Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering
Vol, 31, No. 2, pp.51－60, June 2008.

퍼지 선형계획법 해법 및 퍼지 DEA에의 적용에 관한 연구

임 성 묵†

고려대학교 경상대학 경영학부

A Study on a Solution Approach to Fuzzy Linear Programs and Its Application to Fuzzy DEA Models

Sungmook Lim†

Division of Business Administration, Korea University

A solution method for fuzzy linear programs is proposed. A fuzzy linear program is converted to a crisp linear program with average indices being applied to the objective function and constraints. A comparative analysis between the proposed average index approach and the possibilistic approach is given. As an application example, the proposed method is applied to the linear programming model for fuzzy data envelopment analysis, and the result is compared with that of the possibilistic approach.

Keywords : Fuzzy Linear Programming, Data Envelopment Analysis

1. 서 론[1)]

선형계획법은 중요한 경영과학 기법들 중의 하나로서, 모형이 간단하고 효율적인 해법이 존재함으로 인해 현재까지도 가장 널리 사용되고 있다. 하지만, 그 모형이 가지는 단순함으로 인해 응용의 한계도 분명이 있어 왔다. 특히, 선형계획법 모형을 수립하기 위해서는 그 모형의 계수를 구성하는 데이터가 잘 정의되어야 하고 정확해야만 하는데, 이는 높은 정보 획득 비용으로 이어질 수 있다. 실제 응용에서는 데이터의 확실성, 신뢰성, 정확성 등을 얻기가 매우 어려운 경우가 대부분이다. 또한, 선형계획법 문제의 제약식들 중 일부만이 최적해에서 속박적(binding)이게 되므로 비싼 비용을 들어 수집한 대부분의 데이터들이 최적해에 별다른 영향을 주지 못하는 경우가 많다. 따라서 선형계획법에서 데이터의 모호성 또는 부정확성을 처리할 수 있다면 그 응용의 폭을 크게 넓힐 수 있다. 데이터의 불확실성을 모형에 포함시키는 방법으로 확률계획법(stochastic programming)에 대한 많은 연구가 있었지만 실용성이 그다지 크지 않았다. 그러나 1965년 Lotfi A. Zadeh[16]에 의해 퍼지 집합(fuzzy set) 이론이 개발된 이후로, 확률 이론에 기반하지 않으면서 모호한 데이터를 모형화하는 간편하고 효과적인 방법이 존재하게 되었다[12].

퍼지 계수를 가지는 퍼지 선형계획법(fuzzy linear programming)의 원문제 (P)와 쌍대문제 (D)는 다음과 같은 형태를 가진다.

$$\text{(P)}\ \min\,(\tilde{c}_1 \otimes \tilde{1}_{\{x_1\}}) \oplus \cdots \oplus (\tilde{c}_n \otimes \tilde{1}_{\{x_n\}})$$

$$s.t.\ \ (\tilde{a}_{i1} \otimes \tilde{1}_{\{x_1\}}) \oplus \cdots \oplus (\tilde{a}_{in} \otimes \tilde{1}_{\{x_n\}}) \geq \tilde{b}_i\,,$$

논문접수일 : 2008년 01월 22일　논문수정일 : 2008년 04월 07일　게재확정일 2008년 04월 07일
† 교신저자 sungmook@korea.ac.kr
※ 이 논문은 2007년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었음(KRF-2007-313-D00890).

$$i = 1, \cdots, m, \quad x_1, \cdots, x_n \geq 0,$$

$$\text{(D)} \quad \max\,(\tilde{b}_1 \otimes \tilde{1}_{\{y_1\}}) \oplus \cdots \oplus (\tilde{b}_m \otimes \tilde{1}_{\{y_m\}})$$

$$s.t. \quad (\tilde{a}_{1j} \otimes \tilde{1}_{\{y_1\}}) \oplus \cdots \oplus (\tilde{a}_{mj} \otimes \tilde{1}_{\{y_m\}}) \leq \tilde{c}_j,$$

$$j = 1, \cdots, n, \quad y_1, \cdots, y_m \geq 0.$$

제약식과 목적함수에 나타나는 계수들은 모두 퍼지 숫자(fuzzy number)이고, 기호 $\tilde{1}_{\{x_i\}}$와 $\tilde{1}_{\{y_i\}}(i = 1, \cdots, n$ $j = 1, \cdots, m)$는 보통 숫자(crisp number)의 값을 가지는 의사결정 변수이다. ⊕와 ⊗는 퍼지 숫자 간의 덧셈과 곱셈을 나타내고, ≤ 또는 ≥는 퍼지 숫자 간의 대소 비교를 나타내는데, 자세한 정의는 제 2장과 제 3장에서 설명된다.

Bellman and Zadeh[1]에 의해 퍼지 환경에서의 의사 결정에 대한 개념이 제안되었고, Tanaka 등[14, 15]과 Zimmermann[19]에 의해 퍼지 선형계획법에 대해 선도적인 연구가 이루어진 이후 다양한 형태의 퍼지 선형계획법 모형 및 해법들이 개발되었다. 퍼지 선형계획법을 푸는 해법의 대부분은 해당 문제를 분명한 계수를 가지는 일반 선형계획법(crisp linear programming)으로 변환하는 과정을 수반한다. 한편, 최근에는 일반 선형계획법으로 변환하지 않고 직접 푸는 해법에 대한 연구도 있었다[8]. 이와 더불어 퍼지 수리계획법에서는 퍼지 숫자 간의 대소 비교가 중요한 역할을 하게 되는데 이에 대해서도 수많은 연구가 이루어졌다. Bortolan과 Delgani[2], Chen and Hwang[6]은 그 연구 결과들을 비교 분석하고 있다.

