대 한 조 선 학 회 논 문 집
제45권 제4호 2008년 8월

Journal of the Society of Naval Architects of Korea
Vol. 45, No. 4, pp. 389-395, August 2008
DOI: 10.3744/SNAK.2008.45.4.389

상하동요하는 2차원 원주의 고유진동수

이승준†*

충남대학교 선박해양공학과*

Natural Frequency of 2-dimensional Heaving Circular Cylinder

Seung-Joon Lee†*

Dept. Naval Architecture & Ocean Eng., Chungnam National University*

Abstract

It is very well known that the natural frequency of an oscillating body on the free surface is determinable only after the added mass is given. However, it is hard to find analytical investigations in which actually the natural frequency is obtained. Difficulties arise from the fact that in order to determine the natural frequency we need to compute the added mass at least for a range of frequencies, and to solve an equation where the frequency is a variable. In this study, first, a formula is obtained for the added mass, and then an equation for finding the natural frequency is defined and solved by Newton`s iteration. It is confirmed that the formula shows a good agreement with the results given by Ursell(1949), and the value of natural frequency is reduced by 21.5% compared to the pre-natural frequency, which is obtained without considering the effect of added mass.

※Keywords: Natural frequency(고유진동수), Heaving circular cylinder(상하동요하는 원주), Added mass(부가질량), Newton`s iteration(Newton 의 반복법)

1. 서론

자유수면 상에서 상하동요하는 2차원 원주의 부가질량에 대한 연구는 Ursell(1949) 이래로 Hwang and Kim(1973), Rhee and Hwang(1978) 등의 많은 연구자들에 의해 이루어져 왔다.

접수일: 2008년 5월 14일, 승인일: 2008년 7월 24일
†교신저자: sjoonlee@cnu.ac.kr, 010-9480-9459

Ursell 의 방법을 사용하여 부가질량을 얻는 경우, 속도포텐셜에 포함된 미정계수들을 얻기 위해서는 수치적인 방법을 사용하여 선형 연립방정식을 풀어야 하므로 통상 부가질량은 도표 또는 표의 형태로 주어진다.

한편 고유진동수는 복원력계수를 물체의 질량과 부가질량의 합으로 주어지는 가상질량으로 나누어 얻을 수 있는데, 부가질량이 진동수의 함수이므로 결국은 고유진동수를 정의하는 식은 진동수를

변수로 하는 방정식이 되어 고유진동수를 얻기 위해서는 이 방정식의 해를 구해야 한다. 물론 실험으로 고유진동수를 정하는 것은 그리 어려운 일이 아니지만, 본 논문에서는 이론적으로 고유진동수를 구하는 방법을 기술하고자 하였으며, 먼저 상하동요하는 2차원 원주에 대해 고유진동수를 구하는 방법을 확립함으로써 차후 선박의 6-자유도 동요에 대한 고유진동수를 구하는 방법의 지침으로 삼고자 한다. 특히 3차원 물체의 부가질량은 대부분 수치적인 방법으로 얻어지고 있으므로, 여기서는 수치적인 방법에 과도하게 의존하지 않는 근사적인 방법을 확립하는 것을 목표로 하였다.

2. 문제의 정식화와 근사해

2.1 Ursell 의 방법; 2 항-근사

좌표계는 Ursell(1949)을 따라 Fig. 1 과 같이 y 축이 연직 하방을 향하는 좌수 직각 좌표계로 잡고, 반경 a 인 원주는 평형 상태에서 하반부가 유체와 접촉하고 있으며, 따라서 원점은 원주의 중심과 일치한다고 가정한다. 또 (r,θ) 는 극좌표계이며, θ 는 y -축으로부터 잰 각이다.

Ursell(1949)은 상하동요하는 2차원 원주에 대한 문제를 생각하면서 이상유체의 비회전성유동을 가정하고 속도포텐셜 ϕ 를 도입하였는데, ϕ 는 진행파를 나타내는 부분과 물체 근처에서의 국부교란 유동을 나타내는 두 부분의 합으로 보았다. 또한 유동의 대칭성을 가정할 수 있으므로 Fig. 1에 보인 바와 같이 제 1 사분면만 고려하기로 한다.

