

## 열유속 상지연이 존재하는 열전도 현상에 대한 연구

김창복\* · 김경근\* · 정한식\*\* · 정호민\*\* · 최두열\*\*\* · 최순호†

(원고접수일 : 2007년 11월 30일, 원고수정일 : 2008년 7월 8일, 심사완료일 : 2008년 7월 9일)

### A Study of the Heat Conduction Phenomena with a Phase Lag of Heat Flux

Chang-Fu Jin\* · Kyung-Kun Kim\* · Han-Shik Chung\*\* · Hyo-Min Jeong\*\* · Du-Yeol Choi\*\*\* · Soon-Ho Choi†

**Abstract** : In most engineering applications related with the heat conduction phenomena, a conventional Fourier heat conduction equation has been successfully applied and it has supplied quite reasonable results. However, it is well known that the Fourier heat conduction equation is failed in the application to the extremely small space and short time, in other words, a nano-scale system and a pico-second time. In this study, non-Fourier effect was evaluated in the heat conduction by considering the concept of a phase lag model. The results show the existence of a heat wave, which means that the heat is transferred with a finite speed while an infinite speed of heat transfer is assumed in the conventional Fourier heat conduction. In addition, the copper and the gold are tested to evaluate the phase lag time between the heat flux and the temperature gradient. The results show that the gold has the heat wave speed faster than that of the copper consistent with the prediction based on an actual experiment.

**Key words** : Fourier hat conduction(푸리에 열전도), Phase lag(상지연), Heat wave(열파), Heat transfer velocity(열전달속도), Non-fourier heat conduction(비푸리에 열전도)

#### Subscripts

$c_1$  : Sound speed, m/sec

$c_2$  : Second sound speed, m/sec

$c_p$  : Specific heat at constant pressure,  
J/kg · K

$J$  : Bessel function

$k$  : Thermal conductivity, W/m · K

$L$  : Length, m

$q$  : Heat flux, J/m<sup>2</sup> · sec

$r$  : Distance or position, m

$T$  : Temperature, K

$t$  : Time, sec

$x$  : Distance or position, m

† 교신저자(경상대학교 친환경에너지기계연구사업팀, E-mail: choi\_s\_h@naver.com, Tel: 055)640-3179)

\* 한국해양대학교, 기관시스템공학부, 박사후과정

\*\* 경상대학교, 해양과학대학, 정밀기계공학과

\*\*\* 경상대학교, 대학원, 박사과정

- $a$  : Thermal diffusivity,  $m^2/sec$
- $b$  : Non-dimensional time
- $d$  : Non-dimensional length
- $Q$  : Non-dimensional temperature
- $r$  : Density,  $kg/m^3$
- $t$  : Time lag, sec

Subscripts

- $ini$  : Initial
- $h$  : Boundary

### 1. 서 론

열전도현상 해석에 사용되고 있는 식(1)의 푸리에 법칙은 거시규모(Macroscale)의 열전도현상에 대한 관찰과 실험에 의한 측정을 바탕으로 확립된 경험법칙으로서 대부분의 공학적인 적용 예에 대해 정확한 예측을 제공하는 것으로 알려져 있다<sup>[1]</sup>.

$$q(r,t) = -k \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \tag{1}$$

식(1)의 열전도방정식을 아래의 식(2)의 에너지 방정식에 대입하면 계의 온도장의 형태로 표현되는 식(3)의 푸리에 열전도방정식이 얻어진다.

$$-\frac{\partial q(r,t)}{\partial r} + g(r,t) = \rho c_p \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial r^2} + g(r,t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} \tag{3}$$

상기의 식들에서  $g$ 는 계의 단위시간당, 단위체적당의 발열량이며,  $\alpha = k/\rho \cdot c_p$ 는 열확산계수(Thermal Diffusivity)이다. 식(3)의 관찰로부터 계의 내부에서 발생하는 열적교란을 계 내부의 모든 부분이 순간적으로 동시에 인식한다는 것을 알 수 있으며, 이는 열적교란이 무한대의 전파속도로 전달되고 있음을 설명한다<sup>[2]</sup>.

열적교란이 무한대(Infinity)의 전파속도를 가진다는 것은 물리적으로 비현실적이지만 비평형정상상태(Non-equilibrium Steady State, NESS)의 열전도의 경우 열적교란을 고려할 필요

가 없으므로 상기의 식들은 타당하다고 할 수 있으며, 따라서 전술한 바와 같이 대부분의 공학적 응용에서 정확한 결과를 제공해준다.

