

관리도의 민감도와 공정능력 분석*

The Sensitivity of \bar{X} Control Chart and Process Capability Analysis

이 종 성**
Lee, Jong Seong

Abstract

C_p and other process capability indices are used extensively in industry. However, They are inadequate and widely misused. In a practical application, process average μ is almost always drifted by various assignable causes in process. And control charts will not detect these shifts in process average.

In this study, incorporating these undetected shifts, a new capability analysis method is introduced.

키워드 : 관리도, 공정능력분석

Keywords : control chart, process capability analysis

1. 서론

공정능력의 평가는 생산자와 구매자 사이의 거래에서 매우 중요하다. 생산자의 공정능력이 구매자가 요구하는 만큼의 품질수준을 충족할 수 있어야 정상적인 거래가 이루어질 수 있기 때문이다. 공정능력을 하나의 수치로 간단하게 나타내는 방법으로 공정능력지수 C_p 가 널리 사용되고 있는데, 이는 간단하기는 하지만 여러 가지 복잡한 특성을 내포하고 있는 공정의 능력을 제대로 표현하지 못하고 있다[1].

공정의 여러 특성을 공정능력평가에 반영하기

위한 연구가 여러 연구자들에 의해 수행되어 왔다. Clemens[2]과 Somerville and Montgomery[3] 등은 특성치가 비정규분포인 경우에 대해 연구하였으며, Chan, et al.[4]은 공정평균이 설계규격의 중심과 일치하지 않는 경우에 공정능력을 평가는 문제를 연구하였다. Boyles[5]은 다구찌 방법을 공정능력 평가에 이용하는 독특한 방법을 제안한 바 있다.

일반적으로 공정은 관리상태에서 시작하여 작업이 진행됨에 따라 여러 가지 공정 입력요소의 변화 및 공정 자체의 악화로 인해 관리상태를 이탈하게 된다. 이러한 공정변화 가장 흔한 경우가 공정 평균치의 변화이다. 보통 이러한 공정평균의 변화를 탐지하는 수단으로 \bar{X} 관리도가 사용되고 있는데, 관리도 상에서 공정변화가 탐지되면 정해진 규칙(OCAP, Out-of-Control-Action Plan)에 따라 수정 조치를 취하게 되어 공정은 다시 본래의

* 2005년도 강원대학교 학술연구조성비로 연구하였음

** 강원대학교 산업공학과 교수, 공학박사

관리 상태로 회복되게 된다. 그러나 실제 현장에서는 모든 공정의 변화가 관리도에 의해 탐지되지 못하고, 그냥 지나치게 되는 경우가 많으며 따라서 공정의 실제 출하품질은 관리도 운용에서 의도한 목표품질보다 나쁜 경우가 일반적이다[그림1 참조].

본 연구에서는 공정평균의 변화에 대한 \bar{X} 관리도의 탐지능력을 반영하는 공정능력 평가방법을 제시하고자 하였다. 본 연구에서 제안한 방법에 의하면 관리도의 탐지능력 부족으로 인한 공정 목표품질과 실제 산출물의 출하품질 간의 차이를 반영하는 공정능력 평가를 가능하게 할 것으로 사료된다.

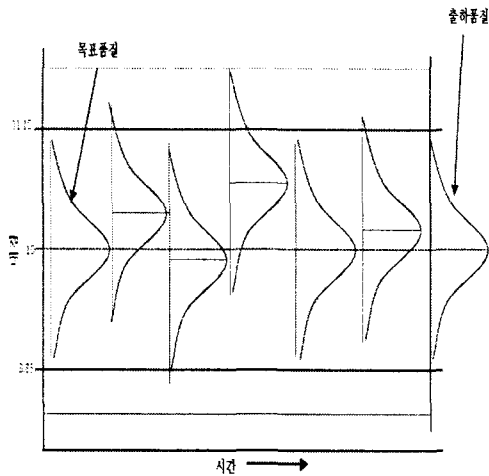


그림1 탐지되지 못한 평균치 변화로 인한 출하품질의 악화

2. \bar{X} 관리도 운용 예

소형 엔진의 피스톤을 가공하는 공정에서 피스톤의 내경이 주요 품질특성이다. 피스톤 내경의 설계규격은 10.0 ± 1.12 이다. 피스톤 내경을 평균 $\mu = 10.0$ 의 목표치로 관리하기 위해 피스톤 가공공정으로부터 매 한 시간마다 추출한 크기 $n = 4$ 의 부분군 20개의 자료가 [표1]이다.

