

실험계획법과 유한요소법을 이용한 주축계의 세레이션 형상 최적설계

김의수[#], 김병민^{*}

The Shape Optimal Design of Shaft Serration Using Design of Experiment and Finite Element Method

Eui Soo Kim[#] and Byung Min Kim^{*}

ABSTRACT

To meet demand of big capacity and high speed rotation for washing machine, more stress from bending and twisting are complexly loaded onto the shaft supporting the horizontal drum, causing problems in fracture strength and fatigue life. Shafting system is mainly divided into flange and shaft. Shaft and flange connected by inserting shaft serration into flange on the process of die casting. When the system is operating, the gap is formed between serration and flange. But, Serration has various design factors and the optimal values can't be easily determined. Using a design of experiment (DOE) based on the FEM (Finite Element Method), this study was performed investigating the interaction effect between the various design factors as well as the main effect of the each design factor under bending, twist and vibration and proposed optimum design using box-behnken method among response surface derived from regression equation of simulation-based DOE.

Key Words : Design of experiment (실험계획법), Response surface method (반응표면법), Center composition method (중심합성법), Main effect (주효과), Interaction effect (교호효과)

1. 서론

세탁기는 세탁조의 형식에 따라 세탁조가 입식(stand-up type)일 경우에는 일반세탁기, 세탁조가 수평으로 놓여져 세탁을 하는 형식은 드럼세탁기로 분류하고 있다. 최근에는 생활폐단이 서구화 되고 생활수준이 높아지면서 드럼세탁기를 사용하는 소비자들이 점차 늘고 있는 추세이다. 근래의 드럼세탁기 동향은 환경 및 에너지에 대한 관심이 높아

지면서 행굼횟수를 줄여서 물의 사용량을 줄이고, 건조시간을 단축하여 전력 사용량을 줄이기 위한 목적으로 탈수속도를 고속화 하고 있다. 또한, 건강과 청결에 대한 관심이 높아지면서 매번 세탁시의 세탁량이 늘어나고, 이불빨래 등의 대형 세탁물에 대한 요구가 커짐에 따라 세탁기의 세탁용량을 대형화 하고 있다. 이와 같이 세탁기가 고속화 대형화 될수록 모터의 동력을 드럼으로 전달하는 주축계에는 더욱 큰 하중이 복합적으로 작용하여

☞ 접수일: 2007년 8월 27일; 게재승인일: 2008년 5월 26일

교신저자: 국립과학수사연구소

E-mail: eui44013@lycos.co.kr Tel. (02) 2600-4974

* 부산대학교 기계공학부

파단강도와 피로수명의 문제점을 발생시킨다. 주축계는 크게 드럼과 주축 사이에 위치하여 주축의 동력을 드럼으로 전달하면서 드럼백의 지지 역할을 하는 플랜지와 플랜지에 연결되어 모터의 동력을 드럼으로 전달하면서 주로 축계의 횡방향 하중에 대한 강성 역할을 하는 주축으로 나누어진다. 주축과 플랜지는 주축 끝단에 형성된 세레이션부가 다이캐스팅에 의한 플랜지 제작과정에서 인서트되어 일체화 된다. 그러나 주축의 세레이션부가 인서트되어 함께 다이캐스팅 될 때 서로 이종의 물질이 접촉하기 때문에 운용시 토크와 모멘트가 작용하면 다이캐스팅 재질(알루미늄)과 주축 재질(SM45C)사이에는 유동의 문제가 대두된다. 플랜지가 다이캐스팅이 아닌 프레스 작업에 의한 박판일 경우에 주축과의 접합시 용접을 사용하거나 플랜지와 주축을 함께 다이캐스팅하는 방법이 연구되어지고 있으나 생산성 및 원가 측면에서 대부분의 제조사가 정밀도와 강도를 요하는 주축의 경우는 강을 절삭하여 생산함으로 필연적으로 플랜지와 접합시 유동의 문제를 고려하지 않을 수 없다. 이러한 유동의 문제점을 해결하기 위해서는 세레이션 형상을 어떻게 결정하는가와 다이캐스팅 시 용융수지 온도, 사출속도, 사출압력, 수축율등의 성형 조건이 매우 중요하다. 이에 따라 성형공정중 충전 과정에서 금형내 수지의 유동상태가 틀려지기 때문이다. 다이캐스팅의 성형조건은 성형형상 및 용도등에 따라 달라지며, 여러가지 형상 및 용도에 따른 러너 및 게이트의 조건, 성형방법등에 대한 연구는 지금까지 활발하게 이루어져 왔으나 인서트 사출 및 다이캐스팅에 대한 연구는 제대로 이루어지지 못했으며, 특히 인서트 다이캐스팅시 이종재료 접합부에 대한 유동의 문제를 다룬 논문은 전례를 찾아 보기 힘들다.¹⁻⁹

