

고정지점을 갖는 낮은 포물선 아치의 면내 좌굴거동

In-Plane Buckling Behavior of Fixed Shallow Parabolic Arches

문지호* · 윤기용** · 이학은***

Moon, Jiho · Yoon, Ki-Yong · Lee, Hak-Eun

Abstract

This paper investigates the in-plane stability of fixed shallow arches. The shape of the arches is parabolic and the uniformly distributed load is used in the study. The nonlinear governing equilibrium equation of the general arch is adopted to derive the incremental form of the load-displacement relationship and the buckling load of the fixed shallow arches. From the results, it is found that buckling modes (symmetric or asymmetric) of the arches are closely related to the dimensionless rise H , which is the function of slenderness ratio and the rise to span ratio of such arches. Moreover, the threshold of different buckling modes and buckling load for fixed shallow arches are proposed. A series of finite element analysis are conducted and then compared with proposed ones. From the comparative study, the proposed formula provides the good prediction of the buckling load of fixed shallow arches.

Keywords : stability, arches, in-plane buckling modes, snap-through, nonlinear analysis

요 지

본 논문은 고정지점을 갖는 낮은 아치의 면내 안정성에 관하여 연구를 수행하였다. 연구에 사용된 아치의 형상은 포물선 형태이며, 하중은 등분포 하중이다. 일반 아치의 비선형 지배 미분 방정식을 이용하여 고정지점을 갖는 낮은 아치의 증분 형태 하중-변위 관계와 좌굴 하중을 유도하였다. 연구 결과, 아치의 좌굴형상(대칭 혹은 비대칭 좌굴)은 아치의 라이즈비와 세장비의 함수로 이루어진 무차원 라이즈 H 와 밀접한 관계가 있는 것으로 나타났다. 이 밖에 본 연구에서는 고정지점을 갖는 낮은 아치의 좌굴 형상을 구분하는 경계와 좌굴하중을 제안하였다. 이러한 제안식은 일련의 유한요소해석 결과들과 비교하였으며, 본 연구의 제안식은 고정지점을 갖는 낮은 아치의 좌굴 하중을 적절히 예측할 수 있는 것으로 나타났다.

핵심용어 : 안정성, 아치, 면내 좌굴 형상, 뒹좌굴, 비선형 해석

1. 서 론

아치에 면내 하중이 작용하는 경우 아치의 면내 좌굴형상은 그림 1(a) 혹은 (b)와 같이 두가지 형태가 발생할 수 있다. 그림 1(b)와 같은 비대칭 좌굴은 주로 높은 아치에서 발생하며, 이 때 좌굴하중은 좌굴 전·후의 아치 중립축 길이가 변하지 않는다는 비신장 조건(inextensible condition)을 이용한 고전 좌굴이론(classical buckling theory)에 의하여 산정할 수 있다. 그림 1(a)와 같은 대칭 뒹좌굴(symmetric snap-through)의 경우는 주로 낮은 아치에서 발생한다. 이 경우 아치 중립축의 길이가 변화가 발생하며 일정한 임계값에 도달하게 되면, 아치의 곡률이 역전되어 새로운 평형점으로 뒹현상이 발생한다. 여러 연구자들(Pi *et al.*, 2002; Bradford *et al.*, 2002; Moon *et al.*, 2007)에 의하여 뒹좌굴이 발생하는 경우 아치의 하중-변위 관계는 비선형성을 나타내며,

고전 좌굴이론을 이용하여 계산된 좌굴 하중은 아치의 좌굴 하중을 과대평가하는 것으로 보고되었다. 이와 같이 발생하는 좌굴형상에 따라 아치는 다른 거동이 나타내므로 아치의 형상, 경계조건 및 하중에 따라 좌굴형상을 구분하고 이에 따른 좌굴 하중을 산정하는 것은 중요한 연구 주제이다.

초창기 아치의 면내 안정성에 관한 연구는 Timoshenko and Gere(1961), Vlasov(1961), Austin(1971) 및 Simitsev(1976)에 의하여 수행되었으며, 이들은 비신장 이론을 이용하여 깊은 아치의 비대칭 좌굴하중을 산정하였다. 낮은 아치에 관한 연구로는 Timoshenko and Gere(1961), Gjelsvik and Bonder(1962), Schreyer and Masur(1966) 및 Dickie and Broughton(1971)에 의하여 수행되었다. 이들은 원형 혹은 정현형의 형태를 갖는 낮은 아치의 거동을 이론적 접근 방법을 통하여 연구하였다. 이러한 이론적 연구 이외에 Noor and Peters(1981), Calhoun and DaDeppo(1983), Elias

*고려대학교 건축사회환경공학과 박사과정 (E-mail : deadalive@korea.ac.kr)

**정회원 · 교신저자 · 선문대학교 토목공학과 교수 · 공학박사 (E-mail : kyyoon@sunmoon.ac.kr)

***정회원 · 고려대학교 건축사회환경공학과 교수 · 공학박사 (E-mail : helee@korea.ac.kr)

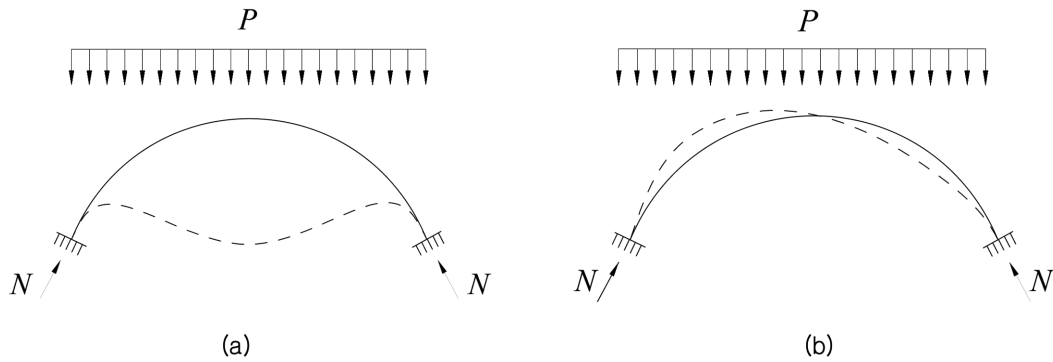


그림 1. 고정지점 아치의 면내 좌굴형상: (a) 대칭 뒤틀좌굴; (b) 비대칭 분기좌굴

and Chen(1988) 및 Wen and Suhendro(1991)는 낮은 아치의 비선형성을 고려하기 위한 비선형 유한요소를 개발하였다. 낮은 아치에 대한 연구는 최근까지 여러 연구자들 (Bradford *et al.*, 2002; Chen and Lin, 2004, 2005, 2006; Moon *et al.*, 2007; Pi *et al.* 2002; Rubin, 2004)에 의하여 수행되고 있다. 이러한 대부분의 연구는 원형 아치에 관한 연구로 토목 구조물로 쓰이는 일반적인 아치 형태인 포물선 형상과는 다르다. 포물선 아치에 등분포하중이 작용하는 경우 그림 1(a)와 (b)와 같이 아치 단면에는 압축력만 작용하게 되며, 이러한 등분포 하중은 아치의 행어를 따라 아치 리브에 작용하는 하중과 유사하다. 포물선 아치에 관한 연구는 Harrison(1982), Kuranishi and Yabuki(1979) 및 Sinke *et al.*(1977)에 의하여 수행되었으나 이들의 연구 결과는 낮은 아치의 비선형 뒤틀좌굴 현상을 고려하지 않은 깊은 아치에 대한 연구에 국한되어 있다. 이밖에 국내에서 아치의 면내 좌굴에 연구는 박광규 외(1986), 김연태 외(1992), 김승덕 외(1998) 및 문지호 외(2006)에 의하여 수행되었다.