본 연구에는 Campos 등[3]이 제안한 퍼지 숫자 간의 대소 비교 방법을 적용하여 퍼지 선형계획법을 일반 선형계획법으로 변환하는 하나의 방법을 개발한다. Campos 등이 제안한 주관적 퍼지 숫자 대소 비교법을 활용하여 퍼지 선형계획법의 해법을 개발한 것은 본 연구가 최초이다. 이와 더불어, Lertworasirikul 등[11]이 제안한 퍼지 선형계획법 해법인 가능성 접근법(possibility approach)을 보다 일반적으로 확장한다. 또한, 퍼지 투입 요소 및 퍼지 산출 요소를 가지는 자료포락분석법(data envelopment analysis, DEA) 문제에 두 가지 해법을 적용해 보고 그 특성을 비교한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 퍼지 집합의 특수한 형태인 퍼지 숫자에 대해 간략히 알아보고, 제 3장에서는 본 연구에서 사용할 퍼지 숫자 간의 대소 비교 방법을 소개한다. 이어서, 제 4장에서는 퍼지 집합 이론과 밀접한 관련이 있는 가능성 이론(possibility theory)을 소개한다. 다만, 독자들의 이해를 돕고 논문의 전개를 용이하게 하기 위하여, 관련 이론들을 가급적 자세하고 완결성 있게 소개하도록 한다. 제 5장에서는 퍼지 선형계획법을 보통 선형계획법으로 변환하는 두 가지 형태의 방법인 평균 지수 변환법과 가능성 접근법을 개발하고, 제 6장에서는 그 방법들을 퍼지 DEA에 적용한 예를 소개한다.

2. 퍼지 숫자

실수 집합 R에서 정의되는 하나의 퍼지 부분집합 $\tilde{A}$은 그 소속 함수(membership function) $\mu_{\tilde{A}} : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$에 의해 정의된다. 임의의 $\alpha(0 < \alpha \leq 1)$에 대해 $\tilde{A}$의 α-레벨집합(α-level set)은 $\tilde{A}_\alpha$로 표시하고 $\tilde{A}_\alpha = \{ x \in \mathbf{R} : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha \}$로 정의된다. 한편 0-레벨집합 $\tilde{A}_0$는 집합 $\{ x \in R : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0 \}$의 폐포(closure)로 정의된다. 하나의 퍼지 부분집합 $\tilde{a}$이 다음과 같은 조건들을 만족할 때 퍼지 숫자라고 불린다.

(i) $\tilde{a}$는 정규화되어 있다. 즉, $\mu_{\tilde{a}}(x) = 1$인 $x \in \mathbf{R}$가 존재한다.

(ii) 소속 함수 $\mu_{\tilde{a}}$는 준오목(quasi-concave)이다. 즉, 임의의 $\lambda \in [0, 1]$에 대해 $\mu_{\tilde{a}}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{a}}(y)\}$이 성립한다. 단, $x, y \in \mathbf{R}$.

(iii) 소속 함수 $\mu_{\tilde{a}}(x)$는 위에서 반연속(upper semicontinuous)이다. 즉, 임의의 $\alpha \in [0, 1]$에 대해 $\{x \in \mathbf{R} : \mu_{\tilde{a}}(x) \geq \alpha\}$이 닫힌 실수 부분집합이다.

(iv) 0-레벨집합 $\tilde{a}_0$은 컴팩트(compact, 닫힌 유계) 집합이다.

모든 퍼지 숫자들로 구성된 집합을 $F(\mathrm{R})$로 표시한다. 만일 $\tilde{a}$가 퍼지 숫자이면 위의 조건 (ii)로부터 α-레벨집합 $\tilde{a}_\alpha$가 볼록 집합이라는 것을 알 수 있고, 이것과 조건 (iii)을 결합하면 임의의 $\alpha \in [0, 1]$에 대해 α-레벨집합 $\tilde{a}_\alpha$는 컴팩트하고 볼록인 집합이라는 것을 알 수 있다. 따라서 $\tilde{a}_\alpha = [\tilde{a}^L_\alpha, \tilde{a}^U_\alpha]$로 쓸 수 있다.

⊙는 두 개의 퍼지 숫자 간의 이항 연산 ⊕ 또는 ⊗를 나타낸다고 하자. 두 개의 퍼지 숫자 $\tilde{a}$와 $\tilde{b}$에 대해, $\tilde{a} \odot \tilde{b}$의 소속 함수는 Zadeh의 확장 원리[17]를 이용하여 다음과 같이 정의된다.

$$\mu_{\tilde{a} \odot \tilde{b}}(z) = \sup_{x \cdot y = z} \min\{\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y)\}$$

여기서 퍼지 이항 연산 ⊙ (= ⊕ 또는 ⊗)는 실수 연

산 $\bullet$ (= + 또는 ×)에 대응된다.

$\tilde{a}$의 소속 함수가 아래와 같을 때, $\tilde{a}$를 v의 값을 가지는 보통 숫자(crisp number)라고 한다.

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 1 & x = v \\ 0 & x \neq v \end{cases}$$

또한 v의 값을 가지는 보통 숫자를 나타내기 위해 기호 $\tilde{1}_{\{v\}}$를 사용한다.

퍼지 벡터 $\tilde{\boldsymbol{x}} \in F^n(\mathbf{R}) \equiv F(\mathbf{R}) \times \cdots \times F(\mathbf{R})$는 퍼지 숫자로 구성된 벡터로서 $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_n)^T$이고 $\tilde{x}_i \in F(\mathbf{R})$, $i = 1, \cdots, n$이다. 두 퍼지 벡터 $\tilde{\boldsymbol{x}}$, $\tilde{\boldsymbol{y}} \in F^n(\mathbf{R})$의 덧셈은 다음과 같이 정의된다.

$$\tilde{\boldsymbol{x}} \oplus \tilde{\boldsymbol{y}} = (\tilde{x}_1 \oplus \tilde{y}_1, \cdots, \tilde{x}_n \oplus \tilde{y}_n)^T$$

한편 퍼지 내적(fuzzy scalar product)은 다음과 같이 정의된다.

$$\langle\!\langle \tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}} \rangle\!\rangle = (\tilde{x}_1 \otimes \tilde{y}_1) \oplus \cdots \oplus (\tilde{x}_n \otimes \tilde{y}_n).$$

보통 벡터 $\tilde{1}_{\{\boldsymbol{x}\}}$와 퍼지 벡터 $\tilde{\boldsymbol{y}}$와의 퍼지 내적 $\langle\!\langle \tilde{1}_{\{\boldsymbol{x}\}}, \tilde{\boldsymbol{y}} \rangle\!\rangle$은 편의상 $\langle\!\langle \boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}} \rangle\!\rangle$로 쓰기로 한다.

퍼지 숫자에는 여러 가지 형태가 있을 수 있는데, 그 중에서 많이 사용되는 삼각 퍼지 숫자(triangular fuzzy number)와 *L-R* 퍼지 숫자는 다음과 같이 정의된다.