이에 본 연구에서는 다이캐스팅 공정에 관해선 전문지식을 가지고 또 다른 차원의 연구가 수행되어야함으로 형상결정에 대해서만 국한하여 실험계획법과 유한요소법을 병행 사용하여 정동적 부하시 인서트 다이캐스팅의 접촉부 유동에 영향을 미치는 세레이션 형상설계변수에 대해 통계학에 기초한 주효과, 교호효과 분석을 통해서 그 영향도를 파악하여 상관관계인 회귀모형함수를 추정하고 이를 박스벤켄법을 이용한 다중 반응표면 최적화 루틴을 사용하여 최적의 세레이션 형상을 제시하고자 한다.

2. 세레이션 형상 설계

2.1 적용대상

드럼식 세탁기는 외형을 구성하는 프레임내에 세탁시 필요한 세제액이나 세탁수를 저장하는 원통형의 터브(tub)가 중심축이 수평방향이 되도록 수개의 스프링과 댐퍼에 의해 캐비닛에 지지되어 있으며, 터브 내에는 세탁이나 탈수시 직접 세탁물을 담고서 회전하는 드럼이 터브와 동일한 중심축이 되도록 장착되어 있는데 드럼의 후면부는 드럼의 회전시 발생하는 하중을 지지하기 위하여 플랜지(flange)라고 하는 구조물이 장착되며 주축은은 플랜지에 인서트 다이캐스팅 될 때 고정되어서 터브의 베어링에 지지된다. 드럼의 회전축 끝단에는 풀리(pulley)를 장착하여 모터의 구동축과 드럼의 풀리를 벨트로 연결하거나 드럼의 회전축에 모터를 바로 장착한 구조를 가지며, 모터는 정류자 모터를 주로 사용한다.

2.2 세레이션 형상 결정 요소

Fig. 1에서 보듯 주축에 있어서 세레이션 부분이라 함은 주축 끝 단에 톱니 모양의 홈들을 형성하여 플랜지와 주축의 인서트 다이캐스팅시 접촉면적을 넓혀 접합력을 키우는 역할을 담당하는 부분을 말한다. 따라서 서로 이종의 물질이 인서트되어 접촉하고 있으므로 주축 세레이션 부분의 설계에 있어서 가장 고려해야 할 점은 실제로 세탁기 내구성 시험에서 가장 문제가 되고 있는 다이캐스팅 재질과 주축 재질 사이의 유동 문제이다. 그 원인은 다이 캐스팅 재질의 국부적인 미성형뿐만 아니라 서로 접촉하고 있는 재질 사이의 비틀림에 의한 파괴 및 접촉면 사이의 마찰 등으로 그 메커니즘이 간단치 않다. 이러한 유동의 문제를 사전에 방지 하기 위해 본 연구에서는 미리 두 가지 측면을 고려하여 설계에 반영하고자 하였다. 첫째는 주축의 세레이션 부분과 이에 상응하는 플랜지의 다이캐스팅 부분의 발생응력이 어느 한 부분에 비해 큰 경우 높은 응력이 생기는 부분이 강도면에서 먼저 약해져 부하의 반복에 의해 간격이 생기고 결국 파단에 이르므로 운용시 두 부분 모두에 안전율을 고려한 파단하중 이하의 최소응력이 걸리도록 설계하는 것이 바람직하다. 강도면에서 다이캐스팅 재질로 사용되는 ADC12 종과 주축의 재질인 SM45C 의 파단강도가 300MPa 로 비슷

