Communications of the Korean Statistical Society Vol. 15, No. 4, 2008, pp. 531–542

국소적 강력 단위근 검정

최보승[1)], 우진욱[2)], 박유성[3)]

요 약

시계열 자료를 분석할 때, 시계열 자료가 가지고 있는 추세를 제거하기 위하여 결정적 추세인 경우 회귀모형을 이용하고, 확률적 추세인 경우 차분하는 방법을 이용한다. 이 때 제거의 옳바른 기준이 되는 검정 방법이 단위근 검정이다. 그러나 기존의 Dickey-Fuller 검정 (Dickey와 Fuller, 1979)은 표본 수가 작고, 단위근에 가까울 경우 검정력이 낮으며, 베이지안 단위근 검정은 절차가 복잡하다. 본 논문에서는 기존의 두 방법들의 문제점을 해결하기 위하여, 전통적 Dickey-Fuller 검정 방법과 베이지안 방법을 결합한 형태의 검정방법으로 제안하였다. 제안된 검정방법은 모형 AR(1)에서 계수가 거의 1이거나 표본 수가 작을 경우, 기존의 Dickey-Fuller 검정보다 검정력이 높을 뿐만 아니라 일반적인 베이지안 방법 보다 절차가 간단한 검정법이 된다.

주요용어: 단위근; 베이지안; Dickey-Fuller 검정; 국소적 강력 검정.

1. 서론

시점 t에서 관찰된 시계열 자료를 y_t라 할 때, y_t의 구성요소는 추세, 정상과정 그리고 잡음과정으로 나눌 수 있다. 여기서 추세는 다시 결정적 추세와 확률보행과정인 확률적 추세로 나누어 구분할 수 있다. 결정적 추세의 경우 y_t에 추세형태를 가진 회귀모형으로 제거(detrending) 될 수 있으나, 확률적 추세의 경우 차분(differencing)을 통하여 추세를 제거해야 한다. 시계열 y_t가 추세를 가지고 있는가를 식별하기 위한 가장 기본적인 정보는 시도표를 이용하는 방법이다. 그러나 시계열의 결정적 추세에 잡음과정이 포함되어 있거나 결정적 추세에 확률적 추세가 포함된 경우에는 시도표를 이용한 추세의 식별이 어렵게 된다.

잘못된 추세 제거 과정이 수행된 경우 다음과 같은 문제점이 있다.

(1) 결정적 추세를 가지는 시계열을 차분한 경우, MA(1)과정을 따르게 되며 차분된 시계열($\nabla y_t = y_t - y_{t-1}$)은 정상성 조건은 만족하지만 단위근을 갖게 되어 가역성 조건을 위배하게 된다. 이를 과대차분의 문제라고 한다 (박유성, 김기환, 2004).

1) (136-701) 서울시 서울시 성북구 안암동 5가 1, 고려대학교 통계연구소, 연구교수.
E-mail: cbskust@gmail.com
2) (136-701) 서울시 종로구 세종로 211 광화문빌딩 9층, 이벨류코리아. E-mail: selffly@korea.ac.kr
3) (136-701) 서울시 성북구 안암동 5가 1, 고려대학교 통계학과, 교수.
교신저자: yspark@korea.ac.kr

(2) 확률적 추세는 회귀모형으로 제거한 경우에도 확률보행과정이 계속 남아있는 문제가 발생한다 (Enders, 2004).

이러한 문제를 예방하기 위하여 단위근의 존재 여부를 확인하는 작업은 시계열 자료를 이용한 분석 과정에서 반드시 거쳐야 하는 절차 가운데 하나라 할 수 있다. 이에 단위근의 존재여부를 확인하기 위한 단위근의 검정방법이 제안되었다. 가장 일반적인 단위근 검정으로는 Dickey와 Fuller의 방법(DF-test)이 있다. 그러나 DF-test는 시계열 자료가 자기 회귀과정을 따르고 자기회귀계수가 1에 가까울 경우나 관측수가 작을 때 검정력이 매우 낮다는 한계가 있다 (Dickey와 Fuller, 1979). 이러한 이유로 많은 사람들이 높은 검정력을 가지는 단위근 검정법에 대한 방법을 제안하여왔다. 그 가운데 Koop (1992), Sims (1988) 등의 베이지안(Bayesian) 접근에 근거한 단위근 검정방법을 제안하였다. 그러나 베이지안 단위근 검정 방법은 사전 분포를 어떻게 결정하냐에 따라 결과가 달라지며, 검정을 위한 계산 절차가 복잡한 단점을 가지고 있다 (Stock, 1991).