본 연구에서는 포물선 형태를 갖는 고정지점 낮은 아치의 면내 거동에 관하여 연구를 수행하였다. 이 후로 특별한 언급이 없는 경우 아치는 포물선 아치를 나타낸다. 먼저 일반적인 아치의 비선형 지배미분 방정식을 사용하여 고정지점을 갖는 낮은 아치의 이산화된 지배 방정식을 유도하였다. 이산화된 지배 방정식을 섭동법(Static perturbation method: Moon *et al.*, 2007)을 이용하여 증분 형태의 하중-변위 관계로 나타내었으며, 이러한 하중-변위 관계를 이용하여 고정지점을 갖는 낮은 아치의 면내 거동을 분석 하였다. 그 결과 아치의 좌굴형상은 아치의 라이즈비와 세장비로 이루어진 무차원 라이즈 H 에 따라 결정되는 것을 밝혔으며, 좌굴 형상을 구분하는 H 값의 경계를 제안하였다. 이 밖에 본 연구에서는 대칭 뒤틀좌굴이 발생하는 경우 좌굴 하중을 제안하였으며, 제안된 좌굴 하중 및 좌굴형상을 구분하는 H 값의 경계는 일련의 유한요소해석을 통하여 검증하였다.

2. 고정 지점을 갖는 낮은 아치의 지배미분 방정식

이번 장에서는 고정지점을 갖는 낮은 아치의 이산화된 지배 방정식을 유도하였다. 먼저 무차원 변수를 도입하여 무차원화된 아치의 비선형 지배 미분 방정식을 얻고, 가정된 고정 지점을 갖는 아치의 변형형상과 Galerkin 방법을 이용하

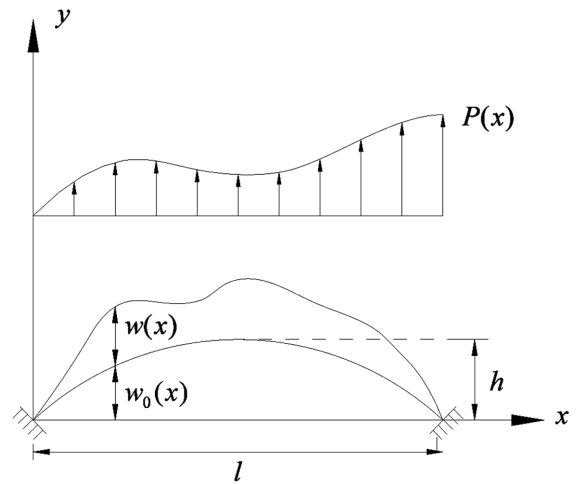


그림 2. 면내 하중이 작용하는 고정지점 아치

여 고정지점을 갖는 낮은 아치의 이산화된 지배 방정식을 얻었다.

그림 2와 같은 면내 하중이 작용하는 일반 아치의 비선형 지배미분 방정식은

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{EA}{2l} \int_0^l \left[\left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + 2 \frac{dw_0 dw}{dx} \right] dx \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - P(x) = 0 \quad (1)$$

과 같이 나타낸다(Gregory and Plaut, 1982; Hsu, 1966; Plaut, 1978). 식 (1)에서 E 는 탄성계수, I 는 단면2차모멘트, A 는 단면적, l 은 아치의 지간, h 는 아치의 라이즈, w_0 는 아치의 초기 형상, w 는 아치의 변형형상, $P(x)$ 는 하중을 나타낸다. 식 (1)을 무차원화 하기 위하여 다음의 변수를 도입하였다.

$$\xi = \frac{\pi}{l} x; \quad \eta_0 = \frac{w_0}{r}; \quad \eta = \frac{w}{r}; \quad q = \frac{P(x)}{EI r} \left(\frac{l}{\pi} \right)^4 \quad (2)$$

식(2)에서 r 은 아치 단면의 회전반경, ξ 는 무차원 수평좌표, η_0 는 무차원화된 아치의 초기 형상, η 는 무차원 변형형상, q 는 무차원 하중을 나타낸다. 식 (2)를 식 (1)에 대입하여 정리하면

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left[\left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 + 2 \frac{d\eta_0 d\eta}{d\xi} \right] d\xi \left(\frac{d^2 \eta_0}{d\xi^2} + \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \right) - q = 0 \quad (3)$$

과 같은 무차원화된 비선형 지배 미분 방정식을 얻을 수 있다.

본 연구의 범위는 수직 등분포 하중이 작용하는 고정 지점 포물선 아치이므로, 식 (3)에서 q 는 상수로 취급된다. 또한 무차원화된 포물선 아치의 형상 η_0 및 고정 지점을 갖는

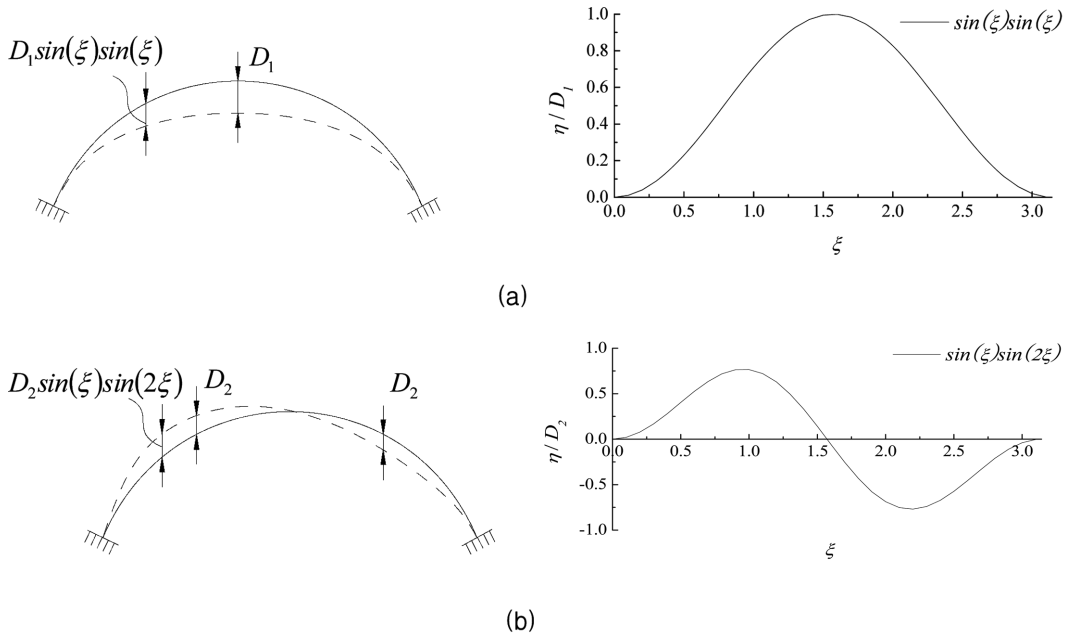


그림 3. 고정 지점을 갖는 아치의 무차원 변형형상 : (a) 대칭좌굴; (b) 비대칭 좌굴

아치의 무차원 변형 형상 η 은

$$\eta_0 = H(\pi\xi - \xi^2); \eta = \sum_{n=1}^2 D_n \sin(\xi) \sin(n\xi) \quad (4)$$

과 같이 나타낼 수 있다. 여기서 $H=4h/\pi^2 r$ 로 무차원 라이즈이다. H 는 포물선 아치의 라이즈비 및 단면의 세장비로 이루어진 함수이며, 아치의 형상을 대표하는 변수이다. 식 (4)에서 D_1 과 D_2 는 각각 대칭 좌굴과 비대칭 좌굴을 나타내는 일반화 좌표(Generalized coordinator)이며, 본 연구에서는 3차 이상의 좌굴형상은 고려하지 않았다. 이러한 이유는 일반적으로 대칭 혹은 비대칭 좌굴이나, 대칭과 비대칭 좌굴이 연동 되어 나타나는 좌굴하중은 3차 이상의 좌굴 하중보다 작기 때문이다. 그림 3은 식 (4)에 나타난 고정 지점을 갖는 아치의 무차원 변형형상 η 를 나타낸다. 그림에서 알 수 있듯이 가정된 아치의 무차원 변형 형상은 양단 고정 지점의 경계 조건 $\eta(0)=\eta(l)=0$ 과 $\eta'(0)=\eta'(l)$ 을 만족시키는 것을 알 수 있다.