하지만 최근 NEMS/MEMS와 같은 극초소형기기의 출현과 더불어 이들 기기의 제작을 위해서는 레이저가공은 필수적인 공정이 되고 있다. 레이저를 이용한 극히 짧은 시간동안의 주기적이고 반복적인 가열과 냉각이 필요한 경우에는 계의 열적응답시간이 중요하며, 뿐만 아니라 절대영도에 가까운 극저온영역에서는 열적교란이 계의 평균온도에 비해 매우 크게 되어 과동특성의 열전달이 지배적인 요인이 된다. 또 생체조직의 해동과 냉동과정에서 열은 일정한 속도로 전달된다는 것이 확인되었으며, 이런 열전도현상은 기존의 고전 열전도방정식을 적용하여 해석할 수 없다<sup>[3],[4]</sup>.

본 연구에서는 고체 물질내부 열전달과정에서의 열유속(Heat Flux)의 상지연(Phase Lag)이 존재하는 열전도현상을 해석하기 위해 기존의 푸리에 열전도방정식과 비푸리에 열전도방정식을 비평형-비정상상태(Non-equilibrium and Non-steady State, NENSS)의 고체에 적용하여 시간과 매질 내 위치에 따른 온도분포의 해석해를 구하였으며, 두가지 방법에 의한 결과를 비교하여 비푸리에 열전도현상의 특성을 규명하였다.

### 2. Cattaneo-Vernotte 열전도방정식

1장에서 설명한 바와 같이 고전 열전도방정식, 즉 푸리에 열전도방정식은 계 내부에서의 열적교란이 무한의 속도로 전파됨을 의미하므로 비현실적이다.  $t$ 인 시각에 계 내부를 흐르는 열유속은 식(4)에서 보는 바와 같이  $t$ 시각보다  $\tau$ 시간 이전에 형성된 계의 온도구배에 의해 발생되거나, 식(5)에서와 같이 온도구배가 형성된  $t$ 시각보다  $\tau$ 시간 이후에 발생하는 것이 자연스러울 것이다<sup>[5]</sup>. 즉 열유속(Heat Flux)은 온도구배(Temperature Gradient)보다  $\tau$ 시간 지연되어 발생하며, 여기서  $\tau$ 는 열유속의 상지연을 묘사하는 특정시간이다.

$$q(r,t) = -k \frac{\partial T(r,t-\tau)}{\partial r} \tag{4}$$

$$q(r, t + \tau) = -k \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \tag{5}$$

식(5)의 좌변을 시간  $t$ 에 대해 테일러의 급수전개를 적용하고 2차항 이상을 무시하고, 공간  $r$ 에 대해 편미분을 수행하면 식(7)이 유도된다.

$$q(r, t + \tau) = q(r, t) + \frac{\partial q(r, t)}{\partial t} \tau + O(\tau^2) = -k \frac{\partial T(r, t)}{\partial r}$$

$$q(r, t) + \frac{\partial q(r, t)}{\partial t} \tau = -k \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \tag{6}$$

$$\tau \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial q(r, t)}{\partial t} + \frac{\partial q(r, t)}{\partial r} + k \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} = 0 \tag{7}$$

그리고 식(2)의 에너지방정식에서 내부발열량을 무시하면,

$$-\frac{\partial q(r, t)}{\partial r} = \rho c_p \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} \tag{8}$$

이제 식(8)을 식(7)에 대입하고 정리하면,

$$\frac{\partial^2 T(r, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = c_2^2 \frac{\partial^2 T(r, t)}{\partial r^2} \tag{9}$$

$$\tau = \frac{\alpha}{c_2^2} \tag{10}$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{k}{\rho c_p}} = \frac{c_1}{\sqrt{3}} \tag{11}$$

식(9)에서  $c_2$ 는 제2음속으로 불리는 열파의 전파 속도이고  $c_1$ 은 재질 속에서의 음속이며, 상지연 시간  $\tau$ 는 식(10)으로 구할 수 있다<sup>[6]</sup>. 식(9)는 열유속의 상지연이 존재할 때 유한한 전파속도를 가지는 열교란현상을 묘사한 열전도방정식으로서 Cattaneo -Vernotte(CV)열파모델 또는 쌍곡선 열전달방정식 이라고 부른다<sup>[7]</sup>.