한 값을 가지고 있기 때문에 동일한 안전율 6 을 적용하여 그 이하의 응력이 작용하도록 세레이션의 변수들을 선정하는 것이다. 둘째, 플랜지와 세레이션부의 접촉력을 키우는 것인데 접촉력은 접촉면적에 비례함으로 접촉면의 면적을 크게하는 것이 유동측면에서는 이롭다. 우선 설계변수의 선정에 앞서 세레이션부 이(teeth)형태가 결정되어야 되는데 본 연구에서는 삼각형, 네모형, 마른모꼴등의 여러형태 중 접촉면적 및 가공성면에서 유리한 삼각형을 채택하였다. 결정된 이(teeth) 형태에 대해서 세레이션의 형상을 결정짓는 설계변수는 내접경, 외접경, 이의 갯수의 3 가지 변수이며 그외 이의 각도, 접촉선길이는 이 3 가지 설계변수의 결정에 의해 자동으로 얻어지는 값이다. 접촉면적은 축대칭 형상을 가진 세레이션 형태에선 접촉선길이로 표현할 수 있고 내접경 결정시에는 주축의 지름을 고려하여야 하나 그외 설계변수는 형상결정에 대한 자유도를 많이 가지고 있다.

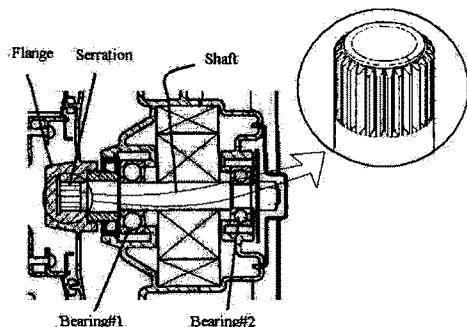


Fig. 1 Definition of serration in shaft

2.3 다이캐스팅의 미성형

다이캐스팅은 기계에 의한 자동화율이 높고, 양산시 제조원가 저감, 치수정도, 대량생산 가능, 부품의 경량화 등의 양산성과 고품질을 겸비하고 있기 때문에 각종 공업 제품 및 장식 부품의 제조에 널리 이용되고 있다. 특히 고품질, 고정밀도 제품에 대한 요구 증대 때문에 제반 주조방법중 가장 주목받고 있는 기술이다. 사출성형에 비해 치수가 정확하므로 다듬질할 필요가 거의 없는 장점 외에 기계적 성질이 우수하며, 대량생산이 가능하다는 특징이 있고 제품으로는 자동차부품이 많으며 전기기기, 광학기기, 차량, 방직기, 건축, 계측기의 부품 등이 있다. 이러한 사출 및 다이캐스팅의 주요

성형불량에는 미성형(short shot), 웨드라인(weld line), 싱크마크(sink mark), 몰드마크(mold mark), 성형품의 변형등이 있으며 특히 미성형은 인서트 다이캐스팅시 인서트 되는 소재의 형상에 따라 유동저항이 커져 불량 가능성이 매우 큰 요인중에 하나이다. 미성형이 일어날 수 있는 경우는 유동 저항이 클때, 캐비티 내(内) 공기가 빠지지 못할 때, 수지의 유동성이 부족할 때, 게이트 밸런스(gate balance)가 맞지 않을 때, 수지의 유동경로 중 일부가 이물질로 막혀서 충전 부족이 되었을 때, 호퍼(hopper)로부터 원료 공급상태가 불안정할 때등 많은 경우가 있다. 향후 결정된 최적의 세레이션 형상에 있어 사출성형 해석을 수행함으로써 여러 성형조건에서 형상에 의존도가 큰 이러한 미성형 불량을 예방하기 위한 측면에서 최적의 세레이션 형상을 검증하기 위한 과정이 수반되어야 할 것으로 사료되나 사출공정에 관해선 전문지식과 기술을 가지고 또 다른 차원의 연구가 수행되어야 함으로 본 연구에서는 형상결정에 대해 강도와 접촉면적 측면에서만 국한하여 연구를 진행하고자 한다.