식 (4)를 식 (3)에 대입한 후 Galerkin 방법을 이용하면, 수직 등분포 하중이 작용하는 고정 지점 낮은 아치의 이산화된 지배 미분 방정식을

$$\begin{aligned} F_1(D_1, D_2, q) &= \frac{1}{8}D_1^3 + \frac{3}{4}HD_1^2 + (H^2+2)D_1 + \frac{5}{16}D_1D_2^2 + \frac{5}{8}HD_2^2 - \frac{1}{2}q = 0 \\ F_2(D_1, D_2, q) &= \frac{25}{32}D_2^3 + \frac{41}{4}D_2 + \frac{5}{16}D_1D_2 + \frac{5}{4}HD_1D_2 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

와 같이 얻을 수 있다. 식 (5)는 이산화된 하중(무차원 하중 q)과 변위(일반화 좌표 D_1, D_2)의 관계를 나타내는 것을 알 수 있으며, 이러한 하중-변위 관계는 비선형 연립 방정식의 형태를 가지고 있으며, 무차원 라이즈 H 의 함수로 나타나는 것을 알 수 있다.

3. 증분 형태의 하중-변위 관계식

본 연구에서는 식 (5)와 같은 고정 지점을 갖는 낮은 아

치의 비선형 연립 방정식을 풀기 위하여 섭동법(Moon *et al.*, 2007)을 이용하여 근사 해법을 구하였으며, 그 자세한 내용은 다음과 같다. 변위 및 하중의 증분은 각각

$$\begin{aligned} d_i &= D_i^{n+1} - D_i^n \quad (i=1,2; n=1,2,3,\dots) \\ \lambda &= q^{n+1} - q^n \quad (n=1,2,3,\dots) \end{aligned} \quad (6)$$

과 같다. 여기서 첨자 n 은 n 번째 평형 경로를 나타낸다. $D_1^n, D_2^n, q^n, D_1^{n+1}, D_2^{n+1}, q^{n+1}$ 이 평형 경로상에 존재 하려면, $F_r(D_1^n, D_2^n, q^n) = 0$ 과 $F_r(D_1^{n+1}, D_2^{n+1}, q^{n+1}) = 0$ 을 만족한다. 따라서 증분 형태의 이산화된 지배미분 방정식 Q_r 은 Taylor 전개를 이용하여

$$\begin{aligned} Q_r(d_1, d_2, \lambda) &= F_r(D_1^{n+1}, D_2^{n+1}, q^{n+1}) - F_r(D_1^n, D_2^n, q^n) = \\ &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial F_r^m}{\partial D_i} d_i + \frac{\partial F_r^m}{\partial q} \lambda + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 F_r^m}{\partial D_i \partial D_j} d_i d_j + 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 F_r^m}{\partial D_i \partial q} d_i \lambda + \frac{\partial^2 F_r^m}{\partial q^2} \lambda^2 \right] \\ &+ H.O.T = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

과 같이 나타낼 수 있다. 식 (7)의 d_1, d_2, λ 에 대한 계수 들을

$$\begin{aligned} k_{ri} &= \frac{\partial F_r^m}{\partial D_i}; k_{rij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_r^m}{\partial D_i \partial D_j}; k_{ri\lambda} = \frac{\partial^2 F_r^m}{\partial D_i \partial q}; f_{r\lambda} = -\frac{\partial F_r^m}{\partial q}; \\ f_{r\lambda\lambda} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_r^m}{\partial q^2} \end{aligned} \quad (8)$$

과 같이 정의하고, 이를 식 (7)에 대입하면

$$Q_r(d_1, d_2, \lambda) = \sum_{i=1}^2 k_{ri} d_i + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 k_{rij} d_i d_j + \sum_{i=1}^2 k_{ri\lambda} d_i \lambda - f_{r\lambda} \lambda - f_{r\lambda\lambda} \lambda^2 = 0 \quad (9)$$

과 같이 간단히 식 (7)을 정리할 수 있다. 여기서 식 (7)의 3차 이상의 고차항은 무시하였다. Maclaurin의 급수를 이용하여 증분 d_i, λ 를 임의의 변수 t 에 대한 함수로 나타내면

$$\begin{aligned} d_i(t) &= \dot{d}_i t + \frac{1}{2} \ddot{d}_i t^2 + H.O.T \quad (i=1,2) \\ \lambda(t) &= \dot{\lambda} t + \frac{1}{2} \ddot{\lambda} t^2 + H.O.T \end{aligned} \quad (10)$$

과 같다. 여기서 점진 임의의 변수 t 에 대한 미분을 나타낸다. 식 (10)에서 2차 항까지만 고려하여 식 (9)에 대입하면, 증분의 형태의 이산화된 평형 방정식 Q 은 임의의 변수 t 에 관한 함수가 된다. 이 방정식이 임의의 변수 t 에 관하여 성립하기 위하여는 t 및 t^2 의 각 계수가 0이 되어야 한다. 따라서 식 (9)는

$$\sum_{i=1}^2 k_{ri} \dot{d}_i = f_{r\lambda} \dot{\lambda} \quad (a)$$

$$\sum_{i=1}^2 k_{ri} \ddot{d}_i + 2 \left[\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 k_{rij} \dot{d}_i \dot{d}_j + \sum_{i=1}^2 k_{ril} \dot{d}_i \dot{\lambda} - f_{r\lambda} \dot{\lambda}^2 \right] = f_{r\lambda} \ddot{\lambda} \quad (b)$$

과 같이 변형되며, 2개의 섭동 방정식을 얻을 수 있다. 식 (11-a)는 제 1차 섭동 방정식으로 1차 근사를 나타내며, 식 (11-b)는 제 2차 섭동 방정식으로 2차 근사를 나타낸다. 식 (11-a)는 \dot{d}_i 과 $\dot{\lambda}$ 에 관한 선형 방정식이므로 쉽게 해를 계산할 수 있으며, 이를 식 (11-b)에 대입하면, 식 (11-b)는 \ddot{d}_i 과 $\ddot{\lambda}$ 에 관한 선형 방정식이 되어 이 또한 쉽게 계산할 수 있다. 이렇게 계산된 값을 식 (10)에 대입하여 변위 및 하중 증분 d_i, λ 을 계산하고 이런 과정을 반복하면, 전체 구조계의 하중-변위 관계를 얻을 수 있다. 본 연구에서는 문제를 보다 간단히 하기 위하여 이후로 1차 근사만을 이용하여 아치의 거동과 강도를 평가 하였다. 식 (8)과 (11)에서 제 1 섭동 방정식은

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \dot{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

여기서,

$$k_{11} = \frac{3}{8} D_1^{n^2} + \frac{3}{2} H D_1^n + (2+H^2) + \frac{5}{16} D_2^{n^2} \quad (a)$$

$$k_{12} = k_{21} = \frac{5}{4} H D_2^n + \frac{5}{8} D_1^n D_2^n \quad (b)$$

$$k_{22} = \frac{75}{32} D_2^{n^2} + \frac{41}{4} + \frac{5}{16} D_1^{n^2} + \frac{5}{4} H D_1^n \quad (b) \quad (13)$$

과 같은 행렬의 형태로 나타낼 수 있다. 식 (12)에서 k_{ij} 는 고정 지점을 갖는 낮은 아치의 접선 강성을 나타낸다. 접선 강성은 무차원 라이즈 H 의 함수로 이에 영향을 받는 것을 알 수 있다. 다음 장에서는 식 (12) 및 (13)을 이용하여 H 의 변화에 따른 고정 지점을 갖는 낮은 아치 면내 거동에 관한 연구를 수행하였다.

4. 고정 지점을 갖는 낮은 아치의 면내 거동

앞에서 설명 하였듯이 식 (12)의 k_{ij} 는 접선 강성을 나타낸다. 이 식에서 k_{11} 은 대칭 변형 평형경로의 기울기를 나타내며, 이는 아치의 대칭 뒤틀좌굴 여부와 관계된다. 이와 유사하게 k_{22} 는 아치의 비대칭 분기좌굴과 밀접한 관계를 가진다. 이러한 아치의 접선강성 k_{ij} 는 무차원 라이즈 H 의 함수이므로 본 연구에서는 H 의 변화에 따른 아치의 면내 거동에 관하여 연구를 수행하였다. 초기 결함이 없는 아치 ($D_1^0=0, D_2^0=0$)의 경우는 비대칭 변형 없이 대칭 변형만 발생하므로, 모든 아치에 초기 결함을 비대칭 형상으로 $D_2^0=0.001H$ 를 입력하여 거동을 분석하였다.