### 3. 계산계 및 해석해

계산의 편의상 해석대상의 계는 등방성재질로 가정하였으며, 열전달방향을 제외한 매질의 표면은 Fig. 1과 Fig. 2에 보인 것과 같이 절연처리하였다.  $t=0$ 인 초기상태에서 매질의 내부와 경계면의 온도는 모두  $T_{ini}$ (5K)로 유지하였으며,  $t>0$ 인 시

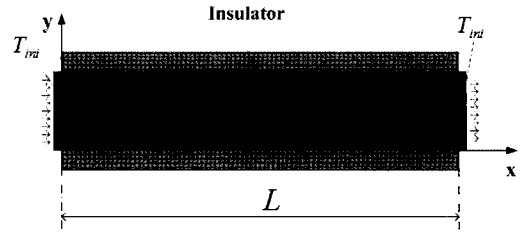


Fig. 1 Schematic diagram of initial condition of the system.

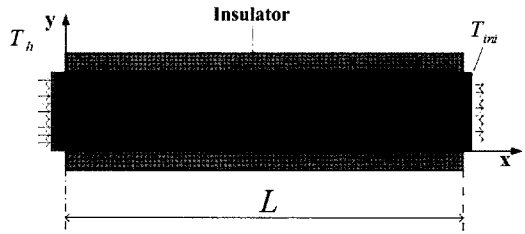


Fig. 2 Schematic diagram of boundary condition of the system.

각부터  $x=0$ 인 경계면의 온도를  $T_h$ (70K)로 상승시키고  $x=L$ 인 경계면의 온도는 초기온도  $T_{ini}$ 로 유지하였다. 따라서  $t>0$ 인 시각부터 매질 내부의 온도장(Temperature Field)은 CV 열파모델을 따르는 비정상상태 온도장이며, 시간과 매질의 내부위치에 따라 변하는 비정상상태 온도장을 식(9)의 해석해를 통해 구하였다.

내부발열이 발생하지 않을 때 상기의 CV열파모델과 동일한 초기, 경계조건을 가지는 푸리에법칙 즉 식(3)의 해를 변수분리법으로 구하면,

$$T(x, t) = T_h - \frac{x}{L}(T_h - T_{ini}) + U(x, t) \tag{12}$$

식(12)에서  $U(x, t)$ 는 다음과 같다.

$$U(x, t) = -\frac{2(T_h - T_{ini})}{\pi} \times \sum_{N=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2N-1} \cdot \sin\left\{\left(\frac{2N-1}{L}\right)\pi x\right\} \times e^{-\left(\frac{2N-1}{L}\pi\right)^2 \cdot \sigma^2 \cdot t} + \frac{1}{2N} \cdot \sin\left\{\left(\frac{2N}{L}\right)\pi x\right\} \times e^{-\left(\frac{2N}{L}\pi\right)^2 \cdot \sigma^2 \cdot t} \right] \tag{13}$$

식(13)에서  $\sigma^2 = \alpha$ ,  $N \in 1, 2, 3 \dots$ 이다. 상기의 식(12), (13)은 푸리에법칙을 따르는 고체내부의 비정상상태 온도분포를 표시하는 해석해이다.

비푸리에법칙의 열전도방정식인 식(9)의 해석해를 구하기 위해서는 다음과 같은 무차원온도, 공간위치, 시간을 정의할 필요가 있다.

$$\Theta(x,t) = \frac{T(x,t) - T_{mi}}{T_h - T_{mi}} \quad (14)$$

$$\delta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha \cdot \tau}} \quad (15)$$

$$\beta = \frac{t}{2\tau} \quad (16)$$

상기의 식들에서  $\tau$ 는 열유속 상지연시간이며, 전술한 식(14), (15), (16)를 식(9)에 대입하면 다음과 같이 무차원화된 지배방정식을 얻는다.