표1 피스톤 내경(inner diameter)

X1	X2	X3	X4	\bar{X}_i	R_i
9.53	9.75	10.26	10.12	9.91	0.74
10.66	9.93	9.60	10.54	10.18	1.06
10.07	9.66	10.09	10.19	10.00	0.53
9.89	10.31	10.10	10.02	10.08	0.42
10.04	10.39	9.50	9.74	9.92	0.89
9.73	10.02	10.16	10.56	10.12	0.83
10.16	9.98	10.18	9.62	9.98	0.56
9.98	9.76	9.98	9.85	9.90	0.22
9.55	9.83	10.44	9.85	9.92	0.89
9.90	10.13	9.93	10.05	10.00	0.22
10.08	10.11	10.26	10.18	10.16	0.18
10.01	10.26	9.86	9.80	9.98	0.46
10.28	9.91	9.66	10.14	10.00	0.62
10.28	10.15	9.47	9.72	9.91	0.81
10.56	10.14	10.01	10.06	10.19	0.56
9.93	9.82	10.03	9.68	9.86	0.35
9.75	9.97	9.79	10.04	9.89	0.29
9.69	10.18	10.03	9.96	9.97	0.49
9.89	9.59	10.11	10.31	9.97	0.73
9.85	9.69	10.45	10.35	10.09	0.76

표1의 전체평균 $\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{20} \bar{X}_i}{20} = 10.00$ 이고 평균범

위 $\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^{20} R_i}{20} = 0.58$ 이다. 이로부터 $\bar{X}-R$ 관리도의 관리한계선을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$UCL_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R} = 10.0 + 0.73(0.58) = 10.42$$

$$LCL_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R} = 10.0 - 0.73(0.58) = 9.58$$

$$UCL_R = D_4 \bar{R} = 2.28(0.58) = 1.32$$

$$LCL_R = D_3 \bar{R} = 0.00(0.58) = 0.00$$

[표1]의 20개 부분군을 위의 $\bar{X}-R$ 관리도에 타점한 결과가 [그림2]이다.

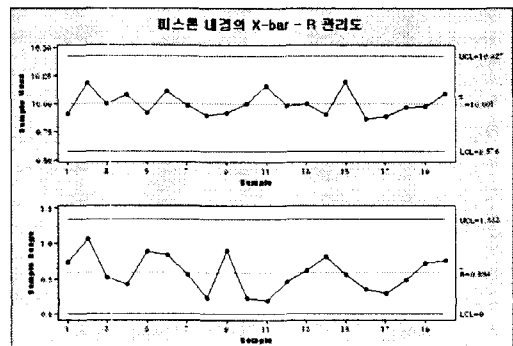


그림2 피스톤 내경의 $\bar{X}-R$ 관리도

[그림2]의 두 관리도가 관리상태를 보이므로 다음과 같이 공정평균과 표준편차의 추정치를 얻을 수 있다.

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{X}} = 10.0, \quad \hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{0.58}{2.06} = 0.28$$

공정평균의 추정치 $\hat{\mu} = 10.0$ 은 규격의 중심과 같으므로 공정의 분포의 중심이 목표치와 일치함을 알 수 있고, 공정의 분포가 목표치를 중심으로 얼마나 퍼져있는가를 나타내는 표준편차 추정치 $\hat{\sigma} = 0.28$ 이므로, 피스톤의 내경이 정규분포를 하는 경우 대략 99.73%가 $\mu \pm 3\sigma = 10.0 \pm 3(0.28) = [9.16, 10.84]$ 의 범위에 포함됨을 알 수 있다[그림3 참조].