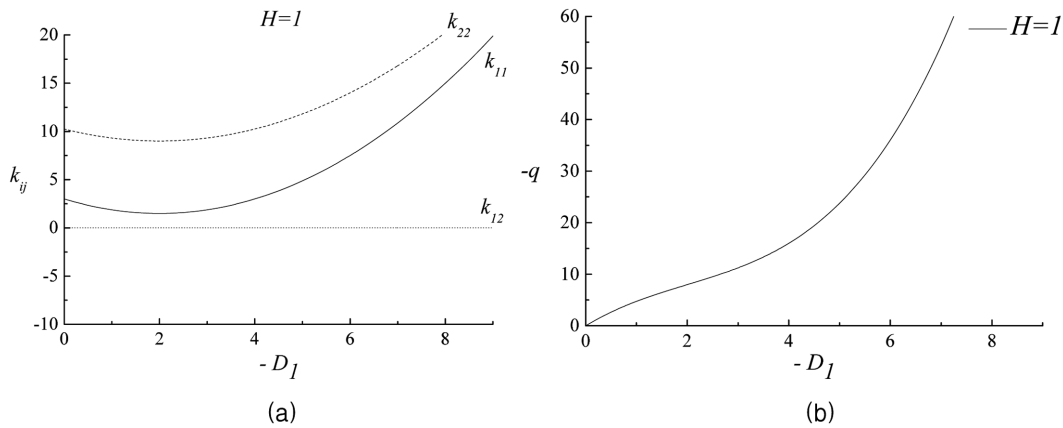


그림 4. 고정지점 낮은 아치의 면내거동($H=1$): (a) D_1 에 따른 k_{ij} 의 변화; (b)에 따른 q 의 변화

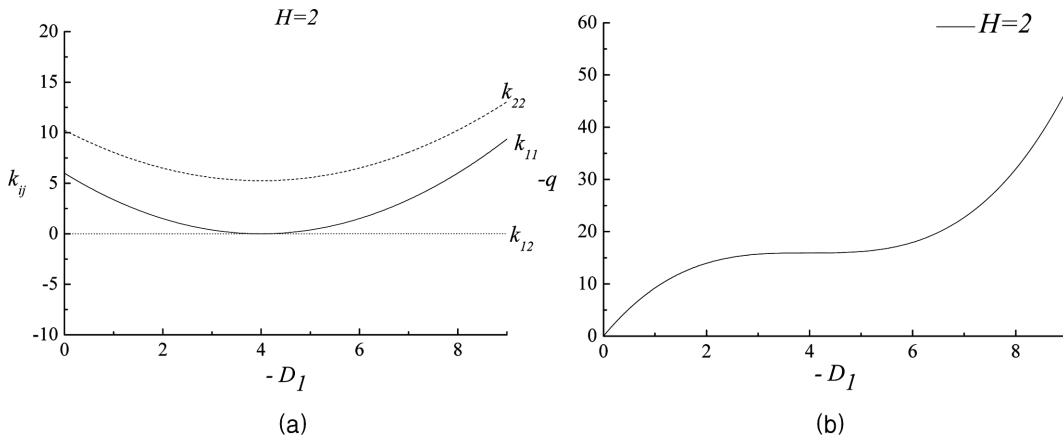


그림 5. 고정지점 낮은 아치의 면내거동($H=2$): (a) D_1 에 따른 k_{ij} 의 변화; (b) D_1 에 따른 q 의 변화

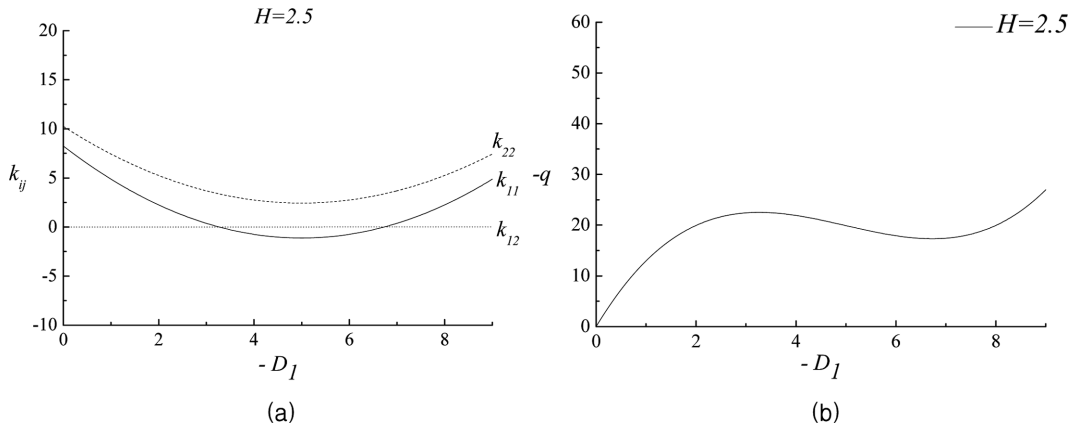


그림 6. 고정지점 낮은 아치의 면내거동($H=2.5$): (a) D_1 에 따른 k_{ij} 의 변화; (b) D_1 에 따른 q 의 변화

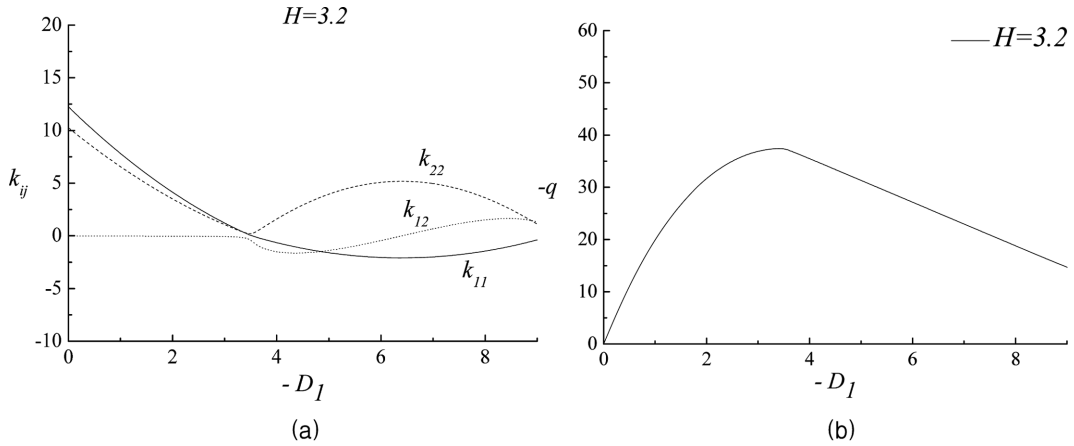


그림 7. 고정지점 낮은 아치의 면내거동($H=3.2$): (a) D_1 에 따른 k_{ij} 의 변화; (b) D_1 에 따른 q 의 변화

본 연구에서는 H 를 증가시키면서 H 에 따른 접선 강성 k_{ij} 와 하중-변위 관계를 연구하였으며, 그 중 대표적으로 무차원 라이즈 $H=1, 2, 2.5, 3.2, 4$ 에 대한 결과를 그림 4~8에 나타내었다. 그림 4~8에서 x 축은 대칭 변형의 일반화 좌표 D_1 이며, y 축은 접선강성 k_{ij} 의 크기 또는 무차원 하중 q 를 나타낸다. 여기서 $-$ 는 그림 2와 같이 본 연구에서 윗방향이 양의 값을 갖기 때문에 사용되었다.