정의 1 : 퍼지 숫자 $\tilde{a}$가 다음과 같은 형태의 소속 함수를 가질 때 삼각 퍼지 숫자라고 하고, 기호로는 (a_1, a, a_2)라고 표시한다. 단, a는 유계 개구간 (a_1, a_2), $a_1 \neq a_2$ 내의 한 점이다.

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 0, & x \le a_1, \\ \dfrac{x - a_1}{a - a_1}, & a_1 < x < a, \\ 1, & x = a, \\ \dfrac{a_2 - x}{a_2 - a}, & a < x < a_2, \\ 0, & a_2 \le x. \end{cases}$$

정의 2 : 퍼지 숫자 $\tilde{a}$가 다음과 같은 형태의 소속 함수를 가질 때 *L-R* 퍼지 숫자라고 하고, 기호로는 (h, η, ν)라고 표시한다.

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = L\left(\frac{h - x}{\eta}\right), \quad x \le h, \quad \eta > 0$$

$$= R\left(\frac{x - h}{\nu}\right), \quad x \ge h, \quad \nu > 0.$$

여기서 L, R은 다음의 성질을 가지는 함수 f의 일종으로 참조 함수(reference functions)라고 부른다.

i) $f(x) = f(-x)$
ii) $f(0) = 1$
iii) $f(x)$는 구간 $[0, \infty)$에서 감소한다.

L-R 퍼지 숫자는 참조 함수를 어떻게 정의하느냐에 따라 다양한 형태의 퍼지 숫자를 표현할 수 있으며, 삼각 퍼지 숫자도 *L-R* 퍼지 숫자의 특수한 경우에 해당한다. 즉, 삼각 퍼지 숫자 (a_1, a, a_2)와 *L-R* 퍼지 숫자 (h, η, ν) 사이에는 다음의 관계가 성립한다 : $h = a$, η, $= a - a_1$ $\nu = a_2 - a$. 한편, *L-R* 퍼지 숫자에 대한 기본적 연산들은 다음과 같이 간단히 수행될 수 있다.

성질 1 : 두 개의 *L-R* 퍼지 숫자 $\tilde{a} = (h, \eta, \nu)$와 $\tilde{b} = (k, \gamma, \delta)$가 주어졌을 때, 덧셈, 상수곱 및 대칭 퍼지 숫자는 다음과 같다.

(i) 덧셈 : $\tilde{a} \oplus \tilde{b} = (h, \eta, \nu) \oplus (k, \gamma, \delta)$
$= (h + k, \eta + \gamma, \nu + \delta)$

(ii) 상수곱 : $\alpha > 0$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$ $\quad \alpha\tilde{a} = (\alpha h, \alpha\eta, \alpha\nu)$
$\alpha < 0$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$ $\quad \alpha\tilde{a} = (\alpha h, -\alpha\nu, -\alpha\eta)$

(iii) 대칭 숫자 : $-\tilde{a} = -(h, \eta, \nu)$
$= (-h, \nu, \eta)$

3. 퍼지 숫자 간의 대소 비교 방법

퍼지 숫자 간의 대소를 비교하는 방법은 퍼지 수리계획법에서 중요한 주제이고 다양한 방법들이 제안되어 왔다. 본 연구에서는 퍼지 선형계획법 문제를 보통의 선형계획법 문제로 변환할 때 Campos 등[3]이 제안한 주관적 대소 비교 방법을 활용하므로 여기서 그 비교 방법을 간략히 소개한다. 더불어 퍼지 선형계획법의 변환 과정에서 활용될 수 있는 그 특성들을 분석한다. 이 방법에서는 퍼지 숫자를 하나의 보통 숫자로 변환하여 대소 비교를 하며 그 변환 방법은 다음의 정의를 따른다.

정의 3 : Y는 [0, 1]의 부분 구간으로서 중요하게 고려되어야 하는 α-레벨집합들(즉 α의 범위)을 나타낸다고 하고, P는 Y상에서 정의되는 확률

분포로서 서로 다른 레벨집합들에 대한 중요도의 가중치를 표현한다고 하자. 우선, 퍼지 숫자 $\tilde{a}$의 α-레벨집합 $\tilde{a}_\alpha=[\tilde{a}_\alpha^L, \tilde{a}_\alpha^U]$에 대해 다음의 함수 $f_{\tilde{a}}^\lambda: Y \rightarrow \mathbf{R}$를 정의한다.

$$f_{\tilde{a}}^\lambda(\alpha)=\lambda\tilde{a}_\alpha^U+(1-\lambda)\tilde{a}_\alpha^L,\ \lambda\in[0,1].$$

여기서 λ는 의사결정자의 낙관-비관 정도가 반영되도록 미리 정해진 상수(주관 계수)이고, $f_{\tilde{a}}^\lambda(\alpha)$는 α-레벨집합을 하나의 값으로 대표하게 된다. 그러면 퍼지 숫자 $\tilde{a}$의 평균 지수(average index)는 다음과 같이 정의된다.

$$V_P^\lambda(\tilde{a})=\int_Y f_{\tilde{a}}^\lambda(z)dP(z).$$

위와 같은 방법을 이용하여 퍼지 숫자를 보통 숫자로 변환할 수 있고, 이를 바탕으로 퍼지 숫자들 간의 대소 비교가 가능하게 된다.

정의 4 : 의사결정자의 기호를 반영한 주관 계수 λ와 확률분포 P가 주어졌을 때,

$$\tilde{a}\geq\tilde{b} \Leftrightarrow V_P^\lambda(\tilde{a})\geq V_P^\lambda(\tilde{b}),$$
$$\tilde{a}\leq\tilde{b} \Leftrightarrow V_P^\lambda(\tilde{a})\leq V_P^\lambda(\tilde{b}),$$
$$\tilde{a}\approx\tilde{b} \Leftrightarrow V_P^\lambda(\tilde{a})= V_P^\lambda(\tilde{b}).$$

단, $\approx$는 두 퍼지 숫자 간에 차이가 있지 않음을 나타낸다.

이제 평균 지수 연산자인 $V_P^\lambda(\cdot)$의 선형성(linearity)을 살펴보자.