이에 본 연구에서는 전통적인 검정 방법과 베이지안 개념을 결합하여, 검정력을 높임과 동시에 단위근 과정에 대한 믿음의 정도에 따라 적용이 가능한 단위근 검정 방법을 고안하였다. 이후 본 연구의 전개 과정은 다음과 같다. 2절에서는 일반적인 단위근 검정 방법인 DF-test와 베이지안 단위근 검정을 소개하고, 3절에서는 본 연구에서 제안하는 검정 방법을 소개한다. 4절에서는 모의 실험의 절차 및 모의 실험 결과와 기존 DF-test와의 검정력을 비교하여 기술 한다. 끝으로 5절에서는 본 연구에 대한 결론과 앞으로의 연구 과제를 제시하였다.

2. 기존 단위근 검정 방법에 대한 소개

2.1. DF 검정(Dickey-Fuller Test)

시계열이 아래와 같이 AR(1) 과정을 따른다고 하자.

$$y_t = \phi y_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim iid\ N(0, \sigma^2).$$

귀무가설 $H_0 : \phi = 1$에 대한 DF-test의 검정통계량은

$$t_T = \frac{\hat{\phi} - 1}{\hat{\sigma}_{\phi_T}}$$

이다. 여기서 $\hat{\phi} = \sum_{t=1}^{T} y_t y_{t-1} / \sum_{t=1}^{T} y_t^2$이고 $\hat{\sigma}_{\phi_T}$는 $\hat{\phi}$의 표준오차를 나타낸다. 그러나 이 검정 통계량 t는 t-분포를 따르지 않고, 소위, 위너 과정(Wiener process)

$$t_T \xrightarrow{L} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)([W(1)^2 - 1])}{\left[\int_0^1 [W(r)]^2 dr\right]^{\frac{1}{2}}}$$

을 따르게 된다. 위너 과정을 따르는 분포는 일반적으로 알려진 분포가 아니기 때문에, Dickey와 Fuller (1997, 1981)는 몬테 칼로 모의실험을 통하여 단위근 검정에서의 임계값을 제시하였다. 하지만 표본의 크기가 작고, ϕ가 1에 가까운 경우 검정력이 떨어지는 단점이 있다 (Dickey와 Fuller, 1979; Hamilton, 1994).

2.2. 베이지안 단위근 검정(Bayesian Unit Root Test)

베이지안 단위근 검정에서는 검정하고자 하는 가설을 두 개를 선택한 후, 각 가설을 비교하기 위하여 Bayes factor (Kass와 Raftery, 1995)를 다음과 같이 계산한다.

$$K_{12} = \frac{P(\mathrm{Data} \mid H_1)}{P(\mathrm{Data} \mid H_2)},$$

이 때 $P(\mathrm{Data} \mid H_i)$ $(i = 1, 2)$는 다음과 같이 주어진다.

$$P(\mathrm{Data} \mid H_i) = \int P(\theta \mid H_i) P(\mathrm{Data} \mid \theta, H_i) d\theta,$$

여기서 θ는 모수 벡터, $P(\mathrm{Data} \mid \theta, H_i)$는 각 가설($H_i$)하에서의 우도함수, $P(\theta \mid H_i)$는 사전분포를 나타낸다. Bayes factor를 계산하기 위해선 적절한 사전분포를 선택하여야 한다. 사전분포를 결정하기 위한 충분한 정보를 가지고 있지 않을 때 무정보 사전분포를 이용할 수 있으나 이 경우 추정된 결과에 편의가 발생하거나 경우에 따라선 잘못된 신뢰구간을 도출하는 경우가 발생할 수 있다 (Stock, 1991). 그리고 정보사전분포(informative prior)를 부여하는 경우 사전분포에 따라 다른 결과가 나오는 문제가 발생하게 되고 이를 해결하기 위하여 Koop (1992)는 무정보사전분포(noninformative prior)가 가지는 임의성(arbitrariness)을 완화할 수 있는 정보사전분포를 제안하였다. 그러나 이와 같이 Bayes factor를 이용한 베이지안 단위근 검정 방법은 결과적으로 검정시 가능한 모든 가설들을 검토해 보아야 하는 절차의 까다로움과 주변우도함수(marginal likelihood)값을 계산하기 위하여 Markov Chain Monte Carlo(MCMC)기법을 이용하는 복잡한 계산과정을 거쳐야 하는 경우가 발생할 수 있다 (Chib, 1995; Chib과 Jeliazkov, 2001).

