절히 지도할 수 있다고 주장하였다.

Klein(1924)에 의하면 무리수에 대한 기본 아이디어는 실제 나눗셈을 통해 분수를 소수로 나타내는 과정에서 순환소수를 인식함으로써 비순환소수의 존재를 고려하게 되면서 생겨났다(우정호・변희현, 2005, p. 289에서 재인용). Moreno-Armella & Waldeg(2000)는 1585년 최초로 소수를 정의한 Stevin에게 있어 수 체계의 확장 과정에서 가장 중요한 단계는 수에 대한 산술적인 조작 과정이었음을 지적하였다. 이들 선행연구에 따르면 유리수를 소수와 관련하여 재해석하는 과정에서 주어진 분수를 실제 나누어 보는 산술적 조작 활동은 주요한 교수학적 전략이 된다. 이 연구에서는 이러한 교수학적 전략에 비추어 정수와 유한소수를 9 또는 0이 순환하는 소수로 접근하는 방안의 적절성에 대해서 살펴보고자 한다. 또한 무리수를 무한소수로 도입하는데 유리수를 순환소수와 동치인 개념으로 귀결시키는 것이 필수적인가에 대해서도 음미해 본다. 나아가 무리수 도입을 위한 대안적인 방안에 대해서도 간접적으로 알아본다.

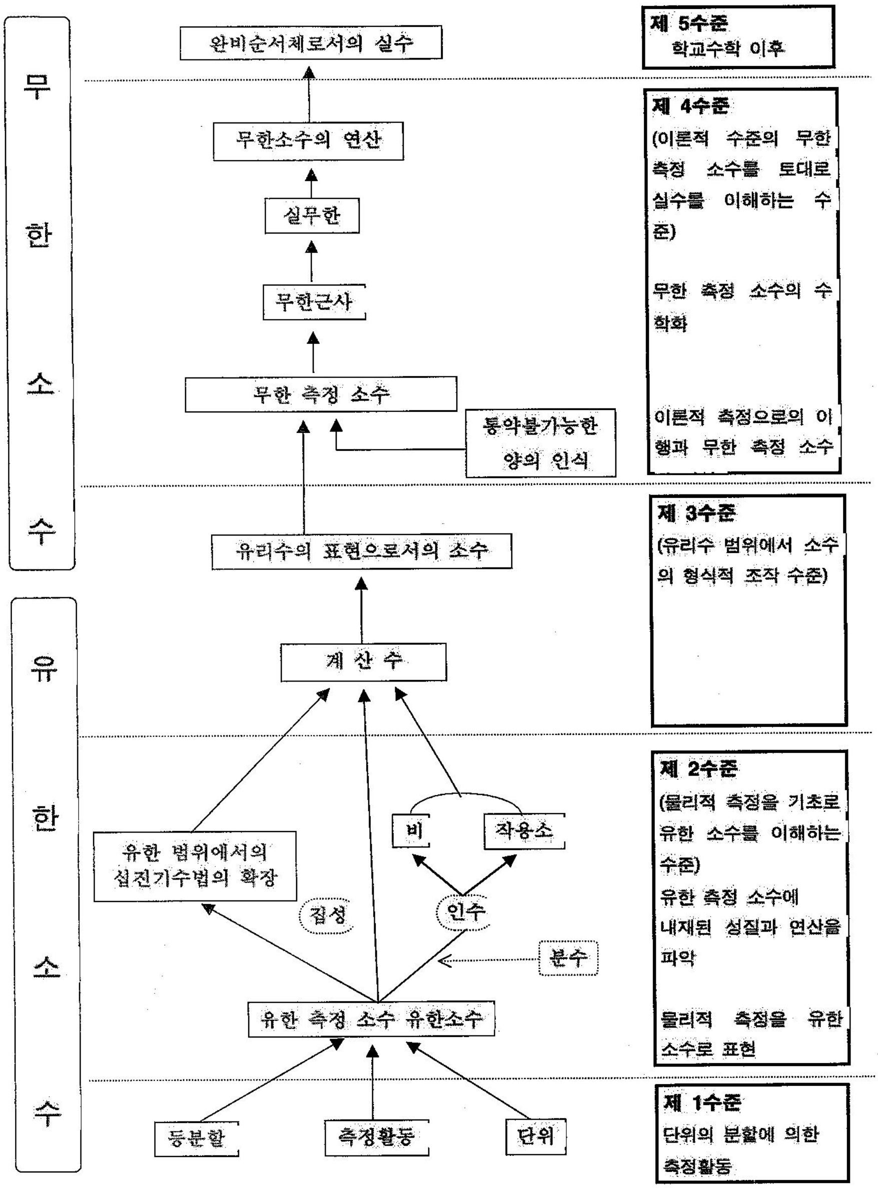
Ⅱ. 이론적 배경

우정호・변희현(2005)은 소수 개념의 수학적, 역사적, 심리학적 분석 결과를 재조직하고 소수에 내재된 질서 및 연산이 드러나는 과정에 초점을 맞추어 소수 개념의 발달 수준을 규명한 다음 그 위계적 관계 구조를 [그림 Ⅱ-1]과 같이 도식화하였다.