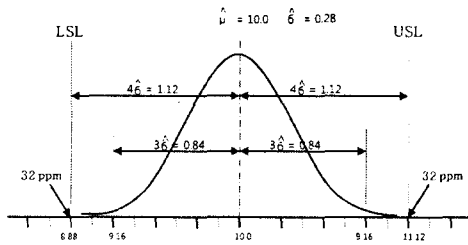


그림3 피스톤 내경의 분포

공정의 산포를 특성치의 설계규격과 비교하여 공정능력을 표시하는 공정능력지수(actual process capability index)는

$$\hat{C}_{pk} = \text{Min} \left(\frac{\hat{\mu} - LSL}{3\hat{\sigma}}, \frac{USL - \hat{\mu}}{3\hat{\sigma}} \right) = \text{Min} (1.33, 1.33) = 1.33$$

공정 불량률은 규격 상한 및 하한 각각에 대해 32ppm이고, 전체 불량률은 64ppm이 된다.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 일 때, $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ 이므로, $\mu_{\bar{X}} =$

$$\mu = 10.0, \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.28}{\sqrt{4}} = 0.14 \text{이다. 따라서 부분}$$

군 평균 \bar{X} 에 대한 3시그마 관리상한 및 관리하한은 앞에서 구한 바와 같이

$$UCL_{\bar{X}} = 10.0 + 3(0.14) = 10.42, \quad LCL_{\bar{X}} = 10.0 - 3(0.14) = 9.58 \text{이 된다[그림4 참조].}$$

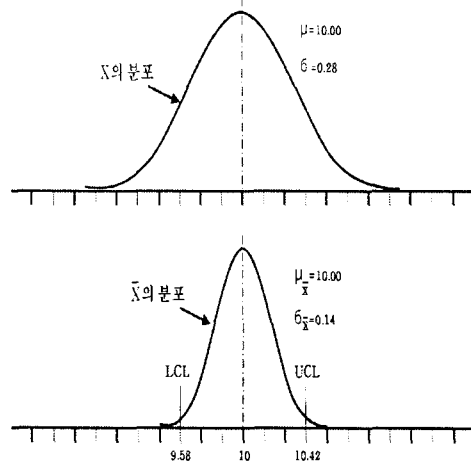


그림4 X와 \bar{X} 의 분포

3. \bar{X} 관리도의 민감도

오전 9:00에 평균 10.0, 표준편차 0.28의 관리 상태에서 공정의 가동이 시작된다고 하자. 30분간 관리 상태에서 작업이 진행되다가 9:30에 어떤 입력 요소의 변화로 인하여 공정평균이 10.84로 $3\sigma = 3(0.28) = 0.84$ 만큼 증가했다고 하자[그림5 참조]. 단, 표준편차는 변화가 없다고 가정한다.

그림에서 보듯이 이때 규격하한을 벗어나는 불량률은 없으나 규격상한을 벗어나는 불량률은 158,700ppm으로 증가하게 된다. 오전 10:00에 샘플링된 부분군을 \bar{X} 관리도에 타점하여 이와 같은 변화를 탐지할 확률은 99.865%가 된다[그림5 참조].

정해진 절차(OCAP, Out-of-Control-Action Plan)에 따라 공정에 대한 수정 조치를 취함으로써 공정은 목표치 10.0의 관리 상태를 회복하게 된다.

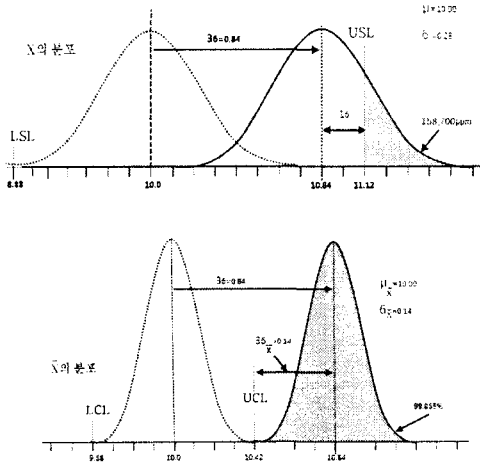


그림5 μ 가 0.84 증가하는 경우

공정평균의 변화가 작은 경우에 대해서 생각해 보자. 9:30에 발생한 이상요인에 의해서 공정평균의 변화가 $1.5\sigma = 1.5(0.28) = 0.42$ 만큼 증가, 즉, μ 가 10.0에서 10.42으로 증가하는 경우에 대해서 생각해 보자[그림6 참조]. 이 경우에도 표준편차의 변화는 없다고 가정한다. 이 변화로 인해 규격하한을 벗어나는 불량률이 6,210ppm이므로 전체 공정불량률은 6,210ppm이 된다. 이 경우 10:00에 샘플링 된 부분군으로부터 이변화가 탐지될 확률은 50%이다. 즉 50%의 확률로 이러한 변화를 탐지하지 못하고 지나칠 수도 있다.