3. 국소적 강력 단위근 검정

2절에서와 같이 기존 단위근 검정 방법은 DF-test의 경우 ϕ가 1에 가깝고, 관측수가 작을 수록 검정력이 떨어지는 단점이 있으며, 베이지안 방법은 사전분포의 선택에 따른 결과의 차이와 계산과정이 복잡하다는 문제점이 있다. 이에 본 연구에서는 전통적인 검정 방법에 베이지안 방법을 결합하여 다음과 같은 검정 방법을 제안한다.

3.1. 사전 분포와 사후 분포

시계열 y_t, $t = 1, \ldots, T$가 정규분포

$$y_t \mid \theta_t \sim N(\theta_t, \sigma_y^2) \tag{3.1}$$

를 따른다고 할 때, 모평균 θ_t에 대한 적절한 사전분포를 결정한다. 본 연구에서는 모수 θ에 대한 사전분포를 할당하는데 있어서 시계열 자료가 가지는 자기 상관성을 반영하기 위하여 모수의 시차변수를 사전분포에 적용하는 방법으로 선형동태모형(linear dynamic model)을 이용하고자 하였다 (West와 Harrison, 1989). 특히 모형이 가질 수 있는 단위근 존재여부에 대한 검정을 수행하기 위하여 Reilly 등 (2001)이 이용한 방법과 유사하게 사전분포를 다음과 같이 정의하고자 하였다.

$$\theta_t \,|\, \theta_{t-1} \sim N(\theta_{t-1},\, \sigma_\theta^2), \tag{3.2}$$

이는 다시 $y_t = \theta_t + \epsilon_{yt}$와 $\theta_t = \theta_{t-1} + \epsilon_{\theta t}$로 표현할 수 있으며(단, $\epsilon_{yt} \sim\ iid\ N(0,\, \sigma_y^2)$, $\epsilon_{\theta t} \sim\ iid\ N(0,\, \sigma_\theta^2)$) 모수 θ_t와 θ_{t-1}의 관계에 의하여 관찰된 자료 y_t에 대한 단위근의 존재여부를 검증할 수 있게 된다. 식 (3.1)의 우도함수와 식 (3.2)의 사전분포함수를 이용하여 θ_t에 대한 사후분포는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}\theta_t \,|\, y_t &\sim N\left(\left[\frac{1}{\sigma_\theta^2} + \frac{1}{\sigma_y^2}\right]^{-1} \left(\frac{y_t}{\sigma_y^2} + \frac{\theta_{t-1}}{\sigma_\theta^2}\right),\, \left[\frac{1}{\sigma_\theta^2} + \frac{1}{\sigma_y^2}\right]^{-1}\right) \\ &\sim N\left(\frac{\sigma_y^2}{\sigma_\theta^2 + \sigma_y^2}\theta_{t-1} + \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_\theta^2 + \sigma_y^2} y_t,\, \left[\frac{1}{\sigma_\theta^2} + \frac{1}{\sigma_y^2}\right]^{-1}\right).\end{aligned} \tag{3.3}$$

본 연구에서는 식 (3.3)의 사후분포로부터 생성된 $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_T$를 가지고 시계열 y_t가 단위근을 가지고 있는가에 대한 검정 방법으로 전통적인 검정방법에 베이지안 방법을 함께 결합하는 국소적 강력 단위근 검정(Locally Powerful Unit Root Test Using Bayesian Approach: LP-URT) 방법을 제안하였다. 이를 위하여 사후분포 (3.3)는 다음과 같이 표현할 수 있으며,

$$\theta_t = \alpha_1 \theta_{t-1} + \alpha_2 y_t + \epsilon_\theta^*, \quad \epsilon_\theta^* \sim N(0,\, \sigma_\epsilon^2), \tag{3.4}$$

여기서 α_1, α_2는 σ_y^2와 σ_θ^2 비율인 가중값 이다($\alpha_1 + \alpha_2 = 1$). 식 (3.4)로부터 θ_t는 가중값 σ_y^2을 크게하면 α_1는 1에 점근하게 되어 사후분포 θ_t는 θ_{t-1}로부터 결정되며, σ_θ^2을 크게하면 α_2가 1로 점근하게 되어 사후분포 θ_t는 y_t로부터 결정 된다. 이와같은 특성을 이용하여 LP-URT는 σ_y^2와 σ_θ^2 비율을 조정함으로써 시계열 y_t에 대한 단위근 검정을 수행하게 된다. 이제 그 절차에 대하여 자세히 알아보자.