그림 4(a)에서 알 수 있듯이 $H=1$ 인 경우, 전 구간의 D_1 에서 k_{11} 과 k_{22} 는 양의 값을 가지고 있음을 알 수 있다. 따라서 그림 4(b)에서 볼 수 있듯이 아치의 하중-변위 관계의 기울기는 전 구간에서 양의 값을 나타내며, 불안정 현상이 나타나지 않는다. 즉, 아치는 보와 같은 거동을 나타낸다.

$H=2$ 인 경우 그림 5(a)에서 볼 수 있듯이 k_{11} 이 감소하면서 0에 접근하고 이 후 다시 증가하는 현상을 볼 수 있다. 이는 그림 5(b)에서와 같이 하중-변위 관계의 기울기가 감소하면서 0에 접근하고 다시 증가하는 것과 동일한 현상이다. H 가 2보다 커지는 경우 k_{11} 은 음의 값을 가지게 되며, 대칭 뒤틀좌굴이 발생하게 된다. 이는 그림 6의 $H=2.5$ 인 경우에서 확인 할 수 있다. $H=2.5$ 인 경우 그림 6(a)와 같이 k_{11} 은 감소하면서 음의 값을 가지게 되고 이 후에 다시 증가하여 양의 값을 가지게 된다. 이러한 경우 k_{11} 에 의하여 불안정 현상이 발생하며, 그림 6(b)와 같이 뒤틀좌굴 현상이 나타난다. 하지만 H 가 3.2보다 커지는 경우 k_{22} 가 k_{11} 보다 먼저 0에 접근하게 되며, 이 후 k_{12} 가 급격히 증가하면서 비대칭 분기

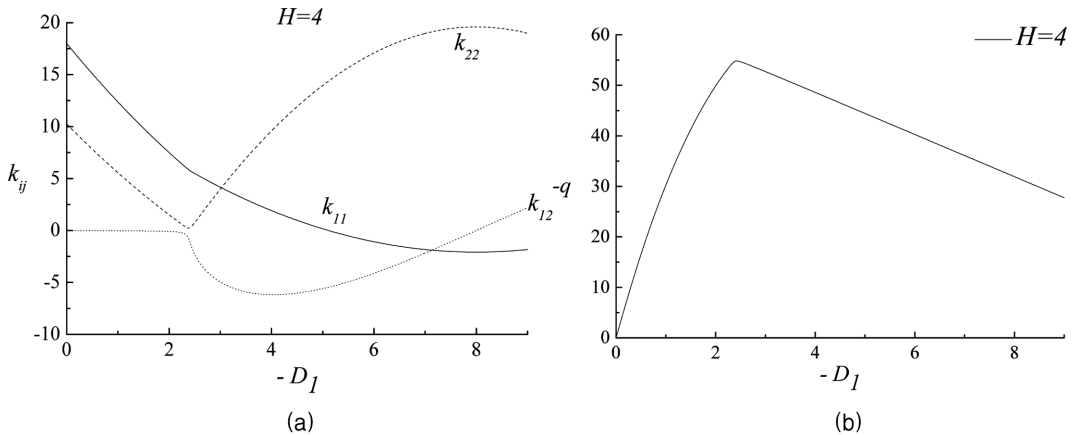


그림 8. 고정지점 낮은 아치의 면내거동($H=4$): (a) D_1 에 따른 k_{ij} 의 변화; (b) D_1 에 따른 q 의 변화

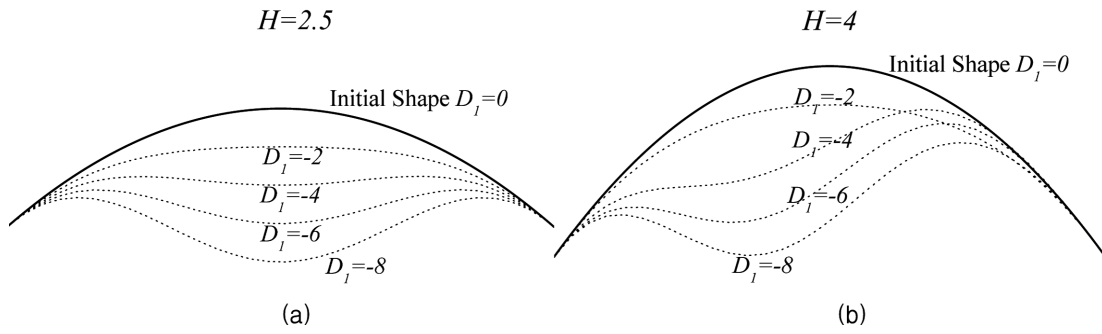


그림 9. 고정지점 낮은 아치의 변형 형상: (a) $H=2.5$; (b) $H=4$

좌굴이 발생한다. 그림 7은 $H=3.2$ 일 때 접선 강성 k_{ij} 의 변화 및 하중-변위 관계를 나타낸다. 이 그림에서 알 수 있듯이 $H=3.2$ 일 때 k_{22} 가 먼저 0에 접근하며, 비대칭 분기좌굴이 발생한다. 이러한 현상은 $H=4$ 일 때 보다 확실히 나타나며, 그림 8에서 확인할 수 있다.

그림 9는 $H=2.5$ 및 4인 경우 대칭 변형의 일반화 좌표 D_1 의 증가에 따른 고정 지점을 갖는 낮은 아치의 변형 형상을 나타낸 그림이다. $H=2.5$ 인 경우 대칭좌굴, $H=4$ 인 경우는 비대칭좌굴이 발생하는 것을 그림을 통하여 확인할 수 있으며, 이는 앞의 그림 6과 8의 설명과도 일치한다. 이상의 결과를 요약하면 다음과 같다. 고정 지점을 갖는 낮은 아치의 면내 좌굴 형상은 무차원 라이즈비 H 의 변화에 따라 결정된다. $H < 2$ 인 경우 고정 지점을 갖는 낮은 아치에는 좌굴이 발생하지 않으며, 보와 같은 거동을 한다. $2 \leq H < 3.2$ 인 경우는 k_{11} 이 음의 값을 가지게 되며, 대칭 뿔좌굴이 발생하게 된다. 반면에 $H \geq 3.2$ 인 경우는 k_{22} 가 먼저 0에 접근하게 되며, 그 이후 k_{12} 가 급격히 증가하면서 비대칭 분기 좌굴이 발생한다.

무차원 라이즈비 H 는 아치의 라이즈비 h/l 와 아치 단면의 세장비 l/r 의 함수이므로 아치의 좌굴 형상을 구분하는 경계를 h/l 과 l/r 의 함수로 바꾸어 표시 할 수 있다. 그림 10은 본 연구에서 제안한 고정 지점을 갖는 낮은 아치의 좌굴 형상을 구분하는 경계를 h/l 과 l/r 의 함수로 바꾸어 나타낸 그림이다. 이 그림에서 알 수 있듯이 같은 라이즈비를 갖는 경우에는 세장비가 커질수록 안정에서 대칭 뿔좌굴, 비대칭 분기좌굴의 순서로 아치의 거동이 변하게 된다. 이와 유사하게 세장비가 일정한 경우도 라이즈비가 증가하면서 아치는 안정에서 대칭 뿔좌굴, 비대칭 분기 좌굴의 순서로 아치의

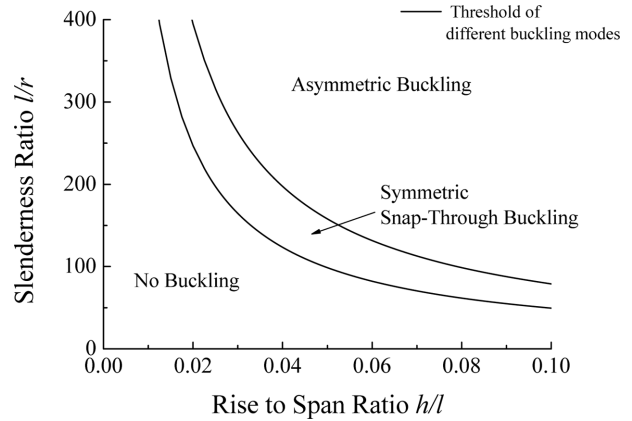


그림 10. h/l 과 l/r 에 따른 고정지점 낮은 아치의 좌굴 경계

동이가 나타난다. 이러한 그림을 이용하는 경우 손쉽게 아치의 라이즈비와 단면의 세장비를 아는 경우 고정 지점을 갖는 낮은 아치의 좌굴 형상을 결정할 수 있다.