제 1, 2수준을 통해 물리적이고 경험적인 수준에서 단위의 세분에 의한 측정 활동이 유한소수로 정리된다. 이러한 맥락에서 유한소수에 내재된 성질과 본질적인 연산들이 점차 드러나고 알고리즘화의 과정을 거쳐 형식화된다. 또한 제 3, 4수준을 거쳐 물리적인 측정에서 관념적인 측정으로 인식이 이행됨에 따라 수체계가 유한소수에서 무한소수, 유리수에서 실수로 확장 발전된다. 우정호・변희현에 의하면 제 4수준의 관념적인 측정으로 학생들의 인식이 이행되기 위해서는 제 3수준에서 산술적인 조작의 결과로 파악한 무한소수를 측정의 관점에서 재해석하는 것이 매우 중요하다. 즉, 제 4수준의 측정수로서의 순환하지 않는 무한소수의 존재를 이해하기 위해서는 제 3수준에서 나눗셈 알고리즘의 산물로서 무한순환소수를 인식하는 것이 필수적이다. 이로부터 학생들은 이론적인 수준에서 모든 크기의 측정을 다루는 무한소수에 기초하여 실수를 이해할 수 있다.

이상에 따르면 실수를 소수의 본질로 이해하도록 한다는 측면에서 무리수를 순환하지 않는 무한소수로 도입하기 위해서는 실제 나눗셈에 의하여 분수를 소수로 나타내보는 경험이 중요하다. 이러한 산술적 조작을 통해 학생들은 순환소수를 인식하게 되고 이로부터 비순환소수를 자연스럽게 고려할 수 있게 될 것이기 때문이다. 제 7차 교육과정에서 '실제 나누어 보는 산술적인 조작 활동'을 통해 유리수를 소수로 나타내도록 하는 교수학적 접근 방식은 이러한 관점의 연장선에 있다고 볼 수 있다.

> m, n가 정수이고 $m \neq 0$일 때, 분수 $\frac{n}{m}$를 유리수라고 정의하였음을 확인시키고, $\frac{n}{m} = n \div m$라는 사실을 통하여 모든 유리수는 분자를 분모로 나눔으로써 소수로 나타낼 수 있음을 이해하게 한다(교육부, 1999, p. 45).



[그림 Ⅱ-1] 소수 개념 발달의 위계 구조
(우정호·변희현, 2005, p. 296)

제 7차 교육과정의 9단계에서는 실수계로의 수 체계 확장을 위해 '무한소수'를 소재로 무리수를 정의하도록 한다. 이를 위해 8단계에서는 유리수를 소수로 표현함으로써 유리수 개념을 깊게 하고 실수로의 확장 가능성을 탐색한다. 이와 관련하여 실제 교육과정상에서는 유리수와 소수의 관계를 음미할 때 분수의 분자를 분모로 '실제 나누어 볼' 것을 여러 문장에 걸쳐 지속적으로 강조하고 있다.

> 주어진 **분수의 분자를 분모로 나누어 보면** 정수이거나 소수점이하에 0이 아닌 숫자가 유한개만 나타나는 경우와 그렇지 않은 경우가 있다. **실제 계산을 통하여** 이러한 경우를 확인하고 유한소수와 무한소수의 뜻을 이해하게 한다. **주어진 분수를 소수로 고쳤을 때** 무한소수가 되는 경우에는 일정한 숫자가 반복해서 한없이 나타남을 통하여 순환소수의 뜻을 알게 한다. **유리수를 소수로 고쳤을 때** 무한소수인 경우에는 그 무한소수는 항상 순환소수임을 알게 한다(교육부, 1999, pp. 45-46).

이는 제 7차 교육과정이 유리수를 소수로 표현함에 있어 나눗셈 알고리즘을 통한 산술적 조작 과정을 주요한 교수학적 전략으로 간주함을 보여준다. 위와 같은 기술에 따르면 제 7차 교육과정 내에서 유한소수, 무한소수, 순환소수는 <표 Ⅱ-1>과 같이 정의되는 것으로 볼 수 있다.

<표 Ⅱ-1> 제 7차 교육과정에서 유한소수, 무한소수, 순환소수의 정의

개념	정 의
유한소수	소수점 이하에 0이 아닌 숫자가 유한개만 나타나는 소수
무한소수	유한소수가 아닌 소수
순환소수	무한소수 중에서 일정한 숫자가 반복해서 한없이 나타나는 소수

주어진 분수의 분자를 분모로 실제 나누어 보는 맥락을 통해 유리수인 $\frac{4}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$은 각각 다음과 같이 소수로 표현될 것이므로 제 7차 교육과정의 접근 방식에 따르면 유리수는 정수이거나 유한소수이거나 순환소수가 된다.

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & 4 \\ & 4 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 0.5 \\ \hline 2 & 10 \\ & 10 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 0.333\cdots \\ \hline 3 & 10 \\ & 9 \\ \hline & 10 \\ & 9 \\ \hline & 10 \\ & 9 \\ \hline & \vdots \end{array}$$

○ …유리수는 정수나 유한소수 또는 무한소수로 나타낼 수 있으며, 이 때 무한소수는 모두 순환소수임을 알게 한다(교육부, 1999, p. 45).
○ 정수나 유한소수는 유리수임을 알게 한다.
○ 순환소수는 유리수임을 알게 한다(교육부, 1999, p. 46).