3.2. 국소적 강력 단위근 검정 절차

시계열 y_t가 단위근을 가지기 위해서는 기대값인 θ_t가 단위근을 가지게 되는 것이고, 이를 식으로 표현하면 사후분포 식 (3.3)로 부터 생성된 $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_T$는 다음과 같으며,

$$\theta_t = \gamma\theta_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim iid\ N(0, \sigma^2), \tag{3.5}$$

여기서 $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_T$가 단위근을 가지면 단위근 검정을 위한 가설은 다음과 같다.

$$H_0:\ \gamma = 1 \quad vs. \quad H_1:\ \gamma \neq 1. \tag{3.6}$$

가설 (3.6)에 대한 검정 절차는 다음과 같다.

(1) 식 (3.3)에서 생성된 $\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}, \ldots, \theta_T^{(1)}$를 생성한다.

(2) 식 (3.5)를 회귀직선에 적합시킨 후 $\hat{\gamma}$에 대한 추정치를 계산한다. 이 때 $\hat{\gamma}$는 일반적인 최소제곱 추정량이다.

(3) (1)과 (2)를 m회 반복하여 확률표본$\{\hat{\gamma}_i,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$를 얻는다.

(4) $\{\hat{\gamma}_i,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$를 순서대로 정렬하여 다음과 같은 순서 통계량 값들을 구한다.

$$\hat{\gamma}_{(1)} < \hat{\gamma}_{(2)} < \cdots < \hat{\gamma}_{(m)}.$$

(5) 이 값들을 이용하여 $100(1-\alpha)\%$ 신용구간(Credibility Interval)을 다음과 같이 정의한다.

$$\mathrm{CI}_{(1-\alpha)}(m) = \left(\hat{\gamma}_{[m(\frac{\alpha}{2})]}, \hat{\gamma}_{[m(1-(\frac{\alpha}{2}))]}\right). \tag{3.7}$$

(6) 가설에 대하여 $\mathrm{CI}_{(1-\alpha)}(m) \not\ni 1$이면 귀무가설 H_0를 기각한다.

이와 같은 절차를 반복적으로 수행함으로써 귀무가설에 대한 유의수준과 검정력을 구할 수 있다.

4. 모의실험

4.1. 모의실험 절차

이제 모의실험을 통하여 본 연구에서 제안하는 LP-URT 방법을 이용한 유의수준과 검정력을 계산하고 이를 DF-test와 비교를 수행한 후 LP-URT 방법이 가지는 장점에 대하여 설명한다. LP-URT를 수행하기 위한 모의실험 절차는 다음과 같다.

[**단계 1**] 임의의 σ_θ^2, σ_y^2를 정한다.

[**단계 2**] 임의의 ϕ를 정하여 $y_t = \phi y_{t-1} + \epsilon_{yt},\ \epsilon_{yt} \sim N(0, \sigma_y^2)$하에서 시계열 $\{y_t\}$, $(t = 1, 2, \ldots, 150)$를 생성한다.

[**단계 3**] [단계 2]에서 생성된 시계열 $\{y_t\}$, $(t = 1, 2, \ldots, 150)$를 이용하여, 사후분포 식 (3.3) 하에서 $\{\theta_t\}$, $(t = 1, 2, \ldots, 150)$를 생성한다.

[**단계 4**] [단계 3]에서 생성된 시계열 $\{\theta_t\}$, $(t = 1, 2, \ldots, 150)$ 가운데 초기 50개의 확률표본은 계열의 안정성을 위해 제거한다(burn-in sample).

[**단계 5**] $\{\theta_t\}$, $(t = 1, 2, \ldots, 150)$를 이용하여 식 (3.5)에서 $\hat{\gamma}$를 추정한다.

[**단계 6**] [단계 3] $\sim$ [단계 5]를 1000회 반복시행 한다.