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \beta^2} + 2 \frac{\partial \Theta}{\partial \beta} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \delta^2} = 0 \quad (17)$$

상식을 Fig. 1과 Fig. 2의 계산기에 적용하면 초기조건과 경계조건은 다음과 같게 된다.

$$\Theta(\delta, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \Theta(\delta, 0) = 0 \quad (18)$$

$$\Theta(0, \beta) = \theta(\beta) = 1 \quad (19)$$

$$\Theta(\delta \rightarrow \infty, \beta) = 0 \quad (20)$$

경계조건을 나타내는 상기의 식(19)와 식(20)에서  $\theta(\beta)$ 는 단위계단함수(Unit Step Function)이다. 식(17)에 Laplace변환을 실행하고 해를 구하면,

$$\bar{\Theta}(\delta, p) = \frac{1}{p} e^{-(\sqrt{p^2 + 1})\delta} \quad (21)$$

식(21)에서  $\bar{\Theta}$ 는  $\theta(\beta)$ 의 Laplace변환으로 다음과 같다.

$$\bar{\Theta}(\delta, p) = \int_0^\infty e^{-p \cdot \beta} \cdot \Theta(\delta, \beta) d\beta \quad (22)$$

식(21)에 Laplace역변환을 진행하면,

$$\Theta(\delta, \beta) = e^{-\delta} + \delta \int_\delta^\beta e^{-\tau} \frac{J_1(\sqrt{\tau^2 - \delta^2})}{\sqrt{\tau^2 - \delta^2}} d\tau \quad (23)$$

상식은 C-V 열파모델의 지배를 받는 비평형비정상상태의 매질내 온도장을 나타내는 해석해이며,  $J_1$ 은 1차의 제1종 Bessel함수로서 다음과 같이 주어진다.

$$J_1 = \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+1} (m!)(m+1)!} \quad (24)$$

### 4. 계산결과 및 검토

Fig. 3은 식(12) 및 식(13)으로 구한 푸리에 열전도법칙을 따르는 비정상상태 온도장의 온도분포를 표시한 것으로서 그림에서 보는 바와 같이 푸리에 열전도현상에서는 열이 무한대의 속도로 전달되기 때문에 매질은 열전달방향의 전구간에 걸쳐 동시에 온도변화가 발생하며, 시간이 경과함에 따라 온도가 점차적으로 상승하면서 정상상태로 이행함을 알 수 있다.

Fig. 4는 열유속의 상지연이 존재할 때, C-V 열파모델의 해석해에 의해 구한 비평형-비정상상태 온도장의 온도변화와 시간에 따른 열침투깊이를 보

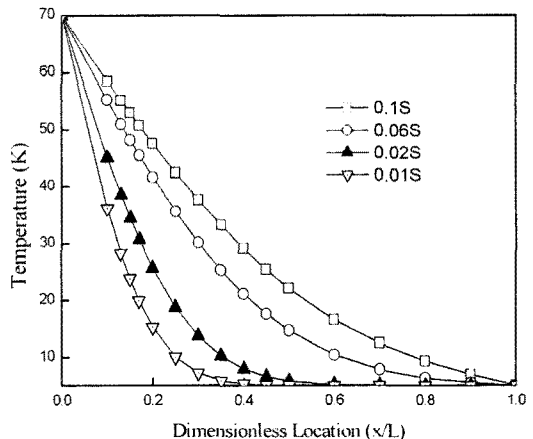


Fig. 3 Temperature change in a material calculated by the Fourier heat conduction.

여준다. 열유속의 상지연이 존재하는 비푸리에 열전도현상에서는 열전달속도가 유한하기 때문에 푸리에 열전도현상과는 달리 열전달방향으로 매질의 전구간이 동시에 열적교란을 받는 것이 아니라 열침투가 발생한 구역에서만 온도변화가 발생하므로 열파(Heat Wave)의 경계면에서 날카로운 파면(Wave Front)이 발생하며, 이 지점에서 온도가 불연속적으로 변하는 것으로 나타났다. 무차원시간  $\beta$ 가 0.5인 경우 열침투 깊이는  $0.5\delta$ , 무차원온도  $\theta(0.5,0.5) = 0.607$ 이며,  $\beta$ 가 1인 경우 열침투 깊이는  $1\delta$ , 무차원온도  $\theta(1,1) = 0.368$ ,  $\beta$ 가 2인 경우 열침투 깊이는  $2\delta$ , 무차원온도  $\theta(2,2) = 0.135$ , 그리고  $\beta$ 가 3인 경우 열침투 깊이는  $3\delta$ , 무차원온도  $\theta(3,3) = 0.050$ 이다.

Fig. 4에서 알 수 있듯이 열침투깊이가 시간경과  $\beta$ 에 따른 열침투깊이를 초과한 부분에서는 온도변화곡선이 불연속적으로 0으로 낮아지는데 이것은 열침투깊이를 초과한 구역에서는 열전달이 발생하지 않아 온도변화가 없기 때문이다. 따라서 Fig. 3과 Fig. 4의 비교로부터 C-V 열파모델에서는 시간이 흐를수록 열침투깊이가 증가하면서 온도가 상승하며, 따라서 열이 파(Wave)의 형태로 전달됨을 알 수 있다.