이는 이강섭・엄규연(2007, p. 3)이 제 7차 교육과정에 내포된 유리수와 순환소수의 관계를 '유리수=순환소수'로 유추한 것과는 다소 다른 분석 결과이다. 교육과정의 학습지도상의 유의점에 '유한소수를 순환소수로 나타내는 것을 강조하지 않는다'는 내용에 비추어 보더라도 현행 교육과정에서는 유리수를 정수이거나 유한소수이거나 순환소수로 각기 분리해서 다루고자 하는 교수학적 의도가 있다고 볼 수 있다.

학문적 지식으로서 수 체계 확장의 맥락에서 볼 때, 정수와 유한소수는 모두 순환소수가 되므로 '유리수=순환소수', '무리수=비순환소수'의 대응관계로 파악하는 것이 '실수=무한소수'를 다루는 과정을 보다 간결하고 명확하게 설명해준다는 측면에서 '유리수를 정수 또는 유한소수 또는 순환소수'로 보는 관점에 비해 의미있는 해석이라고 볼 수 있다. 그러나 가르칠 지식으로서 수 체계의 확장이라는 측면에서 소수 개념 발달의 위계 구조를 고려해 볼 때 주어진 분수의 분모로 분자를 '실제 나누어 보는' 활동은 소수 개념의 이해에 주요한 역할을 한다. 물리적인 수준에서 측정 활동을 통해 다루었던 소수를 나눗셈 알고리즘을 통한 산술적인 조작 활동을 통해 유리수에 비추어 음미해보는 과정이 이후 무리수를 비순환소수로 접근하기 위한 준비단계로서 보다 타당하다고 볼 수 있다.

Ⅲ. 유한소수를 9또는 0이 순환하는 소수로 보는 관점

학문적 지식으로서 실수는 무한소수이다(우정호, 1998, p. 221). 교과서에서 따라서는 이러한 실수의 성질을 반영하여 '유리수=순환소수', '무리수=비순환소수'로 관계를 설정한 다음 정수 또는 유한소수를 9가 순환하는 무한소수로 다루는 경우가 있다.

$3=2.999\cdots$, $1.5=1.4999\cdots$ 이므로 0이 아닌 정수와 유한소수도 순환소수로 나타낼 수 있다(조태근 외, 2001, p. 19).

그러나 실제로 나누는 활동에서 $1=\frac{9}{9}=9\div 9$ 을 다음과 같이 계산하는 학생은 거의 없을 것이므로 구체적인 계산 과정을 통해 유리수를 소수와 관련시켜 그 성질을 파악하는 수준에 있는 중학생들이 $1=0.999\cdots$ 을 이해하는 데는 다소 무리가 있다.

$$\begin{array}{r|l} & 0.999\cdots \\ \cline{2-2} 9 & 90 \\ & 81 \\ \hline & 90 \\ & 81 \\ \hline & \ 90 \\ & \ 81 \\ \hline & \ \ \vdots \end{array}$$

또한, $3 = 2.999\cdots$, $1.5 = 1.4999\cdots$ 와 같은 서술에 의하면 유한소수는 순환소수(무한소수)에 포함된다. 즉 유한소수는 수학적인 어떤 조치에 의하여 무한소수가 된다. 이러한 맥락에서 실수를 분류하는 다음 교과서의 도식은 '유리수'와 '무리수'가 서로 소인 개념이고, '정수'와 '정수가 아닌 유리수'가 서로 소인 개념이기 때문에 기호 ' { '이 서로소인 개념을 분류하는 것을 의미하는 것으로 이해될 수 있다.

$$\text{실수}\begin{cases}\text{유리수}\begin{cases}\text{정수}\\ \text{정수가 아닌 유리수}\begin{cases}\text{유한소수}\\ \text{순환소수}\end{cases}\end{cases}\\ \text{무리수}\cdots\text{순환하지 않는 무한소수}\end{cases}$$

(박두일 외, 2001, p. 9, p. 11)

따라서 학생들은 위와 같은 도식에 의해 정수인 3 과 순환소수인 $2.999\cdots$ 를 그 출발에서부터 같아질 수 없는 개념으로 받아들일 수 있다. 교과서에 수록된 다음과 같은 연습문제 또한 이러한 오해의 소지를 더욱 가중시키는 것 같다.

> 1. 다음 분수를 소수로 나타내어라. 이 중에서 유한소수는 어느 것인가? 또, 순환소수는 그 순환마디를 구하여라.
>
> (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{7}{12}$ (3) $-\frac{5}{18}$ (4) $1\frac{13}{30}$ (조태근 외, 2001, p. 20)

위 문제에서 $\frac{1}{4} = 0.25$ 은 유한소수이지만 모든 유한소수는 9가 순환하는 순환소수임을 학습하였으므로(조태근 외, 2001, p. 19), $0.25 = 0.24999\cdots$ 가 되어 순환마디가 9인 순환소수라고 말할 수 있음에도 불구하고 $\frac{1}{4} = 0.25$ 에 대해서는 유한소수만을 그 정답으로 처리하고 있다. 이런 예는 필요에 따라 $0.25 = 0.24999\cdots$ 일 수는 있지만 일반적으로는 0.25 와 $0.24999\cdots$ 은 같지 않은 것으로 0.25 와 $0.24999\cdots$ 의 관계를 오해하게 할 소지를 갖고 있다.