표 4.1: $\sigma_y^2 = 10000$에서 σ_θ^2의 변화에 따른 H_0 기각 비율 변화

σ_θ^2	H_0 기각 비율
200	0.010
300	0.050
400	0.065
500	0.098
600	0.119
700	0.121
800	0.136

표 4.2: $\sigma_y^2 = 10^{a+2}$, $\sigma_\theta^2 = 3 \times 10^a$일 때, a의 변화에 따른 H_0 기각 비율

a	H_0 기각 비율
-2	0.050
-1	0.050
0	0.050
1	0.050
2	0.050

[**단계 7**] [단계 3] ~ [단계 6]를 통하여 생성된 1000개의 $\{\hat{\gamma}_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, 1000$들을 식 (3.7)을 이용하여 다음과 같은 표시함수를 정의한다.

$$I(\mathrm{CI}) = \begin{cases} 0, & \text{if } \mathrm{CI}_{95}(1000) \ni 1, \\ 1, & \text{if } \mathrm{CI}_{95}(1000) \not\ni 1. \end{cases}$$

[**단계 8**] [단계 2] ~ [단계 7]을 1000회 반복시행 한다.

[**단계 9**] [단계 8]을 통하여 구한 1000개의 표시자 $\{I(\mathrm{CI})_q\}$, $q = 1, 2, \ldots, 1000$를 이용하여 귀무가설(H_0)의 기각 비율을 다음과 같이 정의 한다.

$$H_0 \text{ 기각비율} = \frac{\sum_{q=1}^{1000} I(\mathrm{CI})_q}{1000}$$

이 기각비율을 이용하여 만약 생성된 y_t가 단위근을 가지면 유의수준을 의미하고, 그렇지 않으면 검정력을 의미한다.

4.2. LP-URT와 DF-test의 검정력 비교

모의실험 절차를 통하여 계산된 H_0 기각 비율은 귀무가설 하에서 유의 수준이 되며, 대립가설 하에서 검정력이 된다. 첫 단계로써 유의수준 5%되는 σ_y^2와 σ_θ^2을 결정하였다. 먼저 $\sigma_y^2 = 10000$으로 부여한 후에 σ_θ^2의 값을 변경시켜 가면서 시계열 y_t가 단위근이 존재하

표 4.3: 표본수 N에 따른 유의 수준 5%인 분산 비율

N	$\sigma_y^2 : \sigma_\theta^2$
25	100 : 12
50	100 : 6
100	100 : 3

표 4.4: 표본 수 N에 대한 H_0 기각 비율

ϕ	N=100		N=50		N=25	
	DF-test	LP-URT	DF-test	LP-URT	DF-test	LP-URT
1.00	0.047	0.050	0.051	0.050	0.056	0.050
0.99	0.041	0.078	0.041	0.070	0.046	0.063
0.98	0.069	0.118	0.047	0.104	0.040	0.089
0.97	0.098	0.158	0.059	0.112	0.043	0.110
0.96	0.140	0.178	0.072	0.135	0.046	0.116
0.95	0.199	0.203	0.087	0.152	0.053	0.129
0.94	0.268	0.215	0.110	0.163	0.060	0.133
0.93	0.347	0.240	0.131	0.162	0.067	0.161
0.92	0.422	0.258	0.157	0.176	0.074	0.181
0.91	0.506	0.278	0.182	0.189	0.082	0.193
0.90	0.593	0.299	0.216	0.203	0.090	0.196
0.80	0.990	0.495	0.635	0.337	0.226	0.285
0.70	1.000	0.641	0.924	0.452	0.456	0.346
0.60	1.000	0.749	0.994	0.554	0.687	0.407
0.50	1.000	0.839	1.000	0.636	0.857	0.464
0.40	1.000	0.894	1.000	0.718	0.951	0.521
0.30	1.000	0.922	1.000	0.779	0.985	0.558
0.20	1.000	0.944	1.000	0.820	0.998	0.609
0.10	1.000	0.963	1.000	0.855	1.000	0.653

도록, 즉 $\phi = 1$이 되게하도록 100개의 표본을 추출하여 귀무가설 H_0에 대한 기각비율을 계산하였다. 그 결과 표 4.1과 같다. 표 4.1을 보면, $\sigma_y^2 = 10000$이고, $\sigma_\theta^2 = 300$일 때, 유의수준 5%를 유지하고 있다. 즉 모수 θ에 대한 사후분포 평균의 가중치에 해당하는 두 분산의 비율이 ($\sigma_y^2 : \sigma_\theta^2 = 100 : 3$)이 되면 유의수준 5%를 만족한다 할 수 있다. 이를 확인하기 위하여 표 4.2와 같이 두 분산의 비율이 100 : 3이 유지되도록 하면서 두 분산의 값을 변경시켜 보면 분산의 크기에 상관없이 유의수준 5%가 유지됨을 볼 수 있다.