성질 2 : 연산자 $V_P^\lambda(\cdot)$는 다음의 성질을 가진다.

i) 실수 $a\in\mathbf{R}$에 대해, $V_P^\lambda(a)=a, \forall\lambda\in[0,1]$,
ii) 두 개의 퍼지 숫자 $\tilde{a}$, $\tilde{b}\in F(\mathbf{R})$에 대해, $V_P^\lambda(\tilde{a}\oplus\tilde{b})=V_P^\lambda(\tilde{a})+V_P^\lambda(\tilde{b}), \forall\lambda\in[0,1]$,
iii) 실수 $r\in\mathbf{R}$, 퍼지 숫자 $\tilde{a}\in F(\mathbf{R})$에 대해, $V_P^\lambda(\tilde{1}_{\{r\}}\otimes\tilde{a})=rV_P^\lambda(\tilde{a}), \forall\lambda\in[0,1]$.

한편, Hougaard[10]는 평균 지수 연산자를 DEA에서 퍼지한 효율성 값들의 순위를 결정하는데 활용한 바 있다.

4. 가능성 이론

가능성 이론(possibility theory)는 퍼지 집합 이론을 바탕으로 Zadeh[18]에 의해 제안되었고, 그 이후 많은 연구가 이루어져 왔다. 가능성 이론에 대한 보다 자세한 이론은 Dubois and Prade[7]를 참고한다. 하나의 확률 변수가 하나의 확률 분포와 관련이 되듯이, Zadeh는 하나의 가능성 분포(possibility distribution)와 관련이 되는 퍼지 변수(fuzzy variable)라는 개념을 도입하였다. 퍼지 선형계획법 모형에서 각각의 퍼지 계수는 퍼지 변수로 간주될 수 있고, 각각의 제약식은 퍼지 사건(fuzzy event)으로 간주될 수 있다. 또한, 가능성 이론을 이용하여 퍼지 사건들의 가능성(possibility)을 결정할 수 있다.

$(\Theta_i, \mathbb{P}(\Theta_i), \pi_i)$를 각각의 $i(=1,2,\cdots,n)$에 대해 하나의 가능성 공간(possibility space)이라고 정의할 때, Θ_i는 임의의 주어진 집합으로 공집합이 아니고 $\mathbb{P}(\Theta_i)$는 Θ_i의 부분 집합들의 모임이며 π_i는 $\mathbb{P}(\Theta_i)$로부터 [0, 1]로 대응되는 가능성 척도 함수이다.

다음의 조건이 성립하는 하나의 가능성 공간 $(\Theta_i, \mathbb{P}(\Theta_i), \pi_i)$이 있다고 하자.

(i) $\pi_i(\phi)=0,\quad \pi_i(\Theta_i)=1,$
(ii) $\pi_i(\cup_k B_k)=\sup_k\{\pi_i(B_k)\}$, 여기서 각각의 k에 대해 $B_k\in\mathbb{P}(\Theta_i)$.

퍼지 변수 $\tilde{\xi}$는 Θ_i상에서 정의되는 실수 함수로서 다음과 같은 소속 함수를 가진다.

$$\mu_{\tilde{\xi}}(z)=\pi_i(\theta_i\in\Theta_i|\,\tilde{\xi}(\theta_i)=z)$$
$$=\sup_{\theta_i\in\Theta_i}\{\pi_i(\theta_i)|\xi(\theta_i)=z\},\ \forall z\in\mathbf{R}.$$

$(\Theta, \mathbb{P}(\Theta), \pi)$를 n개의 가능성 공간의 곱(product)이라고 하고 $\Theta=\Theta_1\times\Theta_2\times\cdots\times\Theta_n$이라고 할 때, 임의의 집합 $A\in\mathbb{P}(\Theta)$에 대해 다음이 성립한다.

$$\pi(A)=\min_{i=1,2,\cdots,n}\{\pi_i(A_i)\,|\,A=A_1\times A_2\times\cdots\times A_n,\ A_i\in\mathbb{P}(\Theta_i)\}$$

$\tilde{a}$와 $\tilde{b}$는 각각 가능성 공간 $(\Theta_1, \mathbb{P}(\Theta_1), \pi_1)$와 $(\Theta_2, \mathbb{P}(\Theta_2), \pi_2)$상의 퍼지 변수라고 하자. 그러면 $\tilde{a}\leq\tilde{b}$는 가능성 공간 곱 $(\Theta=\Theta_1\times\Theta_2, \mathbb{P}(\Theta), \pi)$에서 정의되는 퍼지 사건이고, 다음이 성립한다.

$$\pi(\tilde{a}\leq\tilde{b})=\sup_{\substack{\theta_1\in\Theta_1,\\ \theta_2\in\Theta_2}}\{\pi(\{(\theta_1,\theta_2)\})\,|\,\tilde{a}(\theta_1)\leq\tilde{b}(\theta_2)\}$$

$$= \sup_{\substack{\theta_1 \in \Theta_1 \\ \theta_2 \in \Theta_2}} \{\min\{\pi(\{\theta_1\}), \pi(\{\theta_2\})\} \mid \tilde{a}(\theta_1) \le \tilde{b}(\theta_2)\}.$$

또한, 퍼지 변수의 정의에 의해 다음이 성립한다.

$$\pi(\tilde{a} \le \tilde{b}) = \sup_{s,t \in \mathbf{R}} \{\min(\mu_{\tilde{a}}(s), \mu_{\tilde{b}}(t)) \mid s \le t\}.$$

이와 유사하게, 퍼지 사건 $\tilde{a} < \tilde{b}$과 $\tilde{a} = \tilde{b}$에 대한 가능성도 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\pi(\tilde{a} < \tilde{b}) = \sup_{s,t \in \mathbf{R}} \{\min(\mu_{\tilde{a}}(s), \mu_{\tilde{b}}(t)) \mid s < t\},$$
$$\pi(\tilde{a} \approx \tilde{b}) = \sup_{s,t \in \mathbf{R}} \{\min(\mu_{\tilde{a}}(s), \mu_{\tilde{b}}(t)) \mid s = t\}.$$

우변 상수 $\tilde{b}$가 분명한 값을 가지는 보통 숫자 b가 되는 경우, 해당 퍼지 사건의 가능성은 다음과 같이 계산된다.