이처럼 현행 교과서 중에는 정수나 유한소수를 9가 순환하는 무한소수로 다룸으로써 '유리수=순환소수'의 의미로 접근하였지만 동시에 유한소수는 순환소수(무한소수)가 아닌 것으로 해석할 수 있는 가능성 또한 포함한 것이 있다. 일상적 언어 표현에서 유한과 무한이 서

로소인 개념으로 '유한이 아닌 것'을 '무한'이라고 하는 점을 감안할 때, 직관적인 맥락에서 실수를 분류하는 8단계 교육과정에서 '유한'소수를 '무한'소수의 일종으로 다루는 것에 대한 교수학적 타당성에 대한 논의가 필요하다.

중학교 교육과정에서 '유리수=순환소수', '무리수=비순환소수'의 관계를 좀 더 간결하고 명확하게 지도하기 위하여 정수나 유한소수를 0이 순환하는 소수로 접근하고자 하는 시도가 있다(김흥기, 2004; 우정호・변희현, 2005; 우정호, 1998; 이강섭・엄규연, 2007; 조한혁・최영기, 1999). 학생들의 입장에서는 $3=2.999\cdots$, $1.5=1.4999\cdots$ 보다는 $3=3.000\cdots$, $1.5=1.5000\cdots$ 을 이해하는 것이 쉬울 것이기 때문이다.

이강섭・엄규연(2007)에 의하면 정수나 유한소수를 0이 순환하는 무한소수로 접근하기 위해서는 우선 순환소수가 제 7차 교육과정에서와는 다르게 정의되어야 한다. 현재 교육과정에서는 유한소수가 아닌 소수가 무한소수이며, 순환소수는 무한소수 중에서 소수점 아래에 0이 아닌 일정한 숫자의 배열이 한없이 되풀이되는 소수이다. 따라서 현재 교육과정 체제에서는 소수점 아래에 0이 순환하는 경우는 순환소수라고 말할 수 없다. 즉, $0.5=0.5000\cdots$ 으로 표현한다고 해도 $0.5000\cdots$ 이 무한소수가 아니므로 이를 순환소수로 보기 어렵다. 이처럼 정수와 유한소수를 0이 순환하는 순환소수로 접근하기 위해서는 순환소수에 대한 정의가 새롭게 내려져야 하며, 필요하다면 유한소수와 무한소수도 지금과는 다르게 정의되어져야 한다. 이런 과정에 대해 다음과 같은 두 가지 접근이 가능하다.

우선 현재 유한소수와 무한소수의 정의에서 '0이 아닌 숫자'라는 조건을 삭제하는 방법이 있을 수 있다. 즉, 유한소수와 무한소수를 각각 '소수점 아래에 0이 아닌 숫자가 유한개인 소수'와 '소수점 아래에 0이 아닌 숫자가 끝없이 계속되는 소수'로 정의하지 않고 그냥 '소수점 아래에 숫자가 유한개인 소수'와 '소수점 아래에 숫자가 끝없이 계속되는 소수'로 정의하는 것이다. 그러면 $\frac{1}{2}=1\div 2=0.5$ 이므로 이는 유한소수이지만 0.5 에서 '5'의 뒷자리에 '0'을 덧붙여서 $0.5=0.5000\cdots$ 으로 표현할 수 있으므로 무한소수도 된다. 이는 또 소수점 아래에 일정한 숫자 0이 되풀이되므로 순환소수이기도 하다. 이렇게 모든 정수와 유한소수는 그 마지막 자리에 '0'을 계속 덧붙여서 0이 순환하는 순환소수로 볼 수 있게 된다.

그러나 현재 교육과정에서 유한소수가 아닌 소수를 무한소수로 보고 있듯이 일반적으로 유한과 무한은 서로소인 개념이다. 하지만 $0.5000\cdots$ 처럼 소수점 아래에 0이 무한히 계속되는 경우를 무한소수로 보는 체계에서 유한소수는 0이 순환하는 무한소수이므로 유한소수는 모두 무한소수에 포함된다. 이는 유한과 무한에 대한 학생들의 일반적인 이해 수준과 다소 상충될 수도 있다.

유리수를 순환소수와 관련시키기 위해서 유한소수와 무한소수로부터 접근하는 위와 같은 방식이 유한과 무한에 대한 복잡한 논의를 포함할 수 있으므로 유한소수와 무한소수에 대한 언급 없이 곧바로 순환소수를 정의하는 두 번째 접근 방법도 있을 수 있다. 분수로 표현된 유리수의 분자를 분모로 나누는 실제 계산을 통하여 이들을 소수로 표현해 본 후 $\frac{1}{3}=0.333\cdots$ 나 $\frac{14}{33}=0.4242\cdots$ 처럼 소수점 아래에 일정한 숫자가 반복되는 소수를 순환소수로 정의한다. 이 과정에서 소수 중에는 순환하지 않는 소수가 존재함을 π 를 예로 들어 간단하게 설명할 수도 있다. 순환소수에 대한 이와 같은 정의에 의해 $\frac{1}{2}=0.5$ 는 '5'뒤에 마

찬가지로 '0'을 덧붙여 $\frac{1}{2}=0.5=0.5000\cdots$ 과 같이 쓸 수 있으므로 유리수는 모두 순환소수가 됨을 설명할 수 있다. 그러나 이러한 접근 방법에 따르면 유한소수, 무한소수라는 용어 자체를 정의하지 않기 때문에 분수가 유한소수로 표현되기 위해서는 분모가 2와 5만을 소인수로 가져야 한다는 등의 현재 교육과정상의 내용을 다루는데 어려운 점이 있다. 유한소수를 $\frac{1}{2}=0.5=0.5000\cdots$ 처럼 소수점 아래의 적당한 부분에서 0이 순환하도록 표현할 수 있는 소수로 정의하면 큰 무리없이 분수와 유한소수의 관계를 다룰 수는 있겠지만 여전히 무한소수를 정의하는 방법이 명확하지 않다는 한계가 있다.