3. 세레이션 형상 최적설계

3.1 설계변수의 선정과 요인설계

본 연구에서는 주축의 세레이션 형상 결정에 있어서 운용시 토크와 모멘트가 작용하는 환경에서 다이캐스팅 재질인 플랜지와 강재질인 주축의 이종물질간의 인서트 사출로 인해 사용시 축계의 파괴를 일으킬 수 있는 유동 문제를 해결하기 위해 세레이션 형상 설계변수를 선정하여 각각의 설계변수들이 운용 환경시 접합부에 발생하는 전단응력 및 이종물질간의 접촉면적에 기여하는 영향을 파악하고 이를 다중 반응표면법(response surface method)을 통해 근사적으로 수식화하여 최종적으로 최적형상을 제시하고자 한다. 최적설계 조건으로서 첫째는 주축의 세레이션 부분과 이에 대응하는 플랜지의 다이캐스팅 부분에 안전율을 고려한 파단하중 이하의 최소응력이 걸리도록 설계하는 것이며 둘째, 플랜지와 세레이션부의 접촉면의 면적을 최고의 값으로 설정하는 것이다. 실험계획법은 우선 설계인자와 수준을 결정하고 특성치에 영향을 미치는 각각의 설계변수들을 조합을 통해 많은 수의 설계 모델들을 만들고 실제로 제작하여

하나씩 검증하여야 한다. 설계변수들의 조합으로 나오는 각각의 설계 모델들을 실제 제작하여 실험하면 상당한 설계시간과 비용이 소요된다. 이에 본 논문에서는 실험계획법과 유한요소법을 병행 사용하여 목적하고자 하는 설계모델을 찾는 방법을 제안, 검토하였다. 설정된 설계변수와 사용기호는 Fig. 2 와 같으며, Table 1 은 실험계획을 위한 설계인자와 그 인자들의 수준을 보여주고 Table 2 에 실험순서에 따른 실험조건을 직교배열표로 나타내었다. 여기서 DS1은 내접경, DS2는 외접경, TNO는 이의 갯수를 나타낸다.

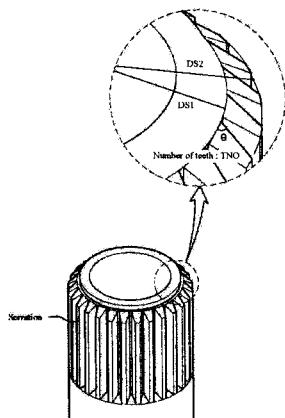


Fig. 2 Design factor and nomenclature

Table 1 Design factor and level

(mm)	DS1	DS2	TNO
-1	30	40	30
+1	35	45	40

Table 2 Orthogonal arrays

Experiment No.	DS1	DS2	TNO
1	30	40	30
2	35	40	30
3	30	45	30
4	35	45	30
5	30	40	40
6	35	40	40
7	30	45	40
8	35	45	40

3.2 유한요소해석 및 분석결과

각 인자에 따른 발생응력 및 접촉선길이의 변화등을 알아보기 위해 상용 프로그램인 ANSYS 를 이용하여 유한요소 해석(finite element analysis)을 수행하였다. 적용된 소재의 물성치는 세레이션의 경우는 일반 환봉재료로 많이 사용되는 SM45C, 플랜지는 ADC12 종으로써 생성된 유한요소모델 형상은 Fig. 3 과 같다. 세레이션부와 플랜지간의 접합부만을 모델링하였으며, 메쉬의 개수는 약 10000 개로 플랜지는 표면을 완전구속으로 고정시켰고, 세레이션부에는 3kW 모터를 장착하여 1800 rpm 운용시 작용하는 토크를 경계조건으로 부여하였고 세레이션부와 플랜지간의 접합은 사출 후 조건을 Sticking friction 로 가정하여 마찰계수를 0.5 로 적용하여 3D tool 로 시뮬레이션을 수행하였다.

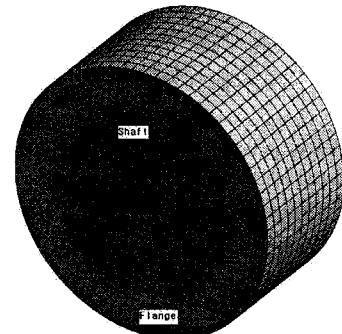


Fig. 3 F.E model for factor analysis

Fig. 4, Fig. 5 에 각 조건에 대한 해석결과를 정리하여 나타내었다. 배열표에 설정된 실험조건에 따라 유한요소 해석을 수행한 후 SS, SF, SITA, CL 등의 값을 얻었고 여기서, SS 는 주축의 세레이션 부에 발생하는 최대등가응력, SF 플랜지 다이캐스팅 부분의 최대등가응력, SITA 는 이와 내접경이 이루는 각도, CL 은 결정된 이의 각도에서 세레이션부와 플랜지간의 접촉선길이를 나타낸다. 이 결과값들에 대해 값들간에 서로 상관관계를 가지고 있는지, 발생응력과 접촉선길이에 가장 영향을 미치는 인자는 무엇인지, 요인분석시 고려되어야 할 결과값들은 무엇인지 등을 결정하기 위해 요인분