Fig. 5는 열유속 상지연시간이 0.7438 ps로 동일한 금과 은 재질의 열전달특성을 1 ps의 시간동안 비교한 것이다. 금과 은은 상지연시간이 같지만 은재질의 열전파속도가 14949 m/s로 금재질의 12961 m/s보다 크기 때문에 동일한 시간 내에 은재질속에서의 열침투깊이가 1.98 nm 더 깊게 나타났다. 뿐만 아니라 은의 온도상승이 금보다 높는데 이것은 동일한 가열조건하에서 은의 열저장능력, 즉 비열이 금보다 작아 온도상승폭이 크기 때문이다.

Fig. 6은 금재질과 동재질에서의 온도장과 열침투깊이를 보여주는 것으로서 1 ps의 시간동안 동과 금의 열침투 깊이는 각각 16.1, 12.96 nm로 금보다 상지연시간이 짧고 열전달속도가 빠른 동의 열침투깊이가 더 깊으며, 이에 반해 온도상승은 열저장능력이 작은 금의 경우가 더 높다.

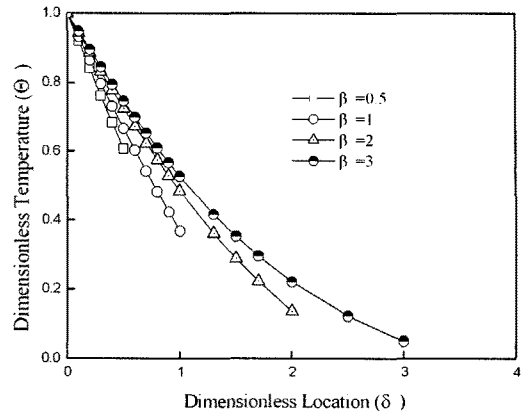


Fig. 4 Temperature change in a material and the depth of heat penetration by non-Fourier heat conduction.

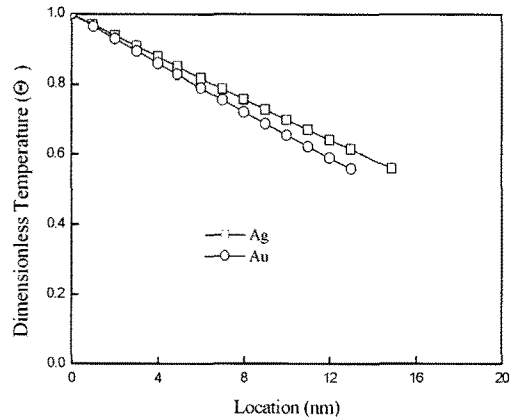


Fig. 5 Comparison of the temperature distribution and the depth of heat penetration between gold and silver

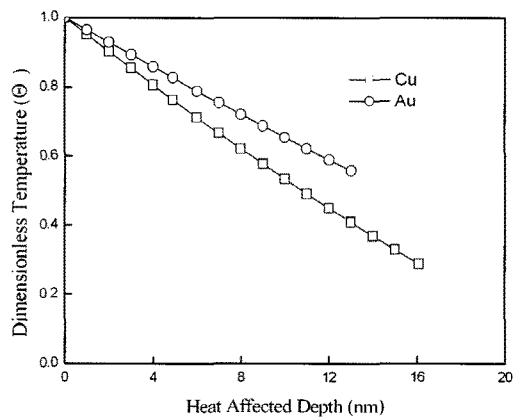


Fig. 6 Comparison of the temperature distribution and the depth of heat penetration between gold and copper

## 5. 결 론

본 연구에서는 비정상상태 푸리에 열전도현상과 열유속의 상지연이 존재하는 비푸리에 열전도현상에 대한 비교연구를 수행하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

비정상상태 푸리에 열전도현상에서는 열적교란이 무한대의 전파속도를 가지기 때문에 매질은 열전도방향의 전구간에 걸쳐 동시적으로 열적교란을 인식하며, 따라서 전구간에서 온도변화가 발생하게 된다.