유한소수와 무한소수의 정의를 적절히 변형하여 정수와 유한소수를 소수점 아래 0이 순환하는 순환소수로 파악하는 것은 $1=1.000\cdots$ 이 $1=0.999\cdots$ 보다는 학생들의 이해에 좀 더 쉽게 다가설 수도 있다는 점에서 '유리수=순환소수'라고 해석하는데 분명 좋은 대안일 수 있다. 그러나 이러한 과정에서도 유리수와 소수의 관계를 파악하기 위해서는 먼저 분수 $\frac{n}{m}$ $(m\neq 0)$ 꼴로 표현된 유리수를 실제로 나누어 보는 활동이 필요하다. 유한소수를 0이 순환하는 소수로 다루는 과정에서 실제 나눗셈을 통해 어떤 학생도 $\frac{1}{2}=1\div 2$ 을 다음과 같이 계산하지는 않을 것이므로, 학생들이 교사의 도움 없이 $\frac{1}{2}=0.5$ 에서 '5'의 뒷자리에 '0'을 보는 것은 쉽지 않다.

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{1}{r}{} & 0.500\ \cdots \\ \cline{2-2}
2 & 10 \\
\multicolumn{1}{r}{} & 10 \\ \cline{2-2}
\multicolumn{1}{r}{} & \ 0 \\
\multicolumn{1}{r}{} & \ 0 \\ \cline{2-2}
\multicolumn{1}{r}{} & \quad 0 \\
\multicolumn{1}{r}{} & \quad 0 \\ \cline{2-2}
\multicolumn{1}{r}{} & \quad \vdots
\end{array}
$$

따라서 교사의 지도에 의해 $\frac{1}{2}=0.5=0.5000\cdots$ 으로 표현하여 이를 순환소수로 본다는 것을 학생이 알게 된다고 하더라도 이 역시 $1=0.999\cdots$ 처럼 학생의 입장에서는 뭔가 불편하고 억지스러운 접근 방법으로 느껴질 수 있다. 무한소수가 실수를 나타낸다고 볼 때, 흔히 유한소수라고 불리는 유리수는 0이 순환하는 무한소수로 다루기 때문에(우정호, 1998. p. 221), $\frac{1}{2}=0.5=0.5000\cdots$ 와 같은 표현은 지극히 자연스러운 형태이나 분수로 표현된 유리수의 분자를 분모로 실제 나누어 유리수를 소수와 관련시키는 중학교 교육과정 내에서는 여전히 자연스럽지가 않다.

Ⅳ. 유리수를 정수, 유한소수, 순환소수로 보는 관점

제 7차 교육과정의 수와 식 영역에서 수 체계를 실수계로 확장함에 있어 우선 7단계에서는 정수 및 유리수의 개념과 그 사칙연산을 다룬다. 8단계에서는 유리수를 소수로 표현함으로써 유리수 개념을 깊이하고 실수로의 확장 가능성을 탐색한다. 이로부터 9단계에서는 유리수가 아닌 수가 존재함을 알고 이를 바탕으로 실수의 집합을 유리수와 무리수의 합집합으로 정의한다.[2)]

8단계에서는 정수 m, $n(m\neq 0)$에 대하여 분수 $\frac{n}{m}$ 꼴로 표현된 유리수의 분자를 분모로 직접 나누는 실제 계산을 통하여 유리수를 소수로 표현한다(교육부, 1999, p. 45). 교육부(1999, p. 45-46)는 실제 나눗셈을 통한 산술적 조작 활동을 지속적으로 강조하면서 이러한 활동을 통해 유한소수, 무한소수, 순환소수의 정의를 직관적으로 이해하도록 하고 있다.

이상에서 보듯이 유리수를 소수로 표현해보는 8단계 과정은 9단계에서 순환하지 않는 무한소수로 무리수를 도입하기 위한 준비단계로서의 성격이 강하다. 이를 위한 지도 방법으로는 나눗셈 알고리즘을 통한 실제적인 계산과 직관적인 이해가 강조된다. 이 과정에서 유리수는 정수, 유한소수, 순환소수로 다루어지고 있으며, 정수나 유한소수를 순환소수로 표현할 수 있기는 하나 이를 강조하지 않도록 하고 있다(교육부, 1999, p. 46). 9단계에서는 수체계를 실수계로 확장하기 위하여 무리수를 도입할 때, 무한소수를 그 소재로 다루도록 하고 있다. 이 때, 무한소수 중 순환소수가 아닌 것이 있음을 직관적으로 보여줌으로써 유리수가 아닌 수가 존재함을 알게 하고 이러한 수를 무리수로 정의한 후 이로부터 수 체계를 실수로 확장한다.