그의 식을 다음에 보이는데, 본 논문에서는 부가질량에 대한 근사식을 얻고자 하고 있으므로 국부교란 유동을 나타내는 부분에 대해 2항-근사를 하기로 한다

$$\frac{\pi\sigma}{gb}\phi=\left(\Phi_c+\sum_{j=1}^{2}p_{2j}R_{2j}\right)\cos\sigma t+\left(\Phi_s+\sum_{j=1}^{2}q_{2j}R_{2j}\right)\sin\sigma t \tag{1}$$

여기서 σ 는 상하동요의 진동수, g 는 중력가속

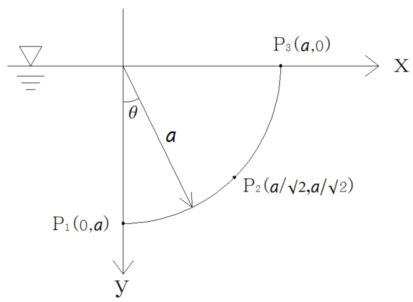


Fig. 1 Co-ordinate system

도, b 는 물체로부터 상당히 떨어진 곳에서 물체의 운동에 의해 생성, 전파되는 진행파, 즉 방사파의 진폭으로 미지량이며, Φ_c , Φ_s 는 진행파, R_{2j} 는 국부교란 유동을 나타내는 항으로 각각 다음과 같이 주어진다.

$$\Phi_c=\pi e^{-Ky}\cos Kx,\ K=\frac{\sigma^2}{g} \tag{2}$$

$$\Phi_s=\pi e^{-Ky}\sin Kx-\int_0^\infty\frac{k\cos ky-K\sin ky}{k^2+K^2}e^{-kx}dk \tag{3}$$

$$R_{2j}=a^{2j}\left(\frac{\cos 2j\theta}{r^{2j}}+\frac{K}{2j-1}\frac{\cos(2j-1)\theta}{r^{2j-1}}\right) \tag{4}$$

따라서 식 (1)에는 다섯 개의 미지량, b 와 미정계수 p_2 , p_4 , q_2 , q_4 가 포함되어 있으며, 이들을 구하기 위해 물체 표면 상의 경계조건을 만족시켜야 한다.

원주의 상하동요는 다음 식으로 주어지며,

$$y=l\cos(\sigma t+\varepsilon) \tag{5}$$

여기서 l 은 상하동요의 진폭, ε 은 상하동요와 방사파의 위상차로 역시 미지량이며, 결국 미지량은 여섯 개임을 알 수 있다.

2.2 물체 경계조건의 만족

앞 절에서 논의한 여섯 개의 미지량을 결정하기

위해 물체 표면 상에서의 경계조건을 Fig. 1 에 보인 바와 같이 P_1, P_2, P_3 의 세 점에서 만족시키기로 한다. 물체 표면 상에서의 경계조건은 다음과 같이 주어지므로,

$$\frac{\partial\phi}{\partial r}=\frac{dy}{dt}\cos\theta=-\sigma l\sin(\sigma t+\varepsilon)\cos\theta,\quad \text{on } r=a \tag{6}$$

먼저 점 P_1 에서 경계조건을 만족시키면 다음을 얻는다.

$$\frac{b}{l}A=\pi\xi\sin\varepsilon,\ \frac{b}{l}B=\pi\xi\cos\varepsilon \tag{7}$$

여기서 $\xi=Ka$ 로 무차원량이며, A, B 는 각각 다음 식으로 주어진다.

$$A=\pi\xi e^{-\xi}+(2+\xi)p_2+(4+\xi)p_4 \tag{8}$$

$$B=\xi e^{-\xi}Ei(\xi)-1+(2+\xi)q_2+(4+\xi)q_4 \tag{9}$$

여기서 Ei 는 지수적분(exponential integral)이다(부록 참조). 또한 식 (7)에서 ε 을 소거하여 다음을 얻는다.

$$\frac{b}{l}=\frac{\pi\xi}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{10}$$

A, B 는 미정계수만의 함수로 주어지므로 미정계수를 구하면 식 (10)으로부터 b 를 얻고, 이를 식 (7)에 대입하여 ε 을 얻을 수 있다. 따라서 경계조건을 점 P_1 에서 만족시키는 것은 미정계수와 두 개의 미지량 b, ε 을 분리하는(decouple) 역할을 하므로, 근사해를 얻을 때 매우 중요한 역할을 하고 있음을 알 수 있다.