$$\pi(\tilde{a} \le b) = \sup_{s \in \mathbf{R}} \{\mu_{\tilde{a}}(s) \mid s \le b\},$$
$$\pi(\tilde{a} < b) = \sup_{s \in \mathbf{R}} \{\mu_{\tilde{a}}(s) \mid s < b\},$$
$$\pi(\tilde{a} \approx b) = \sup_{s \in \mathbf{R}} \{\mu_{\tilde{a}}(s) \mid s = b\}.$$

이를 보다 확장하여, $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_n$가 퍼지 변수들이고 $f_j : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ $(j = 1, \cdots, m)$는 실수값을 출력하는 함수라고 할 때 퍼지 사건 "$f_j(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_n) \le 0,\ j = 1, \cdots, m$"의 가능성은 다음과 같다.

$$\pi(f_j(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_n) \le 0,\ j = 1, \cdots, m)$$
$$= \sup_{s_1, \cdots, s_n \in \mathbf{R}} \{ \min_{1 \le i \le n} \{ \mu_{\tilde{a}_i}(s_i)\} \mid f_j(s_1, \cdots, s_n) \le 0,\ j = 1, \cdots, m \}.$$

한편, Lertworasirikul 등[11]은 다음의 보조 정리를 증명하였다.

보조정리 1 : 퍼지 숫자 $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_n$이 주어져 있을 때, 임의의 가능성 수준 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 (0 \le \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \le 1)$에 대해 다음이 성립한다.

(i) $\pi(\tilde{a}_1 + \cdots + \tilde{a}_n \le b) \ge \alpha_1$

$$\Leftrightarrow (\tilde{a}_1)^L_{\alpha_1} + \cdots + (\tilde{a}_n)^L_{\alpha_1} \le b,$$

(ii) $\pi(\tilde{a}_1 + \cdots + \tilde{a}_n \ge b) \ge \alpha_2$

$$\Leftrightarrow (\tilde{a}_1)^U_{\alpha_2} + \cdots + (\tilde{a}_n)^U_{\alpha_2} \ge b,$$

(iii) $\pi(\tilde{a}_1 + \cdots + \tilde{a}_n \approx b) \ge \alpha_3$

$$\Leftrightarrow (\tilde{a}_1)^L_{\alpha_3} + \cdots + (\tilde{a}_n)^L_{\alpha_3} \le b \text{ 이고 } (\tilde{a}_1)^U_{\alpha_3} + \cdots + (\tilde{a}_n)^U_{\alpha_3} \ge b.$$

5. 퍼지 선형계획법의 일반 선형계획법으로의 변환

우선 제 1장에서 제시된 퍼지 선형계획법 문제를 다음과 같이 벡터 기호를 사용하여 간단히 표현하도록 한다.

$$\text{(P)} \quad \min\ \tilde{f}^p = \langle\!\langle \tilde{\boldsymbol{c}}, \boldsymbol{x} \rangle\!\rangle$$
$$s.t.\quad \tilde{p}_i = \langle\!\langle \tilde{\boldsymbol{a}}_{i\cdot}, \boldsymbol{x} \rangle\!\rangle \ge \tilde{b}_i,$$
$$i = 1, \cdots, m,\quad \boldsymbol{x} \ge 0$$

$$\text{(D)} \quad \max\ \tilde{f}^d = \langle\!\langle \tilde{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} \rangle\!\rangle$$
$$s.t.\quad \tilde{d}_j = \langle\!\langle \tilde{\boldsymbol{a}}_{\cdot j}, \boldsymbol{y} \rangle\!\rangle \le \tilde{c}_j,$$
$$j = 1, \cdots, n,\quad \boldsymbol{y} \ge 0$$

단, 여기서 의사결정 변수는 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m$이고, 상수는 $\tilde{\boldsymbol{b}} \in F^n(\mathbf{R})$, $\tilde{\boldsymbol{c}} \in F^n(\mathbf{R})$, $\tilde{\boldsymbol{a}}_{i\cdot} = (\tilde{a}_{i1}, \cdots, \tilde{a}_{in})^T \in F^n(\mathbf{R})$, $\tilde{\boldsymbol{a}}_{\cdot j} = (\tilde{a}_{1j}, \cdots, \tilde{a}_{mj})^T \in F^m(\mathbf{R})$, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$이다.

이 문제에 대한 해법으로서 본 연구에서 제안하는 평균 지수 변환법, Lertworasirikul 등이 제안한 가능성 접근법을 좀 더 일반적으로 확장한 방법을 아래에서 설명하고, 이어서 두 가지 접근법 간의 관계를 분석한다.

5.1 평균 지수 변환법

퍼지 숫자들 간의 대소 비교를 평균 지수를 통해 파악한다고 가정하면, 퍼지 선형계획법 문제 (P)와 (D)는 분명한 계수를 가지는 다음의 문제 (P')와 (D')로 각각 변형될 수 있다.

$$\text{(P')} \quad \min\ V_P^\lambda(\tilde{f}^p)$$
$$s.t.\quad V_P^\lambda(p_i) \ge V_P^\lambda(\tilde{b}_i),\quad i = 1, \cdots, m,$$
$$\boldsymbol{x} \ge 0$$

$$\text{(D')} \quad \max\ V_P^\lambda(\tilde{f}^d)$$
$$s.t.\quad V_P^\lambda(\tilde{d}_j) \le V_P^\lambda(\tilde{c}_j),\quad j = 1, \cdots, n,$$
$$\boldsymbol{y} \ge 0$$

여기서 성질 2를 이용하여 $V_P^{\lambda}(\tilde{f}^p)$가 어떻게 계산되는지에 대해 살펴보자.

$$\begin{aligned} V_P^{\lambda}(\tilde{f}^p) &= V_P^{\lambda}(\langle\!\langle \tilde{c}, \boldsymbol{x} \rangle\!\rangle) \\ &= V_P^{\lambda}((\tilde{1}_{\{x_1\}} \otimes \tilde{c}_1) \oplus \cdots \oplus (\tilde{1}_{\{x_n\}} \otimes \tilde{c}_n)) \\ &= x_1 V_P^{\lambda}(\tilde{c}_1) + \cdots + x_n V_P^{\lambda}(\tilde{c}_n). \end{aligned}$$

이와 같은 계산법을 이용하면 (P')와 (D')는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{(P')} \ \min \ & x_1 V_P^{\lambda}(\tilde{c}_1) + \cdots + x_n V_P^{\lambda}(\tilde{c}_n) \\ s.t. \ & x_1 V_P^{\lambda}(\tilde{a}_{i1}) + \cdots + x_n V_P^{\lambda}(\tilde{a}_{in}) \geq V_P^{\lambda}(\tilde{b}_i), \\ & i = 1, \cdots, m, \ \boldsymbol{x} \geq 0 \\ \text{(D')} \ \max \ & y_1 V_P^{\lambda}(\tilde{b}_1) + \cdots + y_m V_P^{\lambda}(\tilde{b}_m) \\ s.t. \ & y_1 V_P^{\lambda}(\tilde{a}_{1j}) + \cdots + y_m V_P^{\lambda}(\tilde{a}_{mj}) \leq V_P^{\lambda}(\tilde{c}_j), \\ & j = 1, \cdots, n, \quad \boldsymbol{y} \geq 0 \end{aligned}$$

이를 볼 때, (P')와 (D')는 분명한 계수를 가지는 보통 선형계획법 문제라는 것을 알 수 있다.