종합해 보면, 제 7차 중학교 교육과정 상에서는 실수계로 수 체계를 확장함에 있어 무리수를 순환하지 않는 무한소수로 도입하도록 하고 있기는 하지만 유리수와 순환소수를 동치의 개념으로는 다루고 있지 않은 것으로 볼 수 있다. 다만 유리수를 소수로 표현하였을 때 그 결과가 무한소수이면 항상 순환소수가 됨을 알도록 지도할 것을 강조하는 것으로 파악할 수 있다. 즉, 무리수를 순환하지 않는 무한소수로 정의하기 위해 무리수와 서로소인 유리수를 순환소수와 동치인 개념으로 귀결시키는 것이 필연적인 과정은 아닐 수 있다. 따라서 정수와 유한소수를 순환소수로 표현하기 위해 $1=0.999\cdots$, $0.5=0.499\cdots$ 처럼 9가 순환하는 무한소수나 $1=1.000\cdots$, $0.5=0.5000\cdots$ 처럼 0이 순환하는 무한소수를 중학교 교육과정에 도입하는 것에 대해 보다 심도 깊은 논의가 필요해 보인다.

이와 같은 맥락에 따르면 8단계에서는 정수 m, $n(m\neq 0)$에 대하여 분수 $\frac{n}{m}$로 표현된 유리수의 분자를 분모로 나누는 구체적 활동에 의해 유리수는 정수나 유한소수, 무한소수일 경우는 순환소수로 표현될 수 있음을 확인하면 충분할 듯하다. 그런 다음 9단계에서는 정수도 유한소수도 순환소수도 아닌 순환하지 않는 무한소수가 존재함을 예를 통하여 직관적으로 알게 하여 이로부터 무리수를 도입할 수 있다. 이러한 일련의 과정에서 유리수를 순환소수와 동치의 개념으로 해석하지는 않았지만 유리수의 집합과 무리수의 집합이 서로소임을 지도하는 데는 별 무리가 없어 보인다. 이 전개 방식에 따르면 9단계에서는 다음과 같은 도식이 제시될 수 있다.

---

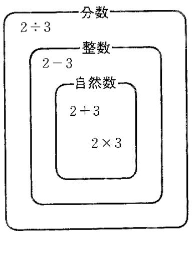
2) 교육부, 1999, pp. 85-92

실수 ┌ 유리수 ┌ 정수
     │   └ 정수가 아닌 유리수 … 유한소수이거나 순환소수
     └ 무리수 …………………………… 순환하지 않는 무한소수

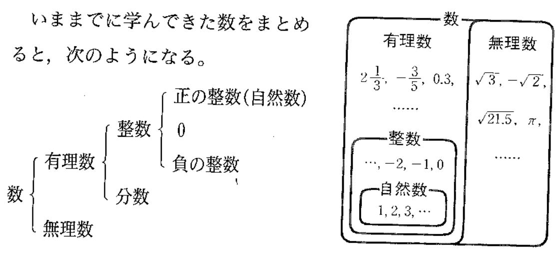
Ⅴ. 무리수를 분수로 표현될 수 없는 수로 도입하는 관점

실수계로 수 체계를 확장하는 과정에서 무리수를 도입하기 위해서는 이미 정의된 유리수가 아닌 수의 존재성을 설명해야 한다. 따라서 무리수를 순환하지 않는 무한소수로 도입하는 데는 유리수를 소수와 관련지어 재해석하는 단계가 필요하다. 하지만 유리수와 무리수가 서로 소인 개념이고 이미 유리수를 정수 m, n(단, $m \neq 0$)에 대하여 분수 $\frac{n}{m}$ 으로 나타낼 수 있는 수로 7단계에서 정의한 바 있으므로 무리수를 분수 $\frac{n}{m}$ 으로 나타낼 수 없는 수로 도입하는 방법도 있을 수 있다. 이러한 접근 방식은 $\sqrt{2}$ 가 무리수임을 증명할 때, 분수로 나타낼 수 없음을 보여주는 과정에서 구체적으로 드러나기도 한다. 이에 따르면 유리수를 소수로 표현해보는 수고로운 과정이 필요하지 않으며 중학교 교육과정에서 $1 = 0.999\cdots$ 나 $1 = 1.000\cdots$ 을 알아야 할 필요도 없게 된다. 또한 수(실수)를 소수와 관련시키는 과정에서 포함될 수 있는 무한에 대한 복잡하고 어려운 논의도 피할 수 있다.

실제로 일본 교과서는 중학교 3학년에서 무리수를 '$\sqrt{2}$ 와 같이 분수로 나타낼 수 없는 수'로, 유리수를 '분수로 나타낼 수 있는 수'로 정의한다[3]. 중학교 2학년에서는 수 체계를 다루는 단원이 없으며, 중학교 1학년에서는 [그림 Ⅴ-1]을 통해 수를 자연수, 정수, 분수로 분류한다. 중학교 3학년에서 무리수와 유리수를 앞서 설명한 방식에 따라 정의한 다음에는 수 체계를 [그림 Ⅴ-2]와 같이 재정리한다.