점 P_2 에서의 경계조건으로부터 다음을 얻는데,

$$2p_2+2\alpha p_4=\beta_1,\quad 2q_2+2\alpha q_4=\gamma_1 \tag{11}$$

여기서 α, β_1, γ_1 은 각각 다음 식으로 주어진다.

$$\alpha=2(1+\sqrt{2})+\xi \tag{12}$$

$$\beta_1=-\pi\xi\left\{e^{-\xi}-e^{-\xi'}\left(\cos\xi'+\sin\xi'\right)\right\},\quad \xi'=\xi/\sqrt{2} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\gamma_1=&-\xi e^{-\xi}Ei(\xi)+\xi e^{-\xi'}\{\left(\cos\xi'+\sin\xi'\right)(ci_1+si_2)\\&+\left(\cos\xi'-\sin\xi'\right)\left(ci_2-si_1-\pi\right)\}+1-\sqrt{2}\end{aligned} \tag{14}$$

여기서 ci_1, ci_2, si_1, si_2 는 다음 식으로 정의되는 코싸인적분(cosine integral) ci 와 싸인적분(sine integral) si 의 실수부와 허수부이다(부록 참조).

$$ci(\xi'+i\xi')=ci_1+ici_2,\ si(\xi'+i\xi')=si_1+isi_2 \tag{15}$$

점 P_3 에서의 경계조건으로부터 다음을 얻으며,

$$2p_2-4p_4=\beta_2,\quad 2q_2-4q_4=\gamma_2 \tag{16}$$

여기서 β_2, γ_2 는 각각 다음 식으로 주어진다.

$$\beta_2=\pi\xi\sin\xi \tag{17}$$

$$\gamma_2=-\pi\xi\cos\xi-1+\xi\left\{\sin\xi ci(\xi)-\cos\xi si(\xi)\right\} \tag{18}$$

식 (11), (16)은 네 개의 미정계수에 대한 1 차 연립방정식이므로 다음과 같이 쉽게 해를 구할 수 있다.

$$(p_2,\ q_2)=\frac{1}{\Delta}(2\beta_1+\alpha\beta_2,\ 2\gamma_1+\alpha\gamma_2) \tag{19}$$

$$(p_4,\ q_4)=\frac{1}{\Delta}(\beta_1-\beta_2,\ \gamma_1-\gamma_2),\quad \Delta=4+2\alpha \tag{20}$$

식 (19), (20)으로 주어지는 미정계수를 사용하여 b 와 ε 을 얻고, 또 유동장 내부의 임의의 점에서 속도포텐셜을 계산할 수 있다.

Ursell(1949)은 식 (1)에서 6항을 취하였고, 그 계수들을 결정하는데, 경계조건을 10점에서 적용하여 최소자승법을 사용한 반면, 본 논문에서는 2항-근사를 사용하였고, 경계조건도 3점에서 만족

시킨 차이점에 유의한다.

2.3 압력적분과 부가질량

앞 절에서 얻은 속도포텐셜을 이용하여 먼저 물체 표면 상의 압력을 얻고, 이 압력의 연직방향 성분을 적분하여 부가질량을 얻을 수 있다. 먼저 Bernoulli 방정식으로부터 동압(dynamic pressure) p 를 다음과 같이 얻으며,

$$p = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{21}$$

여기서 ρ 는 유체의 밀도이다. 따라서 물체 표면에서의 압력 p_B 의 연직방향 성분을 적분하여 연직방향으로 작용하는 힘 F_y 를 다음과 같이 얻는다.

$$F_y = -2a\int_0^{\pi/2} p_B \cos\theta d\theta = \frac{2\rho gab}{\pi}\left(M\cos\sigma t - N\sin\sigma t\right) \tag{22}$$

여기서 M , N 은 각각 다음 식으로 주어진다.

$$M = e^{-\xi}\left\{\frac{1}{\xi}\left(1-\frac{\pi}{2}\right)(1-\cos\xi) + \frac{E}{\xi}\sin\xi - \left(\frac{\pi}{2}+si(\xi)\right) + M_1\right\} + \left(\frac{1}{3}+\frac{\pi}{4}\xi\right)q_2 - \frac{q_4}{15} \tag{23}$$

$$N = \pi e^{-\xi}\left(\frac{1}{\xi}\sin\xi + \frac{\xi}{6}\Re f_3\right) + \left(\frac{1}{3}+\frac{\pi}{4}\xi\right)p_2 - \frac{p_4}{15} \tag{24}$$