Pi et al.(2002)과 Bradford et al.(2002)는 원형 아치의 좌굴 형상을 구분하기 위하여 수정된 세장비를 $\lambda_s = S^2/(4rR)$ 과 같이 정의하였다. 여기서, S 는 아치의 길이이며, R 은 원형 아치의 반경을 나타낸다. Pi et al.(2002)은 원형아치 단면에 압축력이 작용하는 경우 좌굴 형상을 구분하는 경계를 제안하였으며, Bradford et al.(2002)는 원형 아치의 크라운(crown)에 집중 하중이 작용하는 경우 좌굴 형상을 구분하는 경계를 제안하였다. 본 연구 결과와 이들의 결과를 비교하기 위하여 낮은 아치의 경우 아치의 길이 S 는 아치의 지간 l 과 같다는 가정을 도입하여 각 연구자들이 제안한 경계를 h/l 과 l/r 의 함수로 바꾸었다. 그림 11은 본 연구 결과와 Pi et al.(2002)과 Bradford et al.(2002)의 결과를 비교한 그림

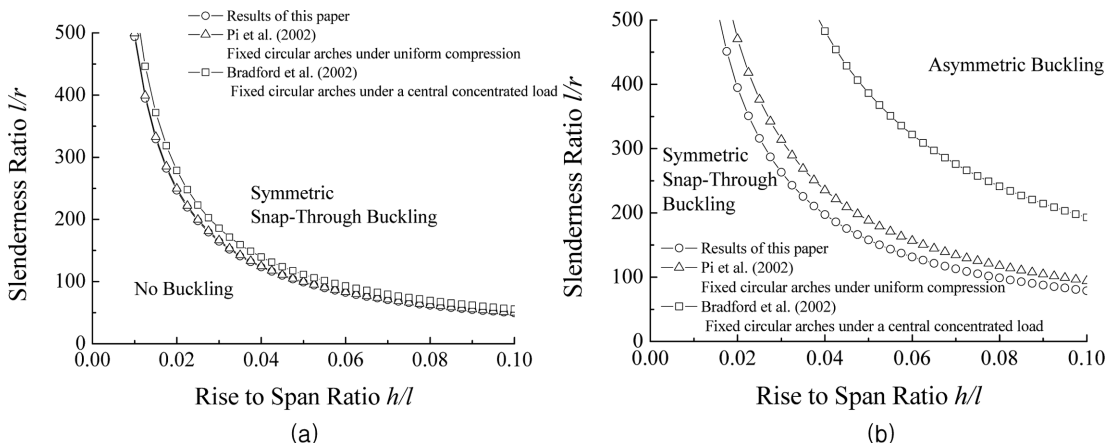


그림 11. h/l 과 l/r 에 따른 고정지점 낮은 아치의 좌굴 경계 비교: (a) 대칭 뿔좌굴 경계; (b)비대칭 분기좌굴 경계

이다. 그림 11(a)는 대칭 뿔좌굴 경계를 나타낸 그림으로 본 연구 결과와 압축력이 작용하는 원형 아치, 중앙 집중 하중이 작용하는 원형 아치 모두 유사한 결과를 나타내는 것을 알 수 있다. 따라서 대칭 뿔좌굴 경계는 아치의 형상(포물선 혹은 원형 형상) 및 하중조건에 상관없이 유사하다. 하지만 비대칭 분기좌굴의 경계는 그림 11(b)와 같이 본 연구 결과(압축력이 작용하는 포물선 아치)와 압축력이 작용하는 원형 아치의 경우 유사한 결과를 나타내고 있으나 중앙 집중 하중이 작용하는 원형 아치의 경우는 다른 거동을 보이고 있으며, 하중의 형태에 따라 비대칭 분기좌굴의 경계가 다른 것을 확인 할 수 있다.

5. 고정 지점을 갖는 낮은 아치의 좌굴 하중

비대칭 분기좌굴이 발생하는 경우 아치 중립축의 비선형 가정을 이용한 고전좌굴 이론을 이용하여 아치의 좌굴 하중을 결정 할 수 있다. 하지만 이러한 고전 좌굴 이론은 대칭 뿔좌굴이 발생하는 경우 좌굴하중을 과대평가함으로 대칭 뿔좌굴에 관한 좌굴하중은 아치의 비선형성을 고려하여 산정하여야 한다. 이번 장에서는 아치의 비선형 지배미분 방정식을 이용하여 고정 지점을 갖는 낮은 아치의 뿔좌굴 하중을 산정하였으며, 이러한 결과를 기존 연구자 및 유한 요소해석 결과와 비교하였다.

고정 지점을 갖는 낮은 아치에 대칭 좌굴이 발생한다고 가정하면, 무차원 변형 형상을 간단히 $\eta = D_1 \sin(\xi) \sin(\xi)$ 과 같이 가정할 수 있다. 이를 식 (3)에 대입한 후 Galerkin 방법을 이용하면 이산화된 비선형 지배 미분 방정식은

$$D_1^3 + 6HD_1^2 + (8H^2 + 16)D_1 - 4q = 0 \quad (14)$$

와 같이 나타난다. 식 (14)는 대칭 뿔좌굴이 발생하는 경우 비선형 하중-처짐 관계를 나타낸다. 대칭 좌굴이 발생하는 순간에 발생하는 변위를 D_1^{cr} 이라고 하면, D_1^{cr} 은 식 (14)를 미분하여

$$\left| D_1^{cr} \right| = \min \left(\left| D_1^2 + A'D_1 + B' = 0 \right| \right) \quad (a)$$

$$A' = 4H; B' = \frac{16+8H^2}{3} \quad (b)$$

과 같이 계산할 수 있다. 식 (1)에서 아치에 발생하는 압축력은

$$N = \frac{EA}{2l} \int_0^l \left[\left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + 2 \frac{dw_0}{dx} \frac{dw}{dx} \right] dx \quad (16)$$

과 같으므로, 식 (16)에 무차원화된 포물선 아치의 형상 $\eta_0 = H(\pi\xi - \xi^2)$ 과 무차원 변형 형상 $\eta = D_1 \sin(\xi) \sin(\xi)$ 를 대입하여 정리하고 대칭 좌굴이 발생하는 순간에 나타나는 변위를 D_1^{cr} 대입하면 대칭좌굴 하중 $N_{cr,sym}$ 을

$$N_{cr,sym} = \frac{EI\pi^2}{l^2} \left(\frac{D_1^{cr2}}{4} + HD_1^{cr} \right) \quad (17)$$

과 같이 계산할 수 있다. 식 (17)에서 괄호 앞의 수식은 길이 l 인 기둥의 Euler 좌굴 하중임을 쉽게 알 수 있다. 고전 좌굴이론에 의한 비대칭 분기좌굴 하중은

$$N_{cr,asym} = \frac{\pi^2 EI}{(\beta s)^2} \quad (18)$$

과 같다. 여기서 β 는 아치의 경계 조건에 따른 좌굴계수이며, 고정 지점을 갖는 아치의 경우 0.35이다. 앞에서 설명하였듯이, 고정 지점을 갖는 낮은 아치의 좌굴 형상은 무차원 라이즈 H 에 따라 결정됨으로 식 (17)과 (18)은 각각 대칭 뿔좌굴 및 비대칭 분기좌굴 형상에 관하여 사용되어야 한다. 이를 요약하면 고정 지점을 갖는 낮은 아치의 좌굴 하중은

$$\begin{aligned} N_{cr} &= N_{cr,sym} & \text{for } 2 < H \leq 3.2 \\ N_{cr} &= N_{cr,asym} & \text{for } H > 3.2 \end{aligned} \quad (19)$$

과 같이 결정 할 수 있다. 여기서 N_{cr} 은 고정 지점을 갖는 아치의 좌굴하중을 나타낸다.