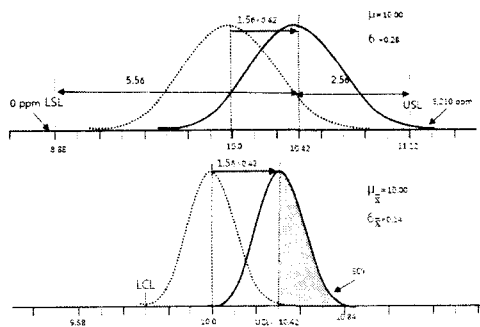


그림6 μ 가 0.42 증가하는 경우

만약 이 변화가 탐지되지 못한 상태에서 10:30에 다시 공정 입력요소에 어떤 변화가 발생하여 공정평균이 다시 10.0으로 회복되었다면, 11:00에 샘플링 되는 부분군은 관리상태의 공정에서 추출되는 것이므로 \bar{X} 관리도 상에서 공정이 관리상태

로 나타날 것이고, 공정의 품질 담당자는 9:00에서 11:00의 2시간 동안 공정은 계속 관리 상태를 유지하고 있는 것으로 판단하게 될 것이다. 그러나 실제로는 9:30에서 10:30의 한 시간 동안은 이상상태이었으며, 이상상태 동안 생산된 불량제품들은 생산자에게는 인지되지 못하고 그대로 구매자에게 출하되어 실제 제품을 사용하는 구매자(생산자의 공정능력이 $C_{pk} = 1.33$ 으로 알고 있음) 손에서 이러한 품질불량이 인지되어 생산자의 공정능력을 의심하게 될 것이다.

Shewhart \bar{X} 관리도에서 많이 사용되는 부분군의 크기 $n = 3, 4, 5$ 에 대해 공정평균의 변화에 따른 탐지 확률과 탐지 확률이 50% 되는 공정평균의 변이량(D_{50}, σ 단위)를 정리하면 다음 표와 같다.

표2 공정평균 변화 탐지확률 및 탐지확률이 50%되는 공정평균 변이량(D_{50})

		부분군의 크기		
		3	4	5
μ 의 변이량	1.5 σ	0.344	0.500	0.638
	2.0 σ	0.679	0.841	0.930
	2.5 σ	0.908	0.977	0.995
	3.0 σ	0.986	0.999	1.0
D_{50} (탐지 확률 50% 되는 변이량)		1.73	1.50	1.34

4. 공정평균 변화를 반영하는 공정능력 평가

앞에서 보았듯이 \bar{X} 관리도는 작은 크기의 공정평균 변화는 제대로 탐지해 내지 못한다. 그러나 실제로 생산현장에서는 크고 작은 공정평균의 변화가 빈번히 발생하고 있으며, 이러한 변화는 Shewhart 관리도를 주축으로 하는 현재의 공정관리 기술에서는 정확히 탐지하지 못하고 있다. 따라서 구매자로 하여금 생산자가 제공하는 공정능력 정보를 불신하게 되는 경우가 발생하게 된다. 이에 대한 보완책으로 앞에서 제안한 D_{50} 을 일반화한 D_{β} 를 공정능력 추정에 이용할 수 있을 것이다. 즉, D_{β} 만큼의 공정평균 변화를 탐지하는데 수반되는 오류가 β 가 된다는 사실을 인정하는 공정능력지수는

$$\hat{C}_{pk,\beta} = \text{Min} \left(\frac{(\hat{\mu} - D_{\beta}\hat{\sigma}) - LSL}{3\hat{\sigma}}, \frac{USL - (\hat{\mu} + D_{\beta}\hat{\sigma})}{3\hat{\sigma}} \right)$$

여기서 β 의 값은 공정의 특성에 따라 적절한 값을 지정할 수 있는데 일반적으로 50%, 혹은 30% 정도가 적절할 것으로 생각된다.