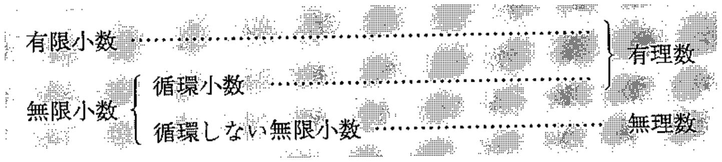
[그림 Ⅴ-1] 중학교 1학년 수 체계
(藤田 外, 1999a, p. 40)



[그림 Ⅴ-2] 중학교 3학년 수 체계
(藤田 外, 1999c, p. 35)

3) Key Curriculum Press에서 출판된 Precalculus역시 무리수를 '분수로 나타낼 수 없는 수'로 정의한다(Foerster, 2003, p. 660). 박경미 외(2002, p. 320, p. 323)는 Key Curriculum Press에서 출판된 교과서가 미국 NCTM 규준집의 아이디어를 구현하고자 한 Core-Plus, UCSMP, IMP, STEM 등 최근 이루어진 대형 프로젝트 결과 출시된 교과서들과 그 맥을 함께 하며 이와 같은 유형의 교과서들이 점차 미국 교과서들의 주류를 이루는 추세라고 하였다.

중학교 3학년 일본 교과서는 '무리수'를 '순환하지 않는 무한소수'로 도입하지 않고 이를 무리수의 성질로 간주한다. 이러한 맥락에서 단원의 말미에는 무리수를 소수로 표현하면 순환하지 않는 무한소수가 됨을 별도의 페이지로 설명한다. 소수를 소재로 무리수를 정의하기 위해 별도의 단원을 두어 유리수를 소수와 관련시켜보는 우리 교육과정과 달리 일본 교육과정에서는 유리수가 아닌 무리수를 '분수로 나타낼 수 없는 수'로 정의한 다음 소수와 관련된 내용은 유리수와 무리수가 지닌 성질로서 간단하게 다루고 있다.



[그림 V-3] 유리수, 무리수와 소수의 관계(藤田 外, 1999c, p. 48)

2007년 개정된 수학과 교육과정에서는 제 7차 교육과정에서와 마찬가지로 중학교 2학년에 '유리수와 순환소수' 단원을 두어 '순환소수의 의미', '유리수와 순환소수의 관계'를 이해하도록 하고 있다(교육인적자원부, 2007, p. 31). 그러나 중학교 3학년의 '제곱근과 실수'단원에서는 '무리수의 개념을 이해한다'는 내용을 명시하였음에도 '교수・학습상의 유의점'에서 이전 교육과정에 기술되어 있던 '무리수를 도입할 때에는 무한소수를 소재로 한다'는 내용이 빠져있다(교육인적자원부, 2007, p. 34). 이는 무리수 도입에 있어 다른 접근 방식의 가능성을 열어 놓은 것으로 볼 수 있다. 그러나 중학교 2학년에 유리수와 순환소수의 관계를 살피는 단원이 제 7차 교육과정과 마찬가지로 존재하는 상황에서 무리수 도입 방식과 관련된 교육과정상의 의도가 무엇인지 분명하지 않다.

한편 일본 교육과정에서와 같이 분수로 표현될 수 없는 수로 무리수를 정의하는 방식은 유리수가 아닌 수인 무리수의 존재를 말해줄 뿐 무리수가 어떤 수인지를 구체적으로 설명해주지 않는다는 한계가 있다.

> $\sqrt{2}$ 가 무리수라는 증명은 피타고라스 학파에 의하여 주어졌는데, 아리스토텔레스에 따르면 그 증명법은 귀류법 즉 간접 증명법이었다 한다. 만약 직각이등변삼각형의 빗변의 다른 변에 대한 비가 유리수라면 같은 수가 짝수이면서 동시에 홀수이어야 하는데 그것은 물론 있을 수 없는 일이라는 식의 증명이었다. …피타고라스 학파의 증명은 $\sqrt{2}$ 가 정수의 비가 아니라는 것은 알려주지만, 무리수가 무엇인가를 알려주지는 못하는 것이었다 (Kline, 2007, p. 126).

이상에 따르면 $\sqrt{2}$ 와 같은 제곱근을 이용하여 분수로 표현될 수 없는 수가 존재한다는 것을 설명할 수는 있겠지만 그것이 어떤 수인지 그 실체를 분명하게 보여줄 수가 없다. 이는 유리수와 무리수를 먼저 정의한 후, 이 두 집합의 합집합으로 실수를 정의하여 수 체계를 구성적 방법으로 확장하는 현재 교육과정의 전개 방식과는 다소 차이가 있다. 물론 한 변이 1인 정사각형의 대각선을 이용하여 그 길이에 대응하는 수직선 위의 수가 있다는 것을 설명함으로써 무리수인 $\sqrt{2}$ 의 존재성을 직관적으로 인식하도록 할 수는 있다. 하지만 기하

에 의존하여 1과 $\sqrt{2}$ 를 길이, 즉 선분으로 취급할 때 1과 $\sqrt{2}$ 의 차이는 그 특징이 사라지게 되며, 여전히 무리수가 어떤 수인지를 밝히는데 한계가 있다.