다음으로 표본수를 변화 시켰을 때, 유의수준 5%를 유지하는 분산의 비율을 확인하기 위하여 표본수를 25, 50, 100으로 조정하면서 이 때 유의수준 5%를 만족시키는 분산비율을 찾아 표 4.3과 같이 정리 하였다. 표본수를 감소시킴에 따라 σ_θ^2를 같은 비율로 증가시킬 때 유의수준 5%가 유지되는 것을 볼 수 있다. 표 4.2와 4.3의 결과로부터 표본수를 변경하였을 때 적절한 분산비율을 유지한다면 유의수준 5%를 만족시킬 수 있음을 확인할 수 있다.

표 4.5: $N = 100$, $\sigma_y^2 = 100$에서 σ_θ^2, ϕ의 변화에 따른 H_0 기각 비율 변화

ϕ	DF-test	σ_θ^2				
		3	3.75	5	7.5	15
1.00	0.047	0.050	0.068	0.100	0.126	0.207
0.99	0.041	0.078	0.110	0.157	0.237	0.358
0.98	0.069	0.118	0.164	0.226	0.319	0.503
0.97	0.098	0.158	0.196	0.268	0.379	0.589
0.96	0.140	0.178	0.234	0.321	0.450	0.672
0.95	0.199	0.203	0.274	0.372	0.518	0.746
0.94	0.268	0.215	0.300	0.416	0.565	0.787
0.93	0.347	0.240	0.333	0.453	0.618	0.823
0.92	0.422	0.258	0.368	0.498	0.662	0.860
0.91	0.506	0.278	0.399	0.530	0.709	0.881
0.90	0.593	0.299	0.434	0.575	0.734	0.904
0.80	0.990	0.495	0.691	0.819	0.929	0.990
0.70	1.000	0.641	0.836	0.941	0.985	0.999
0.60	1.000	0.749	0.928	0.980	0.997	1.000
0.50	1.000	0.839	0.969	0.994	0.999	1.000
0.40	1.000	0.894	0.985	0.998	1.000	1.000
0.30	1.000	0.922	0.993	0.999	1.000	1.000
0.20	1.000	0.944	0.998	1.000	1.000	1.000
0.10	1.000	0.963	0.999	1.000	1.000	1.000

이제 모의실험 결과를 살펴보자. 표 4.4는 모의실험 결과를 정리한 것으로써 관찰치 y_t에 대한 표본 수를 각 25, 50, 100으로 하고 모수의 값을 $\phi = 1$에서 0.1까지 감소시켜 가면서 변화하는 귀무가설 (3.6)의 기각비율을 DF-test와 본 연구에서 제안하고 있는 LP-URT 별로 정리한 것이다. $\phi = 1$일 때 LP-URT의 귀무가설 기각비율이 0.05로 모두 유의수준 5%를 만족하고 있음을 볼 수 있다. $\phi < 1$일 때 각 기각비율은 비교 대상인 두 검정 방법들의 검정력을 나타낸다고 할 수 있다. y_t에 대한 표본수가 100일 때는 $\phi = 0.95$일 때까지 LP-URT가 DF-test보다 검정력이 더 우수한 것을 볼 수 있으며 표본수가 50일 때와 25일 때 LP-URT는 ϕ의 값이 각각 0.91때와 0.80일 때 까지 검정력이 더 우수한 것을 볼 수 있다. 이를 통하여 ϕ가 1에 가깝고, 표본의 수가 작을 때 검정력이 약하다는 DF-test의 문제점을 LR-URT를 통하여 국소적으로 해결할 수 있다.

표 4.5는 표본수를 100으로 유지하면서 σ_θ^2의 값을 3에서 15까지 증가시켜 나가면서 기각비율의 변화를 정리한 표이다. σ_θ^2의 값이 커질수록 DF-test 보다 검정력이 큰 부분이 증가하고 있다. σ_y^2가 100일 때 표 4.4에서와 마찬가지로 ϕ가 0.95일 때까지 큰 검정력을 가지지만 σ_θ^2가 15일 때는 ϕ가 0.9가 될 때까지 LP-URT가 더 큰 검정력을 가진다. 유의 수준과 검정력은 σ_y^2과 σ_θ^2의 함수이다. 사후분포 θ_t는 σ_θ^2가 커질수록, 결과적으로 σ_y^2의 값이 작아지게 되고 이에 따라 y_t로부터 더 많은 정보를 얻게되어 단위근에 대한 믿음이 증가한다. 이 때 유의수준의 증가 속도와 검정력의 증가 속도를 비교해 보면 검정력의 증가 속도가 유의수준의 증가 속도보다 빠른 것을 확인할 수 있다. 그러므로 유의수준 5%에서 가