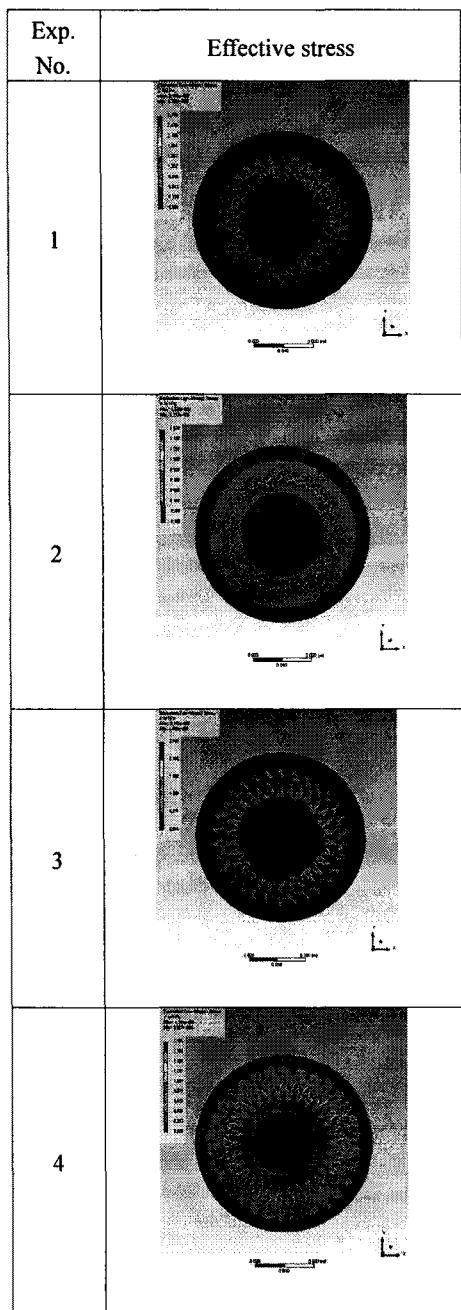


Fig. 4 Result of ANSYS for factor analysis (1~4)

석 전에 먼저 상관분석을 수행 하였다. Table 3 에 각각의 해석값들에 대한 상관분석 결과를 나타내며 상관계수와 회귀식을 정리하여 보여준다. 분석 결과를 살펴보면 SS 와 SF 간, SITA 와 CL 간에는 강

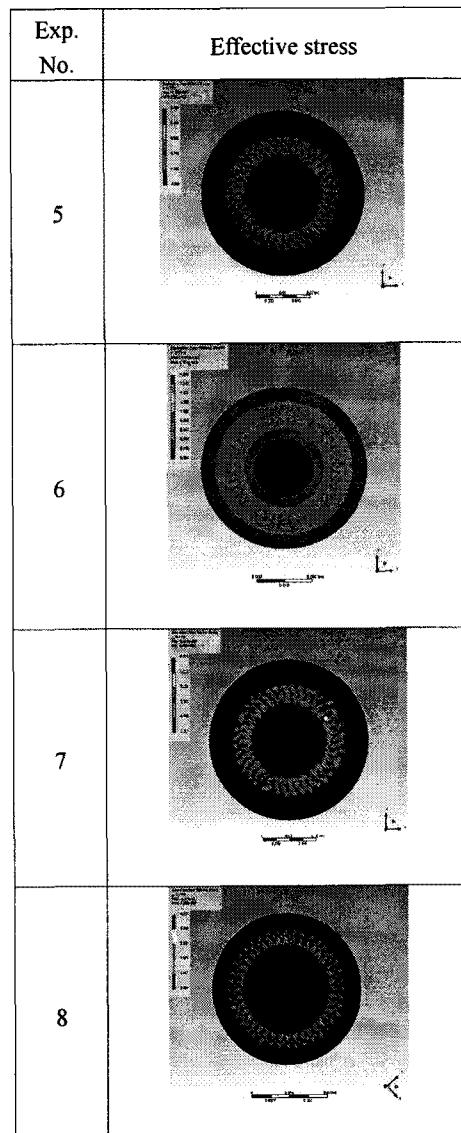


Fig. 5 Result of ANSYS for factor analysis (5~8)