하지만 열유속의 상지연이 존재하는 비푸리에 열전도현상에서는 열은 유한한 전파속도를 가지는 파의 형태로 매질내에 전달되며 매질내에서의 온도변화는 푸리에 열전도현상과는 달리 열침투구역에서만 발행하였고, 온도변화의 날카로운 파면을 관찰할 수 있었다. 뿐만 아니라 재질의 음속(Sound Velocity)과 관련되는 열파의 전파속도와 재질의 열저장능력인 비열 역시 열침투깊이와 온도상승에 영향을 미치는 요인임을 알 수 있었다. 즉 음속이 큰 재질일수록 열침투깊이가 깊었으며 동일한 가열 조건하에서 열저장능력인 비열이 큰 재질일수록 온도상승이 작았다.

## 후 기

본 연구는 교육과학기술부와 한국산업기술재단의 지역혁신인력양성사업과 경상대학교 2단계 BK21 지원에 의하여 이루어졌으며, 이에 감사드립니다.

## 참고문헌

- [1] F. P. Incropera and D. P. Dewit, Fundamentals of Heat and Mass transfer, John Wiley & Sons, New York, 1985.
- [2] M. N. Ozisik and Vick, "Propagation and Reflection of Thermal Wave in a Finite Medium", Journal of Heat &

Mass Transfer, Vol. 27, No. 10, pp. 1845-1854, 1984.

- [3] T. Q. Qiu and C. L. Tien, "Shot-pulse Laser Heating of Metals", Journal of Heat Transfer, Vol. 35, No. 3, pp. 719-726, 1992.
- [4] Zhong-Shan Deng and Jing Liu, "Non-Fourier Heat Conduction on prediction of Temperature Transients and Thermal Stress in Skin Cryopreservation", Journal of Thermal Stresses, Vol. 26, No. 8, pp. 779-798, 2003.
- [5] D. Y. Tzou, "An Engineering Assesment to the Relaxation Time in Thermal Wave Propagation", Journal of Heat & Mass Transfer, Vol. 36, No. 7, pp. 1845-1851, 1993.
- [6] M. Chester, "Second Sound in Solid" Physical Review, Vol. 131, No. 5, PP. 2013-2015, 1963.
- [7] D. Y. Tzou, Macro-to Microscale Heat Transfer, Taylor & Francis, Washington, 1997.

## 저 자 소 개



### 김창복(金昌福)

1969년 10월생, 1993년 연변대학교 농기계학과 졸업, 2004년 충북대학교 농업기계학과 석사과정수료(공학석사), 2007년 한국해양대학교 대학원 기관시스템학과 박사과정수료(공학박사), 2007~ 현재, 동원씨스텍 연구원.



### 김경근(金京根)

1974년 한국해양대학교 졸업, 공학박사, 현재 한국해양대학교 해사대학 기관시스템공학부 교수, 관심분야는 이젝터를 이용한 해양조선 및 육상플랜트설비, LNG 선박의 열설계, 저온 진공건조임.



### 정한식(鄭漢植)

1954년생, 1981년 동아대학교(학사),  
1983년 동아대학교 열유체공학(석사),  
1987년 동아대학교 열유체공학(박사),  
현재 경상대학교 기계항공공학부 교수



### 정효민(鄭孝玟)

1958년생, 1982년 부경대학교(학사),  
1987년 부경대학교(석사), 1992년 일본  
동경대학교 전산유체역학(박사), 현재  
경상대학교 기계항공공학부 교수.



### 최두열(崔斗烈)

1968년 7월생, 1993년 한국해양대학교  
기계공학과 졸업, 2008년 한국해양대하  
교 기계공학과 석사과정 (공학석사),  
2002~2007 한국열유체기술사 기술팀  
장, 2008~현재 경상대학교 대학원 정밀  
기계공학 박사과정



### 최순호(崔淳豪)

1961년 2월생, 1987년 한국해양대학교  
선박기계공학과 졸업(공학사), 1989년  
한국해양대학교 대학원 선박기계공학과  
수료(공학석사), 2003년 동경대학교 대  
학원 기계공학과 수료(공학박사), (주)현  
대엔지니어링, 한국원자력연구원 선임연  
구원을 거쳐 현재 DHP Eng., R&D  
Center 연구소장, Marquis Who's Who  
및 IBC 등 총 4회에 걸쳐 세계인명사전  
등재. 현재 판형 열교환기(Plate Heat  
Exchanger) 설계와 관련된 연구를 수행  
하고 있으며, 관심분야는 Nanoscale  
Heat and Mass Transfer Phenomenon임.