앞의 예에서 $\hat{\mu} = 10.0$, $\hat{\sigma} = 0.28$ 인 공정에서 \hat{C}_{pk} = 1.33이었으나, 부분군 크기 $n = 4$ 일 때 $\beta = 50\%$ 로 하면 $D_{50} = 1.50$ 이므로

$$\begin{aligned} \hat{C}_{pk,\beta} &= \text{Min} \left(\frac{(\hat{\mu} - D_{\beta}\hat{\sigma}) - LSL}{3\hat{\sigma}}, \frac{USL - (\hat{\mu} + D_{\beta}\hat{\sigma})}{3\hat{\sigma}} \right) \\ &= \text{Min} \left(\frac{10.0 - 1.50(0.28) - 8.88}{3(0.28)}, \frac{11.12 - (10.0 + 1.50(0.28))}{3(0.28)} \right) \\ &= \text{Min} (0.83, 0.83) = 0.83 \end{aligned}$$

이 된다.

5. $\hat{C}_{pk,\beta}$ 의 해석

$\hat{C}_{pk,\beta} = 0.83$ 일 때, 탐지되지 못한 변화로 인하여 공정평균이 1.5σ 만큼 증가했다면, 공정평균으로부터 규격상한까지의 거리는 $2.5\hat{\sigma}$ 로 규격하한을 벗어나는 불량률은 6210ppm이 되며, 규격하한까지의 거리는 $4.0\sigma + 1.5\sigma = 5.5\sigma$ 로 규격하한을 벗어나는 불량률은 0ppm이 된다. 반대로 공정평균이 1.5σ 만큼 감소한다면 규격하한을 벗어나는 불량률이 6210ppm, 규격상한을 벗어나는 불량률은 0ppm이 될 것이다. 결국 $\hat{C}_{pk,\beta} = 0.83$ 에 대응되는 불량률은 6210ppm됨을 의미한다.

만약 어떤 공정이 매우 안정적이어서 공정평균의 변화가 발생하지 않고 계속 공정평균이 목표치인 규격의 중심과 일치하는 안정 상태를 유지한다면 공정 불량률은 64ppm으로 안정될 것이다. 결국 $\hat{C}_{pk,\beta} = 0.83$ 이라함은 최악의 공정 불량률이 6210ppm이 됨을 의미하므로 공정능력을 $\hat{C}_{pk,\beta} = 0.83$ 로 평가함으로써 어떠한 경우라도 공정 불량률이 6210ppm이하가 됨을 보증할 수 있게 된다.

그러나 공정평균이 규격의 중심과 일치 할 때, 종래의 C_{pk} 가 0.83이라면, 공정평균으로부터 양쪽 규격한계까지의 거리가 각각 $(3 \times 0.83)\hat{\sigma} = 2.5\hat{\sigma}$ 이 되며, 따라서 양쪽 규격한계를 벗어나는 불량률이 6210ppm으로 총 불량률은 12.420ppm이 됨을 의미한다.

6. 결론

본 연구에서는 공정평균의 변화만을 고려하는 공정능력분석을 다루었는데 향후 다음과 같은 사항이 계속 연구되어야 할 것으로 판단된다.

첫째, 생산공정에서 이상요인이 발생함에 따라 공정평균 뿐만 아니라 공정표준편차도 영향을 받게 된다. 공정평균과 함께 표준편차의 변화를 동시

에 고려하는 공정능력 분석 방법의 연구가 필요하다.

둘째, 공정의 특성에 따라 이상요인의 발생 패턴이 달라질 수 있으며 이상요인 발생 패턴에 따라 관리도의 탐지능력 역시 차이가 있을 수 있다. 따라서 이상요인의 발생 패턴에 따른 공정능력 분석 방법에 대한 연구가 필요할 것이다.

참고 문헌

- [1] D. C. Montgomery, Introduction to Staistical Quality Control, 5th edition, John Wiley & Sons, Inc., 2005.
- [2] Clements, J. A., "Process Capability Calculations for Nonnormal Distributions", *Quality Progress*, Vol. 22, pp. 95-100, 1989.
- [3] Somerville, S. E., and D. C. Montgomery, "Process Capability Indices and Nonnormal Distributions", *Quality Engineering*, Vol. 9, pp. 305-316, 1996.
- [4] Chan, L. K., S. W. Cheng, and F. A. Spiring, "A New Measure of Process Capability: C_{pm} ", *Journal of Quality Technology*, Vol. 20, pp. 16-175, 1988.
- [5] Boyles, R. A., "The Taguchi Capability Index", *Journal of Quality Technology*, Vol. 23 pp. 107-126, 1991.