한 상관관계를 가지고 있기 때문에 SS 와 CL 간, SF 와 CL, SS 와 SITA 간, SF 와 SITA 간에 동일한 정도의 상관관계가 성립함을 알 수 있고 결국 요인분석 시 설계변수에 대한 반응값을 SS 와 CL 두 가지만을 고려하면 전체 결과값에 대한 분석이 이루어 질 수 있으며 미치는 영향 정도도 파악할 수 있음을 알 수 있다.

각 인자의 변화에 따른 발생응력 및 접촉선길이의 영향을 요인분석 과정을 통해 주효과 교호효

과 그래프를 얻음으로써 파악하였다. 플랜지 디아 캐스팅 부분의 발생응력은 주축의 세레이션부에 발생하는 응력과 상관관계에서 보듯 같이 비례하여 증감하므로 세레이션부에 발생하는 응력의 영향분석으로 이를 짐작할 수 있기에 요인분석과정은 생략해도 무방하다고 판단된다. 요인분석 결과를 상세히 검토해 보면, Fig. 6 과 Fig. 7 에서 DS1, DS2, TNO 의 모든 설계인자의 변화가 응력에 미치는 영향이 매우 크며 DS1, TNO 는 응력과 음의 강한 상관관계를 가지는 반면 DS2 는 응력과 양의 강한 상관관계를 가지고 DS2 와 TNO 간의 교호작용은 존재함을 알 수 있다. 또한 접합면적과 관련된 접촉선길이와 설계변수와의 관계를 살펴보면, Fig. 8 과 Fig. 9 에서 DS1, DS2, TNO 의 모든 설계인자에 대해서 CL 은 크게 영향을 받고 그 영향 또한 설계인자가 응력에 미치는 정도와 관계가 유사하고 인간간 교호작용은 존재하지 않는다. 고로 모든 설계인자는 발생응력과 접촉면적을 고려한 최적 형상 설계시 그 조건을 구하는데 필수설계인자라 할 수 있다.

Table 3 Result of correlation and regression analysis

Predictor	Response	Correlation coefficient	Regression equation
CL	SS	0.86	SS = 8.30- 0.0122CL+0.000 232CL**2
SITA	SS	0.73	SS = 695.3- 22.22SITA+0.180 1SITA**2
CL	SF	0.86	SF = 7.97- 0.01006CL+0.00 0080CL**2
SITA	SF	0.73	SF = 217.4- 6.816SITA+0.055 34SITA**2
SF	SS	0.99	SS = - 13.90+3.215SF
CL	SITA	0.92	SITA = 48.64+0.06094C L