식 (19)를 검증하기 위하여 본 연구의 결과를 유한요소 해석 및 기존 연구자의 결과와 비교 하였다. 유한요소해석에 사용된 프로그램은 ABAQUS(2001)이다. 해석에 사용된 요소는 B32로 2차 보간 함수를 갖는 3차원 직선보요소로 해석에 사용된 모든 아치를 50개의 요소로 나누었다. 아치의 라이즈비 h/l 은 0.05~0.1까지 변화 시키면서 무차원 라이즈 H 가 2~20 사이의 값을 갖도록 단면이차 모멘트 I 와 단면적 A 를 변화시켰다. 총 44개의 해석 모델을 제작하여 해석을 수행하였다. 해석 방법은 기하비선형 해석을 수행하였으며, 사용된 탄성계수 $E=210000$ MPa이다. 기존 연구자와 본 연구 결과를 비교하기 위하여 Pi et al.(2002)의 이론을 사용하였다. Pi et al.(2002)은 압축력이 작용하는 원형 아치의 대칭 뿔좌굴 및 비대칭 분기좌굴 하중을 제안하였다.

그림 12는 H 에 따른 $N_{cr}/N_{cr,asym}$ 의 변화를 나타낸 그래프이다. x 축은 무차원 라이즈 H 를 나타내며, y 축은 본 연구에서 제안한 식 (19)의 결과, Pi et al.(2002)의 결과 또는 유한요소해석 결과 나타난 좌굴하중 N_{cr} 과 식 (18)에서 계산된 비대칭 분기좌굴 하중 $N_{cr,asym}$ 의 비를 나타낸다. $N_{cr}/N_{cr,asym}$ 가 1보다 작아지는 경우는 비대칭 분기좌굴 하중 $N_{cr,asym}$ 의 아치의 좌굴하중을 과대평가하는 것이며, 실제로 그림 12에서 알 수 있듯이 대칭 좌굴이 발생하는 구간에서 비대칭 분기좌굴 하중이 아치의 좌굴 하중을 과대평가하는 것을 확인할 수 있다. 유한요소 해석 결과는 본 연구 결과와 잘 일치하고 있다. 하지만 대칭 뿔좌굴과 비대칭 분기 좌굴의 경계 부근[(b)구간]에서 최대 약 20%의 오차를 보이고 있다. 이러한 이유는 본 연구에서 제안한 고정지점을 갖는 낮은 아치의 좌굴하중은 대칭 뿔좌굴과 비대칭 분기좌굴이 연동되

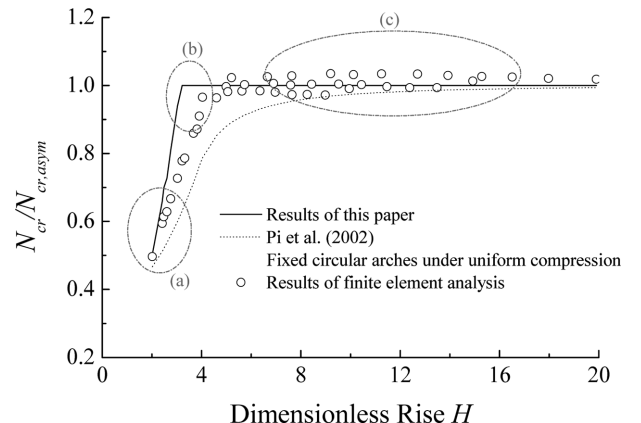


그림 12. H 에 따른 $N_{cr}/N_{cr,asym}$ 의 변화

는 경우를 고려하지 못하기 때문이다. 따라서 극단적으로 대칭 뿔좌굴이 발생하는 (a)구간과 비대칭 분기 좌굴이 발생하는 (c)구간은 아주 잘 일치하고 있으나, 이 두 좌굴형상이 연동되는 (b)구간에서는 유한요소 해석 결과와 차이를 보이고 있다. 또한, 본 연구에서는 고정 지점 포물선 아치의 변형 형상을 $\eta = D_1 \sin(\xi) \sin(\zeta)$ 의 함수로 나타내었다. 이러한 변형 형상은 고정지점 포물선 아치의 변형 형상을 근사적으로 나타내기 때문에 유한요소해석결과와 오차의 한 원인이 된다.

6. 경계 조건에 따른 아치의 거동 분석

Moon *et al.*(2007)은 양단 힌지 낮은 아치의 면내 거동에 관한 연구를 수행하였으며, 아치의 좌굴 경계 및 각각의 좌굴 형상에 해당하는 좌굴 하중을 제안하였다. 이러한 연구 결과를 본 연구에서 나타난 고정 지점을 갖는 낮은 아치의 결과와 비교하였다. Moon *et al.*(2007) 역시 무차원 라이즈 H 에 따라 좌굴 형상을 구분 하였다. 양단 힌지 낮은 아치의 경우 $H < \pi/4$ 인 경우 좌굴이 발생하지 않으며, $\pi/4 \leq H < 1.85$ 인 경우 대칭 뿔좌굴이 발생한다. 반면에 $H > 1.85$ 인 경우 비대칭 좌굴이 발생한다. 이러한 좌굴 경계를 본 연구 결과와 비교 하면, $H < \pi/4$ 인 아치의 경우 양단 힌지 및 고정 지점을 갖는 아치 모두 좌굴이 발생하지 않으며, 보와 같은 거동을 보이게 된다. 이와 유사하게 $H > 3.2$ 인 경우 경계 조건에 상관없이 비대칭 좌굴이 발생하게 된다. 그림 13은 이러한 좌굴 경계를 라이즈비 h/l 와 아치 단면의 세장비 l/r 의

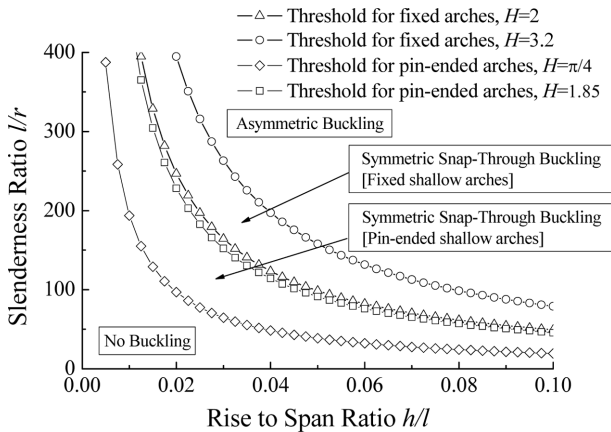


그림 13. h/l 과 l/r 에 따른 낮은 아치의 좌굴 경계

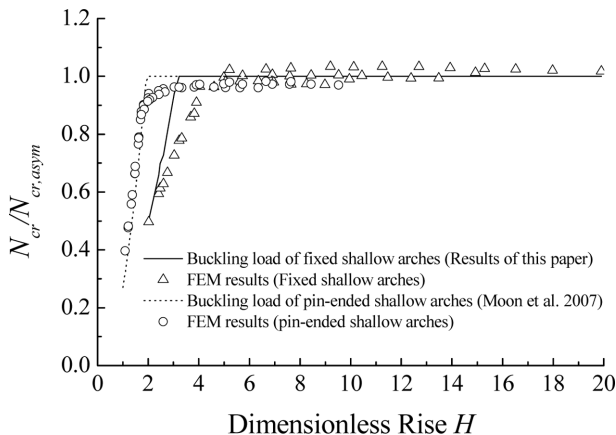


그림 14. 경계 조건에 따른 좌굴 하중의 비교

함수로 나타낸 그림이며, 이 그림을 이용하여 양단 힌지 및 고정지점을 갖는 낮은 아치의 좌굴 형상을 쉽게 결정 할 수 있다.

그림 14는 양단 힌지 및 고정 지점을 갖는 낮은 아치의 좌굴 하중을 비교한 그래프이다. H 가 3.2보다 큰 경우 경계 조건에 관계없이 비대칭 분기좌굴 하중이 아치의 좌굴 하중을 잘 묘사할 수 있었으며, 양단 힌지 및 고정 지점을 갖는 낮은 아치의 좌굴 하중이 각각 H 가 1.85 및 3.2보다 작아지는 경우 급격히 감소하는 것을 알 수 있다. 또한 고정 지점을 갖는 낮은 아치의 경우 최대 약 50%, 양단 힌지 낮은 아치의 경우 최대 약 70%정도 대칭 좌굴 하중이 비대칭 좌굴 하중보다 작아졌다.