표 4.6: $N = 100$, $\sigma_\theta^2 = 3$에서 σ_y^2, ϕ의 변화에 따른 H_0 기각 비율 변화

ϕ	σ_y^2				
	121.4	130.7	143.6	145	146.6
1.00	0.039	0.027	0.015	0.014	0.014
0.99	0.050	0.033	0.018	0.018	0.018
0.98	0.067	0.050	0.030	0.030	0.028
0.97	0.101	0.081	0.050	0.049	0.047
0.96	0.123	0.098	0.052	0.050	0.047
0.95	0.129	0.103	0.056	0.055	0.050
0.94	0.143	0.093	0.057	0.054	0.049
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.20	0.493	0.325	0.142	0.123	0.107
0.10	0.516	0.339	0.143	0.133	0.116

설 H_0를 기각하게 된다면, 분산을 조절하여 높은 검정력 하에서 재검정을 함으로써 시계열 y_t가 단위근 과정이 아니라는 확신을 더 강하게 할 수 있다. 전통적인 네이만 피어슨 검정에서 귀무가설이 변화에 따라 검정력이 증가하는 것과는 달리 본 논문에서 제안하는 방법은 귀무가설의 변화없이 분산의 조절만으로 높은 검정력을 가질 수 있으며, 국소적으로 높은 검정력을 전체로 확장할 수 있다.

4.3. 단위근 과정이 아닌 시계열 y_t에 대한 단위근 검정

LP-URT는 LP-URT와 DF-test의 검정력 비교(4.2절)에서 두 분산의 비율에 따라 유의수준과 검정력이 달라지는 것을 볼 수 있었다. 본 연구에서 제안하고 있는 LP-URT 방법은 그 응용으로 시계열 y_t에 대한 모수 θ가 단위근을 가지는 과정을 따르고 ϕ가 1이 아닐 때 y_t가 단위근을 가지고 있는지에 대한 검정을 수행할 수 있다.

시계열 y_t의 기대값 θ가 사전분포로써 단위근을 따르는 과정를 가지고 시계열 y_t 자체는 단위근을 가지고 있지 않을 때 분산을 조절함으로써 y_t가 단위근을 가지고 있는지 여부에 대한 검정을 수행할 수 있다. 식 (3.1)로부터 σ_θ^2가 매우 작고 σ_y^2가 크다면 비록 θ는 단위근을 가진다 할지라도 y_t는 이 모수 θ로부터 상대적으로 멀리 떨어지게 되고 결국 단위근을 가지지 않는 계열을 따를 수 있게 된다. 이 때 θ에 대한 사후분포 식 (3.3)으로부터 θ_t는 θ_{t-1}에 의하여 결정되는 가능성이 커지게 되고 이를 통하여 검정을 수행할 수 있다. 본 연구에서는 모의실험을 통하여 단위근을 가지지 않는 경우, 즉 $\phi \neq 1$일 때 유의수준 5%를 만족시키는 분산의 비율을 찾아 표 4.6과 같이 정리하였다. 예를 들어 표본수가 100이고 σ_θ^2가 3일 때, σ_y^2이 121.4가 되면 ϕ가 0.99에서 유의수준이 5%가 되고 130.7이면 ϕ가 0.98에서 유의수준이 5%가 된다. 즉, ϕ가 0.99이나 0.98일 때 단위근을 가진다고 가정하여 단위근 검정을 수행 할 수 있다.이러한 방법을 이용하여 ϕ가 1이 아닌 경우 σ_y^2를 조절하여 유의수준 5%를 맞추어 단위근 검정을 수행 할 수 있다.

5. 결론

DF-test는 단위근 검정에 있어 가장 일반적인 방법으로 널리 이용되고 있다. 그러나 ϕ가 1에 가까운 경우 또는 표본수가 작을 때 낮은 검정력을 가지는 문제점을 가지고 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 베이지안 단위근 검정 등 다양한 검정 방법이 제안되고 있다. 그러나 베이지안 검정 방법에 경우 사전분포의 영향에 따라 결과가 달라지는 문제점과 절차의 복잡성 때문에 응용이 어렵다.