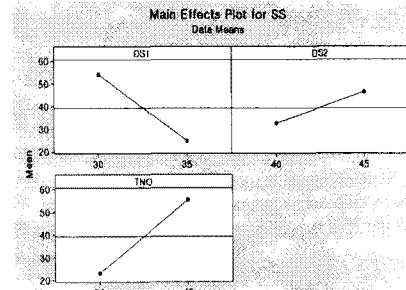


Fig. 6 Main effect plot for SS

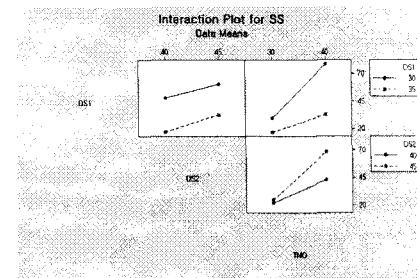


Fig. 7 Interaction effect plot for SS

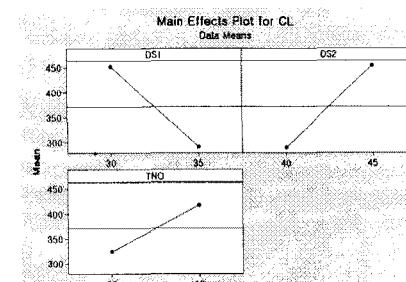


Fig. 8 Main effect plot for CL

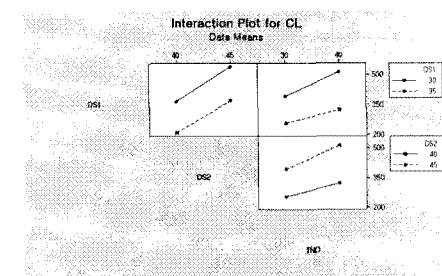


Fig. 9 Interaction effect plot for CL

3.3 최적설계

분석된 내용을 통해 MINITAB 에서 지원하는 반응표면설계 중 박스-벤큰(box-behnken)법을 사용

한 다중반응최적법으로 주축 세레이션부에 발생응력을 최소화하고 접촉선길이를 통해 계산되어진 접촉면적이 최대가 되는 주축 세레이션 최적 형상값을 제시하고자 한다. 박스-벤켄법은 1, 2 차항을 효율적으로 추정하고자 할 모든 실험이 안정된 공정 영역에서 이루어진다고 확신할 때 활용하며 중심합성법보다 실험횟수가 적어도 실험이 너무 비용이 많이 들거나 현실적으로 실험이 불가능 할 경우에 유리하게 사용할 수 있다. 본 연구에서는 유의하지 않는 인자와 교호작용들을 제외하고 최적의 세레이션 형상을 찾기 위해 박스-벤켄법 실험순서에 따른 실험조건을 구성하였으며 실험조건에 따라 유한요소해석을 수행하였다. 실험데이타와 가장 적합한 축소회귀모델을 찾기 위해 다수의 항에 몇 차례 재적합시키는 과정을 반복하였으며 그 결과 회귀모델에 의해 얻어진 최적 요인 수준을 Fig. 10에 나타내었다. 유의한 교호작용이 하나 이상 존재함으로 이를 포함하는 완전 2 차항으로 반응표면 모델을 축소시켰고 그 결과 반응 값의 호감도 d 가 1인 적합한 모델을 찾을 수 있었다. 단지 이의 개수가 35ea인 경우 이(teeth) 하나의 각도가 무한 소수점으로 나타나는 문제가 있어 36ea로 수정이 불가피하며 이에 따라 SITA와 CL 값을 재결정하였다. Table 4에 신뢰도 95%일 경우 결정된 주축 세레이션부의 최적 형상치수를 정리해서 나타내었고, Fig. 11는 수정된 최종 형상에 대한 시뮬레이션 결과값을 보여준다.