단 E 와 M_1 은 다음과 같고,

$$E = \ln\xi + C + \xi + \frac{\xi^2}{4} - \xi^3,\ \ C = \text{Euler 상수} = 0.5772 \tag{25}$$

$$M_1 = \frac{1}{6}\left\{(E-1)\xi - \xi^2 + 9\xi^3\right\}\Re f_3 - \frac{1}{20}\left(\xi^2 + 9\xi^3 - 9\xi^4\right)\Re f_5 - \frac{1}{7}\xi^4\Re f_7 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{\xi}{2}+\frac{\xi^2}{2}-3\xi^3\right)\Im f_2 + \frac{\xi}{12}(2-\pi)\Im f_3 + \frac{1}{16}\left(\xi+\xi^2+9\xi^3-6\xi^4\right)\Im f_4 - \frac{1}{6}\left(\frac{\xi^3}{8}-\xi^4\right)\Im f_6 \tag{26}$$

$$f_n = \Phi(n; n+1; i\xi) \tag{27}$$

여기서 $\Re$ 과 $\Im$ 는 각각 그 뒤에 나오는 함수의 실수부와 허수부를 뜻하며, Φ 는 축중초월기하함수(degenerated hypergeometric function)이다(부록 참조, Abramowitz & Stegun, 1965). 진행파에 상응하는 부분을 적분하는 데는 $\mu = \sin\theta$ 의 치환을 이용하고, 또 지수함수에 대해서는 다음 근사를 사용하였으며,

$$e^{-\xi\cos\theta} = e^{-\xi\sqrt{1-\mu^2}} \cong e^{-\xi}\left(1+\frac{\xi}{2}\mu^2\right) \tag{28}$$

같은 맥락에서 코싸인적분과 싸인적분에 대해서도 다음과 같은 근사를 사용하였다.

$$ci(z) \cong C + \ln z - \frac{z^2}{4},\quad si(z) \cong -\frac{\pi}{2} + z - \frac{z^3}{18} \tag{29}$$

아울러 적분 과정에서 나타나는 다음 함수에 대해서도 다음과 같은 근사를 사용하였다.

$$\sqrt{1-\mu^2} \cong 1 - \frac{\mu^2}{2},\quad \cot\theta \cong \frac{1}{\mu} - \frac{\mu}{3} \tag{30}$$

이와 같은 근사는 수직 방향 힘의 주요 부분이 μ 즉 θ 가 작을 때의 값들에 의해 주어질 것이라는 물리적 통찰에 상응한다.

식 (22)로 주어지는 연직방향의 힘을 상하동요의 가속도 성분과 속도 성분으로 다음과 같이 분해할 수 있는데,

$$F_y = -m_a\frac{d^2y}{dt^2} - d\frac{dy}{dt} \tag{31}$$

여기서 m_a 는 부가질량, d 는 조파감쇠이다. F_y 와 가속도를 $(\cos\sigma t,\ \sin\sigma t)$ −평면 상에서 고려하기로 하면, 음의 가속도 방향의 단위벡터 $\hat{e}$ 는 식 (7)과 식 (10)으로부터 다음과 같이 얻는다.

$$\hat{e} = (-\cos\varepsilon, \sin\varepsilon) = \frac{(B, -A)}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{32}$$

따라서 부가질량은 다음과 같으며,

$$m_a = \hat{e}\cdot(M, -N)\frac{2\rho gab}{\pi\sigma^2 l} = 2\rho a^2 \frac{MB + NA}{A^2 + B^2} \tag{33}$$

원주의 질량 $m = \rho\pi a^2 / 2$ 이므로, 부가질량계수 C_a를 다음과 같이 얻는다.

$$C_a = \frac{m_a}{m} = \frac{4}{\pi}\frac{MB + NA}{A^2 + B^2} \tag{34}$$

3. 계산 결과와 검토

3.1 부가질량계수

앞 장에서 얻은 결과들을 이용하여 부가질량계수를 얻을 수 있고, Fig. 2에 그 결과를 보였다. Ursell(1949)이 얻은 8개의 ξ 값에 대한 결과를 Table 1에 보였으며, Fig. 2에도 표시하였다.