본 연구에서 제안한 LP-URT는 **(1)** DF-test가 가지고 있었던 문제점을 국소적(ϕ가 1에 가까울 때)으로 해결할 수 있으며, 국소적으로만 높은 검정력은 시계열 y_t의 분산을 조절하여 해결할 수 있다. 그리고 **(2)** 시계열 y_t의 분산 조절을 통하여 시계열 y_t의 계수 ϕ가 1이 아닐 때에도 단위근 검정을 할 수 있다.

정확한 단위근 검정은 시계열의 모형을 추정하는데 있어 중요한 절차이다. 본 연구에서 제안한 방법이 기존의 방법들이 가지는 문제점을 보완함과 동시에 시계열 y_t의 모수에 대한 관점에서 단위근 검정을 하는 것은 보다 정확한 시계열 모형을 추정하는 데 기여를 할 것으로 기대된다.

본 연구에서는 AR(1)과정을 따르는 시계열만을 고려하였다. 하지만 단위근 과정은 계절성 시계열 자료 또는 AR(1) 이상의 차수에서도 존재할 수 있다는 점을 고려하여 연구를 진행 시킬 수 있을 것이다.

참고문헌

박유성, 김기환 (2004). <SAS/ETS를 이용한 시계열자료분석 I>, 자유아카데미, 서울.

Chib, S. (1995). Marginal likelihood from the Gibbs output, *Journal of the American Statistical Association*, **90**, 1313–1321.

Chib, S. and Jeliazkov, I. (2001). Marginal likelihood from the Metropolis-Hastings output, *Journal of the American Statistical Association*, **96**, 270–281.

Dickey, D. A. and Fuller, W. A. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root, *Journal of the American Statistical Association*, **74**, 427–431.

Dickey, D. A. and Fuller, W. A. (1981). Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root, *Econometrica*, **49**, 1057–1072.

Enders, W. (2004). *Applied Econometric Time Series.* 2nd Edition. John Wiley & Sons, New York.

Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton.

Kass, R. E. and Raftery, A. E. (1995). Bayes factors, *Journal of the American Statistical Association*, **90**, 773–795.

Koop, G. (1992). 'Objective' Bayesian unit root tests, *Journal of Applied Econometrics*, **7**, 65–82.

Reilly, C., Gelman, A. and Katz, J. (2001). Poststratification without population level information on the poststratifying variable, with application to political polling, *Journal of the American Statistical Association*, **96**, 1–11.

Sims, C. A. (1988). Bayesian skepticism on unit-root econometrics, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **12**, 463–474.
Stock, J. H. (1991). Bayesian approaches to the 'unit root' problem: A comment, *Journal of Applied Econometrics*, **6**, 403–411.
West, M. and Harrison, J. (1989). *Bayesian Forecasting and Dynamic Models*, Springer, New York.

[2008년 3월 접수, 2008년 6월 채택]

Locally Powerful Unit-Root Test

Bo-Seung Choi[1), Jin Uk Woo[2), You Sung Park[3)

Abstract

The unit root test is the major tool for determining whether we use differencing or detrending to eliminate the trend from time series data. Dickey-Fuller test (Dickey and Fuller, 1979) has the low power of test when the sample size is small or the true coefficient of AR(1) process is almost unit root and the Bayesian unit root test has complicated testing procedure. We propose a new unit root testing procedure, which mixed Bayesian approach with the traditional testing procedure. Using simulation studies, our approach showed locally higher powers than Dickey-Fuller test when the sample size is small or the time series has almost unit root and simpler procedure than Bayesian unit root test procedure. Proposed testing procedure can be applied to the time series data that are not observed as process with unit root.

Keywords: Unit root; Bayesian unit root test; Dickey-Fuller test; locally powerful test.

1) Research professor, Institute of Statistics, Korea University, 1 Anam-Dong, Sungbuk-Gu, Seoul 136-701, Korea. E-mail: cbskust@gmail.com
2) E value Korea, Kwanghwamun Bldg. 9TH fl. 211 Sejongro, Jongrogu, Seoul 110-730, Korea. E-mail: selffly@korea.ac.kr
3) Professor, Department of Statistics, Korea University, 1 Anam-Dong, Sungbuk-Gu, Seoul 136-701, Korea. Correspondence: yspark@korea.ac.kr