이제 하나의 퍼지 숫자 $\tilde{a}$에 대해 $V_P^{\lambda}(\tilde{a})$을 구하는 방법을 알아보자. 단, $\tilde{a}$가 L-R 퍼지 숫자 (h, η, ν)라고 가정하고, 그 참조 함수가 L과 R이라고 하자. $\tilde{a}$의 α-레벨집합을 $\tilde{a}_{\alpha} = [\tilde{a}_{\alpha}^L, \tilde{a}_{\alpha}^U]$라고 하면 $\tilde{a}_{\alpha}^L$과 $\tilde{a}_{\alpha}^U$는 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\tilde{a}_{\alpha}^L = h - \eta L^*(\alpha), \quad \tilde{a}_{\alpha}^U = h + \nu R^*(\alpha)$$

단, 여기서 $R^*(\alpha) = \max\{\, t \mid R(t) = \alpha \}$이고 $L^*(\alpha) = \max\{ t \mid L(t) = \alpha \}$이다. 이를 이용하면 $V_P^{\lambda}(\tilde{a})$는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} V_P^{\lambda}(\tilde{a}) &= \int_Y [\lambda\nu R^*(\alpha) - (1-\lambda)\eta L^*(\alpha) + h] dP(\alpha) \\ &= \lambda\nu \int_Y R^*(\alpha) dP(\alpha) \\ &\qquad - (1-\lambda)\eta \int_Y L^*(\alpha) dP(\alpha) + h \\ &= \lambda\nu r - (1-\lambda)\eta l + h. \end{aligned}$$

여기서, $r = \int_Y R^*(\alpha) dP(\alpha)$, $l = \int_Y L^*(\alpha) dP(\alpha)$이다. 한편, 확률분포 P가 일양분포이고 Y가 전체 구간 [0, 1]이라고 한다면 r과 l은 다음과 같이 계산될 수도 있다.

$$r = \int_0^{\infty} R(z) dz, \quad l = \int_0^{\infty} L(z) dz.$$

(P')의 i번째 제약식 $x_1 V_P^{\lambda}(\tilde{a}_{i1}) + \cdots + x_n V_P^{\lambda}(\tilde{a}_{in}) \geq V_P^{\lambda}(\tilde{b}_i)$을 보자. 여기서 $\tilde{\boldsymbol{a}}_{i\cdot}$는 L-R 퍼지 벡터 $(\boldsymbol{h}_i, \boldsymbol{\eta}_i, \boldsymbol{\nu}_i)$라고 하고, $\boldsymbol{h}_i = (h_{i1}, \cdots, h_{in})^T$, $\boldsymbol{\eta}_i = (\eta_{i1}, \cdots, \eta_{in})^T$, $\boldsymbol{\nu}_i = (\nu_{i1}, \cdots, \nu_{in})^T$이라고 하자. 또한 $\tilde{b}_i$도 L-R 퍼지 숫자로서 $(h_{ib}, \eta_{ib}, \nu_{ib})$라고 하자. 한편 $V_P^{\lambda}(\tilde{a}_{ij}) = \lambda\nu_{ij} r - (1-\lambda)\eta_{ij} l + h_{ij}$이므로, 위 제약식은 아래와 같이 변형될 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{n} x_j (\lambda\nu_{ij} r - (1-\lambda)\eta_{ij} l + h_{ij}) \geq \lambda\nu_{ib} r - (1-\lambda)\eta_{ib} l + h_{ib}.$$

5.2 가능성(Possibilistic) 접근법

Lertworasirikul 등[11]은 가능성 이론(possibility theory)에 기반한 방법을 제안하였는데, 퍼지한 투입요소 및 산출요소를 가지는 DEA 모형에 한정하여 적용하였다. 본 연구에서는 그 방법을 확장하여 일반화 한다.

제약식 $\tilde{p}_i = \langle\!\langle \tilde{\boldsymbol{a}}_{i\cdot}, \boldsymbol{x} \rangle\!\rangle \geq b_i$을 고려하자. 여기서 $\tilde{\boldsymbol{a}}_i$는 L-R 퍼지 벡터 $(\boldsymbol{h}_i, \boldsymbol{\eta}_i, \boldsymbol{\nu}_i)$이라고 하고 우변 상수 b_i는 보통 숫자라고 가정한다. 가능성 접근법에서는 주어진 가능성 수준 α에 대해 이 제약식을 다음과 같이 변형한다.

$$\pi(\tilde{p}_i = \langle\!\langle \tilde{\boldsymbol{a}}_{i\cdot}, \boldsymbol{x} \rangle\!\rangle \geq b_i) \geq \alpha$$

여기서 $\tilde{p}_i = \langle\!\langle \tilde{\boldsymbol{a}}_{i\cdot}, \boldsymbol{x} \rangle\!\rangle$는 L-R 퍼지 벡터이고 $\boldsymbol{x} \geq 0$이므로, $\tilde{p}_i = (\boldsymbol{h}_i^T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}_i^T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}_i^T\boldsymbol{x})$이다. 보조정리 1에 의해 위 제약식은 $(\tilde{p}_i)_{\alpha}^U \geq b_i$와 동치이다. 이는 $\boldsymbol{h}_i^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\nu}_i^T\boldsymbol{x} R^*(\alpha) \geq b_i$와 같다.