7. 결 론

본 연구에서는 고정 지점을 갖는 낮은 아치의 면내 거동 및 좌굴 하중에 관한 연구를 수행 하였다. 먼저 일반 아치의 비선형 지배미분 방정식을 사용하여 고정지점을 갖는 낮은 아치의 이산화된 지배 방정식을 유도하였으며, 이를 이용하여 고정 지점을 갖는 낮은 아치의 증분 형태 하중-변위 관계를 유도 하였다. 연구 결과, 고정 지점을 갖는 낮은 아치의 면내좌굴 형상은 무차원 라이즈비 H 와 밀접한 관계가 있는 것으로 나타났다. $H < 2$ 인 경우 고정 지점을 갖는 낮은 아치에는 좌굴이 발생하지 않으며, 보와 같은 거동을 하였으며, $2 \leq H < 3.2$ 인 경우는 대칭 뿔좌굴이 발생하였다. 반면에 $H \geq 3.2$ 인 경우는 비대칭 분기좌굴이 발생한다. 또한 본 연구에서는 아치의 비선형 지배미분 방정식을 이용하여 고정 지점을 갖는 낮은 아치의 뿔좌굴 하중을 유도 하였다. 제안된 좌굴 형상을 구분하는 경계와 뿔좌굴 하중은 기존 연구자의 결과 및 유한요소해석 결과와 비교·검증하였으며, 그 결과 뿔좌굴과 비대칭 분기 좌굴이 연동되는 경우 유한요소 해석 결과와 최대 20%정도의 오차를 보이니 이를 제외한 경우는 고정 지점을 갖는 낮은 아치의 거동을 잘 묘사하는 것으로 나타났다. 마지막으로, 본 연구 결과를 기존 연구자에 의하여 수행된 양단 힌지 낮은 아치의 결과와 비교 하였다. 그 결과, $H < \pi/4$ 인 경우 경계 조건에 관계없이 아치는 보와 거동을 나타냈으며, $H > 3.2$ 인 경우는 비대칭 좌굴이 발생하였다.

감사의글

이 연구는 교량설계핵심기술연구단을 통하여 지원된 건설교통부 건설핵심기술연구개발 사업에 의하여 수행되었습니다. 연구 지원에 감사드립니다.

참고문헌

김연태, 허택녕, 김문겸, 황학주(1992) 비선형 운동해석에 의한 낮은 아치의 동적 임계좌굴하중의 결정, **대한토목학회 논문집**, 대한토목학회, 제12권 제2호, pp. 43-54.
 김승덕, 권태진, 박지윤(1998) 얇은 정현형 아치의 분기 좌굴에 관한 연구, **한국전산구조공학회 학술발표회 논문집**, 한국전산구조공학회, pp. 457-464.
 문지호, 윤기용, 이종원, 이학은(2006) 낮은 포물선 아치의 탄성

- 면내 좌굴에 관한 근사식, *한국강구조학회 논문집*, 한국강구조학회, 제18권 4호, pp. 427-436.
- 박광규, 김문겸, 황학주(1986) 낮은 포물선 아치의 동적영역에 관한 연구, *대한토목학회 논문집*, 대한토목학회, 제6권 3호, pp. 1-9.
- ABAQUS standard user's manual version 6.2* (2001) Hibbit, Karsson and Sorensen Inc..
- Austin, W.J. (1971) In-plane bending and buckling of arches, *J Struct Div*, ASCE, Vol. 97, No. 5, pp. 1575-1592.
- Bradford, M.A., Uy, B., and Pi, Y.L. (2002) In-plane elastic stability of arches under a central concentrated load, *J Eng Mech*, ASCE, Vol. 128, No. 7, pp. 710-719.
- Calhoun, P.-R. and DaDeppo, D.A. (1983) Nonlinear finite element analysis of clamped arches, *J Struct Engng* ASCE, Vol. 109, No. 3, pp. 599-612.
- Chen, J.S. and Lin, J.S. (2004) Dynamic snap-through of a shallow arch under a moving point load, *J Appl Mech* ASME, Vol. 126, pp. 514-519.
- Chen, J.S. and Lin, J.S. (2005) Exact critical loads for a pinned half-sine arch under end couples, *J Appl Mech* ASME, Vol. 72, pp. 147-148.
- Chen, J.S. and Lin, J.S. (2006) Stability of a shallow arch with one end moving at constant speed, *Int J Non-linear Mech*, Vol. 41, pp. 706-715.
- Dickie, J.F. and Broughton, P. (1971) Stability criteria for shallow arches, *J Engng Mech* ASCE, Vol. 97, No. EM3, pp. 951-965.
- Elias, Z.M., and Chen, K.L. (1988) Nonlinear shallow curved-beam finite element. *J Engng Mech* ASCE, Vol. 114, No. 6, pp. 1076-1087.
- Gjelsvik, A. and Bonder, S.R. (1962) Energy criterion and snap-through buckling of arches, *J Eng Mech Div* ASCE, Vol. 88, No. EM5, pp. 87-134.
- Gregory, Jr. W.E. and Plaut, R.H. (1982) Dynamic stability boundaries for shallow arches, *J Eng Mech Div*, ASCE, Vol. 108, No. EM6, pp. 1036-1050.
- Harrison, H.B. (1982) In-plane stability of parabolic arches, *J Struct Div*, ASCE, Vol. 108, No. 1, pp. 195-205.
- Hsu, C.S. (1966) On dynamic stability of elastic bodies with prescribed initial condition. *Int J Eng Sci*, Vol. 4, No. 1, pp. 1-21.
- Kuranishi, and Yabuki. (1979) Some numerical estimations of ultimate in-plane strength of two-hinged steel arches, *Proc JSCE*, Vol. 287, pp. 155-158.
- Moon, J., Yoon, K.-Y., Lee, T.-H., and Lee, H.-E. (2007) In-plane elastic buckling of pin-ended shallow parabolic arches, *Engineering Structures*, Vol. 29, pp. 2611-2617.
- Noor, A.K. and Peter, J.M. (1981) Mixed model and reduced/selective intergration displacement models for nonlinear analysis of curved beams, *Int J Numer Method Engng*, Vol. 17, No. 4, pp. 615-631.
- Pi, Y.L., Bradford, M.A., and Uy, B. (2002) In-plane stability of arches, *Int J Solids Struct*, Vol. 39, No. 2, pp. 105-125.
- Plaut, R.H. (1978) Stability of shallow arches under multiple loads, *J Eng Mech Div*, ASCE, Vol. 104, No. EM5, pp. 1015-1026.
- Rubin, M.B. (2004) Buckling of elastic shallow arches using the theory of a cosserat point, *J Engng Mech* ASCE, Vol. 130, No. 2, pp. 216-224.
- Schreyer, H. and Masur, E. (1966) Buckling of shallow arch, *J Eng Mech Div*, ASCE, Vol. 92, No. 4, pp. 1-20.
- Simitse, G.J. (1976), *An introduction to the elastic stability of structures*, Englewood Cliffs (NJ), Prentice-Hall.
- Sinke, T., Zui, H., and Namita, Y. (1977) Analysis and experiment on in-plane load carrying capacity of arches, *Proc JSCE*, Vol. 263, pp. 11-23 (in Japanese).
- Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. (1961) *Theory of elastic stability*, 2nd ed. McGraw-Hill Book Co., Inc..
- Vlasov, V.Z. (1961) *Thin walled elastic beam*, 2nd ed. Washington (DC), National Science Foundation.
- Wen, R.K. and Suhendro, B. (1991) Nonlinear curved-beam element for arch structures, *J Struct Engng* ASCE, Vol. 117, No. 11, pp. 3496-3515.

(접수일: 2007.8.17/심사일: 2007.12.3/심사완료일: 2007.12.3)