전반적으로 Ursell의 값보다 약간 작은 값을 주고 있는 것을 확인할 수 있으며, $\xi \to 0$ 그리고

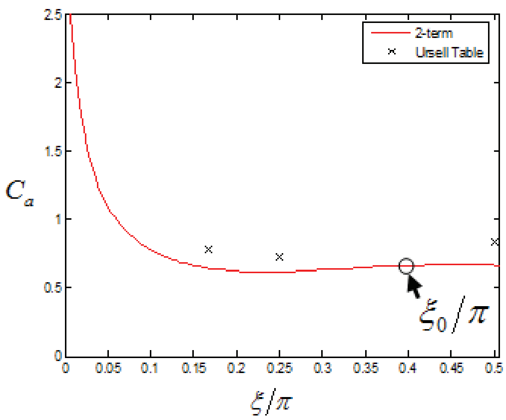


Fig. 2 Heave added mass coefficient of 2-dimensional circular cylinder

Table 1 Heave added mass coefficient of Ursell(1949)

ξ/π	0	1/6	1/4	1/2	2/3	3/4	1	5/4	3/2
$C_a(\xi)$	∞	0.78	0.73	0.83	0.91	0.94	1.01	1.06	1.09

$\xi \to \infty$ 인 두 경우에 대한 부가질량계수의 극한값을 구하면 다음과 같다. 먼저 $\xi \to 0$ 인 경우에는 다음을 얻으므로,

$$A \to \pi\xi,\ B \to 4\left(1 - \sqrt{2}\right),\ M \to \ln\xi,\ N \to \pi \tag{35}$$

다음 결과를 얻는다.

$$C_a \to \frac{1 + \sqrt{2}}{\pi}\ln\frac{1}{\xi} \tag{36}$$

이 결과는 Wehausen & Laitone(1960)이 얻은 보다 엄밀한 극한해인 다음 결과와 비교하면

$$C_a \to \frac{8}{\pi^2}\ln\frac{1}{\xi} \tag{37}$$

약 5% 적은 값을 주고 있음을 확인할 수 있다. 국부교란 유동을 2항으로 근사한 결과임을 생각하면 매우 만족스러운 것으로 보인다.

한편 $\xi \to \infty$ 인 경우에는 다음을 얻으므로,

$$\begin{aligned} (A, B) &\to \frac{\pi}{2}\xi^2(\sin\xi, -\cos\xi) \\ (M, N) &\to \frac{\pi^2}{8}\xi^2(-\cos\xi, \sin\xi) \end{aligned} \tag{38}$$

다음 결과를 얻는다.

$$C_a \to 1 \tag{39}$$

이 결과는 엄밀해와 정확히 일치한다.

3.2 2 차원 원주의 고유진동수

2차원 원주의 고유진동수는 물론 부가질량을 알아야 결정되는데, 먼저 부가질량의 영향을 고려하지 않았을 때의 고유진동수, 즉 원고유진동수(pre-natural frequency) ω_0 는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\omega_0^2 = \frac{2\rho g a}{\pi \rho a^2 / 2} = \frac{4}{\pi}\frac{g}{a} \tag{40}$$

따라서 ω_0 에 상응하는 무차원 파수 ξ_0 는 다음과 같고,

$$\xi_0 = \frac{\omega_0^2 a}{g} = \frac{4}{\pi} \tag{41}$$

이 값은 Fig. 2에도 표시하였다. 부가질량을 고려한 경우의 고유진동수 ω_n 은 다음과 같이 정의할 수 있으므로,

$$\omega_n^2 = \frac{2\rho g a}{m + m_a} = \frac{\omega_0^2}{1 + C_a(\omega_n)} \tag{42}$$

이에 상응하는 무차원 파수 ξ_n 은 다음 식으로부터 얻을 수 있다.

$$\xi_n = \frac{\omega_n^2 a}{g} = \frac{\xi_0}{1 + C_a(\xi_n)} \tag{43}$$

식 (43)으로부터 ξ_n 을 얻기 위해서 Newton 의 반복법(Newton`s iteration method)를 사용하기로 하고, 영(zero)의 값을 구하고자 하는 방정식을 다음과 같이 정의하면

$$f(\xi) = \xi\{1 + C_a(\xi)\} - \xi_0 \tag{44}$$

반복자(iterator)는 다음 식으로 주어진다.

$$\xi_{j+1} = \xi_j - \frac{f(\xi_j)}{f'(\xi_j)}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots \tag{45}$$

이 식에 따르면 $\dfrac{dC_a}{d\xi}$ 를 구해야 하는데, 이 값은 수치적으로 얻을 수 있으므로, 식 (45)를 사용하여 다음 결과를 얻을 수 있다.

$$\xi_n = 0.616\xi_0, \quad \omega_n = 0.785\omega_0 \tag{46}$$

따라서 부가질량을 고려하면 2 차원 원주의 고유진동수는 원고유진동수 ω_0 보다 21.5%정도 감소함을 알 수 있다.