한편, 등식 제약식 $\tilde{p}_i = \langle\!\langle \tilde{\boldsymbol{a}}_{i\cdot}, \boldsymbol{x} \rangle\!\rangle \approx b_i$에 대해서는 다음의 관계가 성립한다.

$$\pi(\tilde{p}_i = \langle\!\langle \tilde{\boldsymbol{a}}_{i\cdot}, \boldsymbol{x} \rangle\!\rangle \approx b_i) \geq \alpha \Leftrightarrow$$
$$\boldsymbol{h}_i^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\eta}_i^T\boldsymbol{x} L^*(\alpha) \leq b_i \leq \boldsymbol{h}_i^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\nu}_i^T\boldsymbol{x} R^*(\alpha).$$

5.3 평균 지수 변환법과 가능성 접근법과의 비교

제약식 $\tilde{p}_i = \langle\!\langle \tilde{\boldsymbol{a}}_{i\cdot}, \boldsymbol{x} \rangle\!\rangle \geq b_i$, $\boldsymbol{x} \geq 0$에 대해 두 접근

법의 관련성을 알아보자. 우선 평균 지수 변환법을 적용하면 다음과 같은 보통 부등식으로 변형된다.

$$\lambda r \boldsymbol{\nu}_i^T \boldsymbol{x} - (1-\lambda) l \boldsymbol{\eta}_i^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}_i^T \boldsymbol{x} \geq b_i \quad \Leftrightarrow$$
$$(\lambda r \boldsymbol{\nu}_i - (1-\lambda) l \boldsymbol{\eta}_i + \boldsymbol{h}_i)^T \boldsymbol{x} \geq b_i.$$

한편, 가능성 접근법을 적용한다면 5.2절에서 보았듯이 $(\boldsymbol{h}_i + \boldsymbol{\nu}_i R^*(\alpha))^T \boldsymbol{x} \geq b_i$로 변형된다. 여기서 다음의 정리를 얻을 수 있다.

정리 1 : 제약식 $\tilde{p}_i = \langle\!\langle \tilde{\boldsymbol{a}}_{i\cdot}, \boldsymbol{x} \rangle\!\rangle \geq b_i$, $\boldsymbol{x} \geq 0$에 대해, 주관 계수 λ와 확률 분포 P를 이용해 평균 지수 변환법을 적용했을 때 얻어지는 해공간 X_V와 가능성 수준 α로 가능성 접근법을 적용했을 때 얻어지는 해공간 X_P간에는 다음의 관계가 있다.

a) $\lambda = 1$이고 $R^*(\alpha) = r$이면, $X_V = X_P$
b) $\lambda \neq 1$, $\boldsymbol{\eta}_i = k \boldsymbol{\nu}_i (k > 0)$이고
$R^*(\alpha) = \lambda r - (1-\lambda) l k$이면, $X_V = X_P$.

증명 : 평균 지수 변환법에 의해 생성되는 보통 부등식 $(\lambda r \boldsymbol{\nu}_i - (1-\lambda) l \boldsymbol{\eta}_i + \boldsymbol{h}_i)^T \boldsymbol{x} \geq b_i$와 가능성 접근법을 통해 생성되는 보통 부등식 $(\boldsymbol{h}_i + \boldsymbol{\nu}_i R^*(\alpha))^T \boldsymbol{x} \geq b_i$가 $\boldsymbol{x}$에 관계없이 같아지기 위해서는 다음이 성립해야 한다.

$$\lambda r \nu_{ij} - (1-\lambda) l \eta_{ij} = \nu_{ij} R^*(\alpha),\ j = 1, \cdots, n \quad \Leftrightarrow$$
$$R^*(\alpha) = \lambda r - (1-\lambda) l \frac{\eta_{ij}}{\nu_{ij}},\ j = 1, \cdots, n.$$

이로써 a), b)가 성립하는 것은 자명하다. ■

정리 1에서 a), b)를 만족시키는 α가 존재하지 않을 수도 있다. 하지만, 참조 함수 R이 $[0, \infty)$에서 순감소(strictly decreasing)할 때에는 $R^*(x) \equiv R^{-1}(x)$, $x \geq 0$이므로, a)의 경우 $\alpha = R(r)$가 항상 존재하고 b)의 경우 $\lambda r - (1-\lambda) l k \geq 0$일 때 $\alpha = R(\lambda r - (1-\lambda) l k)$가 항상 존재한다.

정리 2 : 제약식 $\tilde{p}_i = \langle\!\langle \tilde{\boldsymbol{a}}_{i\cdot}, \boldsymbol{x} \rangle\!\rangle \approx b_i$, $\boldsymbol{x} \geq 0$에 대해, 주관 계수 λ와 확률 분포 P를 이용해 평균 지수 변환법을 적용했을 때 얻어지는 해공간 X_V와 집합 A에 속하는 임의의 가능성 수준 α로 가능성 접근법을 적용했을 때 얻어지는 해공간 X_P 간에는 일반적으로 $X_P \subset X_V$의 관계가 있다. 단, A는 다음과 같다.

$$A = \{\ \alpha : L^*(\alpha) \geq -\lambda r \frac{\nu_{ij}}{\eta_{ij}} + (1-\lambda) l,$$
$$R^*(\alpha) \geq \lambda r - (1-\lambda) l \frac{\eta_{ij}}{\nu_{ij}},\ \ j = 1, \cdots, n\ \}$$

증명 : 평균 지수 변환법에 의해 생성되는 보통 부등식과 가능성 접근법을 통해 생성되는 보통 부등식은 각각 다음과 같다.

i) $(\lambda r \boldsymbol{\nu}_i - (1-\lambda) l \boldsymbol{\eta}_i + \boldsymbol{h}_i)^T \boldsymbol{x} = b_i$,
ii) $(\boldsymbol{h}_i - \boldsymbol{\eta}_i L^*(\alpha))^T \boldsymbol{x} \leq b_i$,
$b_i \leq (\boldsymbol{h}_i + \boldsymbol{\nu}_i R^*(\alpha))^T \boldsymbol{x}$.