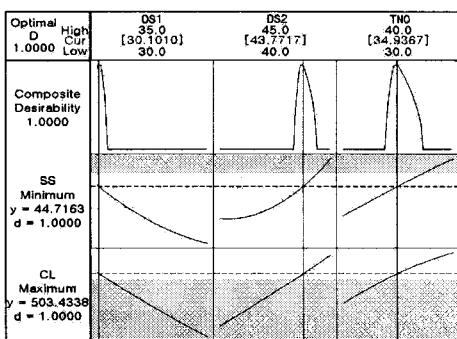


Fig. 10 Result of response surface optimize

Table 4 Optimum design values of shaft

Result	DS1 (mm)	DS2 (mm)	TNO (mm)	SS (MPa)	CL (mm)
Value	30	43.8	36	45.1	496.8

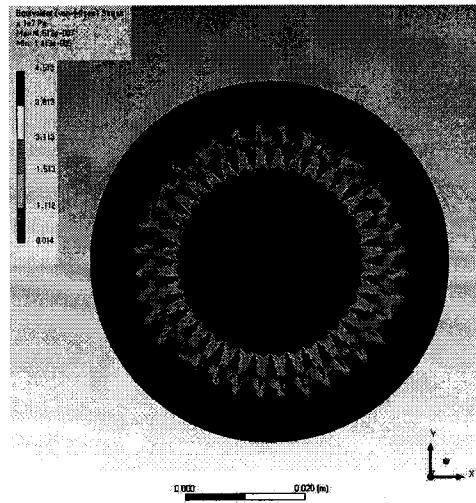


Fig. 11 Result of analysis for final configuration

4. 결론

본 연구에서는 상용프로그램인 MINITAB을 활용한 실험계획법과 유한요소법을 병행 사용하여 주축의 세레이션부에 발생하는 응력과 플랜지 다이캐스팅 부분의 발생응력 그리고 인서트 사출시 이종재료간 접촉면적에 영향을 미치는 설계변수를 선정하고 해석값들간의 상관관계를 통해 그 영향도를 파악하여 회귀모형함수를 추정하고 이를 박스-벤켄법을 이용한 다중반응표면 최적화 루틴을 사용하여 최적의 고속털수용 세탁기 주축 세레이션 형상을 제시하였다. 최적설계에 의해 결정된 주축 세레이션의 형상은 DS1=30mm, DS2=43.7mm, TNO=36ea로 안전율을 6으로 고려할 때 1800rp 운용시 주축 세레이션부에 발생응력 SS=45.1MPa이 요구되어지는 파단응력 50MPa를 만족하는 값이며 이에 대응하는 플랜지 다이캐스팅부의 발생응력 SF=17.4MPa도 여기에 부합됨을 알 수 있다. 이 경우 계산되어지는 접촉선 길이는 496.8mm로 응력이 최소가 되면서 접촉면적을 크게 하기 위한 연구가 목적에 맞게 제대로 수행되었다고 판단되어진다. 본 연구를 토대로 제시된 주축의 세레이션 최적형상이 실제로 바람직한지 검증하기 위해서 플랜지와 함께 실험을 통한 축계 강도 평가가 이루어져야 할 것으로 사료되어진다. 또한 향후 결정된 최적에 세레이션 형상에 있어 사출성형 해석을 수행함으로써 여러 성형조건에서

형상에 의존도가 큰 미성형 불량을 예방하기 위한 측면에서 최적의 세레이션 형상을 검증하기 위한 과정이 수반되어야 한다. 접합부분의 성형공정 중 충진과정에 있어서 수지의 유동상태를 해석함으로써 미성형 측면에서 세레이션 형상과 수지의 충진 속도, 충진율과의 관계를 파악하여 미리 세레이션 최적 형상 결정에 반영한다면 더욱 효과적이고 효율적인 설계방법으로 적은 시간과 비용을 요구하는 제품을 선정하는데 도움이 될 것으로 사료된다.

참고문헌

1. Son, Y. S., Hwang, G. S., Tak, S. H. and Lyu, S. G., "A Study on the Optimism Design of the Gear Tooth Profile," Spring conference of KSME, pp. 2711-2716, 2007.
2. Lee, K. W., Ban, J. S., Kim, G. H. and Cho, K. Z., "A Study on Stress Analysis of Spur Gear using FEM," JKSP, Vol. 19, No. 2, pp. 171-176, 2002.
3. Lee, K. W., Ban, J. S., Kim, G. H., Cho, K. Z. and Song, T. J., "Stress Analysis for Tooth Modification of High speed Gear," Spring conference of KSMTE, pp. 816-819, 2002.
4. Hwang, G. S., Lyu, S. K. and Ahn, I. H., "A Study on the Optimism Design of the Gear Tooth Profile," Spring conference of KSMTE, pp. 97-98, 2006.
5. Kim, Y. S., "A Study of Shrinkage Phenomena on Injection Molded Pa Metal Insert," JKSAE, Vol. 7, No. 9, pp. 112-118, 1999.
6. Kim, K. S., Lho, T. J., Oh, Y. H., Jeong, H. S. and Kim, K. I., "A Study on Al-Insert Molding Analysis using Moldflow," Autumn conference of KSPE, pp. 275-276, 2006.
7. Cornell, R. W., "Compliance and Stress Sensitivity of Spur Gear Teeth," Journal of Mechanical Design, Vol. 103, No. 6, pp. 447-459, 1981.
8. Refaat, M. H. and Meguid, S. A., "On the contact stress analysis of spur gears using variational inequalities," Computer & Structures, Vol. 57, No. 5, pp. 871-882, 1995.
9. Arikán, A. S., "Dynamic load and contact stress analysis of spur gears," Adv. Design Automation, Trans ASME, Vol. 91, No. 3, pp. 85-91, 1991.