한편 이러한 전개에서는 $\sqrt{2}$ 나 $\sqrt{3}$ 과 같은 제곱근으로 무리수의 범위가 한정될 가능성도 있는데, 이러한 약점을 피하기 위해서 $0.10100100010\cdots$, π 등도 무리수임을 설명하여야 한다. 즉, 분수로 표현될 수 없는 수로 무리수가 정의되었다고 하더라도 순환하지 않는 무한소수로 표현된 어떤 수가 무리수임을 보이는 과정이 필요하게 된다. 이를 위해서 우선 모든 유리수가 정수나 유한소수, 순환소수로 표현됨을 밝힌 다음 $0.10100100010\cdots$ 과 같은 순환하지 않는 무한소수가 분수로 표현된다고 가정하면 이는 유리수가 되는데, 모든 유리수는 정수나 유한소수, 순환소수로 표현되므로 모순임을 보이는 것이다. 이와 같은 일련의 과정은 무리수를 분수로 표현될 수 없는 수로 도입한다고 하더라도 유리수를 정수, 유한소수, 순환소수와 관련짓는 단계가 여전히 필요함을 보여준다. $\sqrt{2}$ 나 $\sqrt{3}$ 과 같은 제곱근이외의 무리수가 존재함을 설명하기 위해서는 순환하지 않는 무한소수로 무리수를 도입하기 위해서 요구되는 대부분의 단계가 고스란히 필요하다고 볼 수 있다.

Ⅵ. 결론

제 7차 중학교 교육과정에서는 실수계로 수 체계를 확장하는 과정에서 무리수를 순환하지 않는 무한소수로 도입하기 위해 8단계에서 유리수를 소수와 관련하여 재해석한다. 유리수와 소수의 관계를 살피는 과정에서 정수나 유한소수를 9가 순환하는 소수로 다루는 방식, 0이 순환하는 소수로 다루는 방식 등이 존재할 수 있다. 이 연구에서는 중학교 교육과정에서 유리수를 소수로 표현할 때, 실제 나눗셈 알고리즘을 통한 산술적 조작 방식이 주요한 교수 전략임에 비추어 이러한 접근 방식의 적절성에 대하여 살펴보았다. 또한 무리수를 순환하지 않는 무한소수로 도입하기 위해 유리수를 순환소수와 동치인 개념으로 다루는 것이 필연적인 접근 방식인지를 반성해 보았다. 이로부터 유리수를 정수, 유한소수, 순환소수로 해석한 다음 무리수는 순환하지 않는 무한소수로 다루는 방식이 있음을 확인하였다. 또한 '무리수'를 소수와 관련하여 '무한소수'로 정의하지 않고 '분수로 나타낼 수 없는 수'로 도입하는 맥락과 관련된 몇 가지 시사점을 기술하였다.

참고문헌

교육부 (1999). 중학교 교육과정 해설(Ⅲ) - 수학, 과학, 기술・가정-. 서울 : 대한교과서주식회사.

교육인적자원부 (2007). 수학과 교육과정. 서울 : 대한교과서주식회사.

김흥기 (2004). 중학교에서 순환소수 취급과 무리수 도입에 관한 고찰. 수학교육학연구, 14(1), 1-17.

박두일 외 (2001). 중학교 수학 8-가. 서울 : 교학사.

박경미・임재훈 (2002). 한국, 일본과 미국, 영국의 수학 교과서 비교. 학교수학, 4(2), 317-331.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울 : 서울대학교 출판부.

우정호・변희현 (2005). 소수 개념의 교수학적 분석. 대한수학교육학회지 수학교육학연구,

15(3), 287-313.
이강섭 · 엄규연 (2007). 순환소수 지도에서의 문제점과 해결방안. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 9(1), 1-12.
조한혁 · 최영기 (1999). 정적 동적 관점에서 순환소수. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 1(2), 605-615.
조태근 외 (2001). 중학교 수학 8-가. 서울 : 금성출판사.
藤田 外 (1999a). 中學校 數學 1. 東京: 東京書籍.
藤田 外 (1999b). 中學校 數學 2. 東京: 東京書籍.
藤田 外 (1999c). 中學校 數學 3. 東京: 東京書籍.
Klein, F. (1924). Elementary mathematics from an advanced standpoint. New York: Dover Publications.
Kline, M. (2007). 수학의 확실성. (심재관, 역). 서울 : 사이언스북스.
Moreno-Armella, L. E. & Waldeg, G. C. (2000). An Epistemological history of number and variation. In V. J. Katz (Eds.), Using history to teach mathematics: an international perspective. Washington : Mathematical Association of America.
Foerster, A. P. (2003). Precalculus with Trigonometry. Key Curriculum Press.

On Explaining Rational Numbers for Extending the Number system to Real Numbers

Shin, BoMi[4]

Abstract

According to the 7th curriculum, irrational numbers should be introduced using infinite decimals in 9th grade. To do so, the relation between rational numbers and decimals should be explained in 8th grade. Preceding studies remarked that middle school students could understand the relation between rational numbers and decimals through the division appropriately. From the point of view with the arithmetic handling activity, I analyzed that the integers and terminating decimals was explained as decimals with repeating 0s or 9s. And, I reviewed the equivalent relations between irrational numbers and non-repeating decimals, rational numbers and repeating decimals. Furthermore, I suggested an alternative method of introducing irrational numbers.

Key Words : Rational numbers, Irrational numbers, Repeating decimals

4) Gwangju Educational Research Information Service (bomi0210@hanmail.net)