4. 결론과 향후 과제

본 논문에서는 상하동요하는 2차원 원주의 고유진동수를 예측하기 위해 Ursell(1949)의 방법을 사용하되, 국부교란 유동을 나타내는데 2항-근사를 도입하여 계산의 정확도는 떨어지지만 닫힌 형태(closed form)로 주어지는 부가질량계수를 얻었으며, 이를 이용하여 고유진동수를 구하였다.

진동수 또는 파수가 매우 작거나 매우 큰 두 가지 극한의 경우에 부가질량계수는 보다 엄밀한 해석의 결과와 잘 일치하는 결과를 보여 주었고, 2항-근사의 결과는 Ursell(1949)의 해보다 약간 작은 값을 주는 것을 확인하였으며, 전반적으로 만족할 만한 결과를 얻었다.

2차원 원주의 원고유진동수에 상응하는 무차원 파수는 $4/\pi$ 인데, 부가질량을 고려한 고유진동수에 상응하는 무차원 파수는 38.4% 감소하고, 고유진동수는 21.5% 감소하는 결과를 얻었다. 이에 대한 실험적 확인은 향후 과제로 진행될 것이다.

후 기

본 논문은 충남대학교 2007년도 교내 연구력강화 사업의 과제로 수행된 연구

결과입니다.

참 고 문 헌

- Abramowitz, M. & Stegun, I. A., 1965, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications.
- Hwang, J.H. and Kim, Yoon-Ho, 1973, " On the added mass and damping of chine sections in heaving oscillation," Journal of the Society of Naval Architects of Korea, Vol. 10, No. 1, pp. 33-44.
- Rhee, K.P. and Hwang, J.H. 1978, " On the hydrodynamic characteristics of submerged cylinders heaving in water of a finite depth," Journal of the Society of Naval Architects of Korea, Vol. 15, No. 1, pp. 1-6.
- Ursell, F., 1949, " On the heaving motion of a circular cylinder on the surface of a fluid" , Quarterly Jouranl of Mechanics & Applied Mathematics, Vol. 2, pp. 215-231.
- Wehausen, J. V. & Laitone, E. V., 1960, Surface Waves, Encyclopedia of Physics, Springer-Verlag.

부 록

지수적분, 싸인적분, 코싸인적분, 축중초월기하함수에 대해 본 논문에서 사용된 형태를 정리하여 혼동을 피하고자 하였다.

먼저 지수적분은 실수 자변수에 대해 다음과 같은 정의를 사용하였고 그 변화를 Fig. 3에 보였다

$$Ei(x) = \ln|x| + C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!k}, \; x \neq 0 \quad \text{(A1)}$$

다음으로 자변수가 복소수인 싸인적분과 코싸인적분을 다음과 같이 정의하였으며, 그 변화를 Fig. 4에 보였다

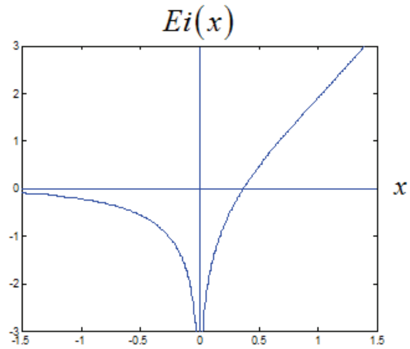


Fig. 3 Exponential integral

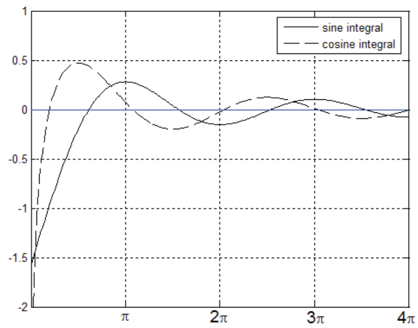


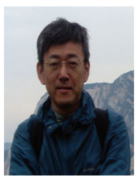
Fig. 4 Sine integral & cosine integral

$$si(z) = -\frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)} \quad \text{(A2)}$$

$$ci(z) = \ln z + C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-)^k z^{2k}}{(2k)!2k}, \; z \neq 0 \quad \text{(A3)}$$

또한 축중초월함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\Phi(j,n;z) = 1 + \frac{j}{n} z + \frac{j(j+1)}{n(n+1)} \frac{z^2}{2!} + \cdots \quad \text{(A4)}$$



< 이 승 준 >