i)을 만족시키는 $\boldsymbol{x}$가 언제나 ii)를 만족시킬 조건은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{h}_i - \boldsymbol{\eta}_i L^*(\alpha) \leq \lambda r \boldsymbol{\nu}_i - (1-\lambda) l \boldsymbol{\eta}_i + \boldsymbol{h}_i$$
$$\leq \boldsymbol{h}_i + \boldsymbol{\nu}_i R^*(\alpha)$$
$$\Rightarrow -\boldsymbol{\eta}_i L^*(\alpha) \leq \lambda r \boldsymbol{\nu}_i - (1-\lambda) l \boldsymbol{\eta}_i \leq \boldsymbol{\nu}_i R^*(\alpha)$$
$$\Rightarrow L^*(\alpha) \geq -\lambda r \frac{\nu_{ij}}{\eta_{ij}} + (1-\lambda) l,$$
$$R^*(\alpha) \geq \lambda r - (1-\lambda) l \frac{\eta_{ij}}{\nu_{ij}},\ j = 1, \cdots, n.$$

이로써 정리의 내용은 증명된다. ■

6. 퍼지 DEA에의 적용

자료포락분석(DEA)은 제조 및 서비스 운영의 성과를 평가하고 개선시키기 위한 중요한 분석 방법들 중 하나이다. DEA는 학교, 병원, 은행, 공장 등의 성과를 평가하는데 널리 이용되어 왔다[13].

DEA는 동일한 복수의 입력 요인과 출력 요인을 가지는 의사결정 단위(Decision Making Units, DMUs) 집합에 대해, 각 DMU의 상대적 효율성을 측정하는 분석 모형이다. n개의 DMU가 있고 m개의 투입 요소, s개의 산출 요소가 있을 때, 분석 대상이 되는 DMU p의 상대적 효율성 점수는 Charnes 등[5]에 의해 제안된 다음과 같은 선형계획법 문제를 풀어 구할 수 있다.

(DEA-P)

$$\max_{u,v} \quad \sum_{k=1}^{s} v_k y_{kp}$$
$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{m} u_j x_{jp} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{s} v_k y_{ki} - \sum_{j=1}^{m} u_j x_{ji} \le 0, \ \forall i,$$

$$u_j \ge 0, \ v_k \ge 0, \ \forall j,k$$

여기서 y_{ki}는 DMU i가 생성하는 산출 요소 k의 양, x_{ji}는 DMU i가 사용하는 투입 요소 j의 양, v_k는 산출 요소 k에 부과되는 가중치, u_j는 투입 요소 j에 부과되는 가중치를 가리킨다. 이 문제를 n번 풀어 모든 DMU들의 상대적 효율성 점수를 구할 수 있으며, 각각의 DMU에 대해 그 효율성 점수를 최대화시킬 수 있는 산출 요소 및 투입 요소의 가중치들이 구해진다. 일반적으로, 하나의 DMU에 대해 그 효율성 점수가 1이라면 해당 DMU는 효율적이라고 하고, 1이하라면 비효율적이라고 한다. 모든 비효율적 DMU에 대해 성과 개선을 위한 벤치마킹 대상으로 삼을 수 있는 효율적 DMU 집합을 구할 수 있는데, 다음의 쌍대 문제를 풀어 구할 수 있다.

$$\text{(DEA-D)} \quad \min_{\theta,\pi} \ \theta$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{n} \pi_i x_{ji} - \theta x_{jp} \le 0, \ \forall j$$

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i y_{ki} - y_{kp} \ge 0, \ \forall k$$

$$\pi_i \ge 0, \ \forall i$$

여기서 θ는 효율성 점수이고, π는 쌍대변수이다. 이 문제를 통해 DMU p보다 더 적은 투입 요소를 사용하면서도 더 많은 산출 요소를 생성할 수 있는 DMU 결합체(DMU들의 선형 결합)를 식별할 수 있고, π가 그 선형 결합 계수에 해당한다. DMU p는 이 DMU 결합체를 벤치마킹 대상으로 삼아 성과를 개선시킬 수 있다[4].

실제에서는 DEA의 데이터가 되는 입력 요소와 출력 요소의 값들이 정확하고 확실한 값으로 주어지기 보다는 다소 부정확하거나 애매모호하게 표현되는 경우가 많다. 이러한 경우 입력 및 출력 요소의 값들을 퍼지 숫자로 표현하여 처리하는 접근법이 많이 연구되었다.

퍼지 계수를 가지는 DEA 문제는 아래와 같이 정형화될 수 있다.

(FDEA-P)

$$\max_{u,v} \ \langle\!\langle \tilde{\boldsymbol{y}}_{\cdot p}, \boldsymbol{v} \rangle\!\rangle$$

$$s.t. \quad \langle\!\langle \tilde{\boldsymbol{x}}_{\cdot p}, \boldsymbol{u} \rangle\!\rangle \approx 1$$

$$\langle\!\langle \tilde{\boldsymbol{y}}_{\cdot i}, \boldsymbol{v} \rangle\!\rangle \le \langle\!\langle \tilde{\boldsymbol{x}}_{\cdot i}, \boldsymbol{u} \rangle\!\rangle, \ i=1,\cdots,n,$$

$$\boldsymbol{u} \ge 0, \ \boldsymbol{v} \ge 0.$$

이 문제의 쌍대 문제는 아래와 같다.

(FDEA-D)

$$\min_{\theta,\lambda} \ \theta$$

$$s.t. \quad \theta \tilde{x}_{jp} \ge \langle\!\langle \tilde{\boldsymbol{x}}_{j\cdot}, \boldsymbol{\pi} \rangle\!\rangle, \ j=1,\cdots,m$$

$$\langle\!\langle \tilde{\boldsymbol{y}}_{k\cdot}, \boldsymbol{\pi} \rangle\!\rangle \quad y_{kp}, \ k=1,\cdots,s$$

$$\boldsymbol{\pi} \ge 0$$

위 문제들을 제 2장에서 논의한 방법에 따라 분명한 계수를 가지는 일반적인 선형계획법 문제로 변형하면 다음과 같다.

(FDEA-P')

$$\max_{u,v} \ V_P^{\lambda}(\langle\!\langle \tilde{\boldsymbol{y}}_{\cdot p}, \boldsymbol{v} \rangle\!\rangle)$$

$$s.t. \quad V_P^{\lambda}(\langle\!\langle \tilde{\boldsymbol{x}}_{\cdot p}, \boldsymbol{u} \rangle\!\rangle) = 1$$

$$V_P^{\lambda}(\langle\!\langle \tilde{\boldsymbol{y}}_{\cdot i}, \boldsymbol{v} \rangle\!\rangle) \le V_P^{\lambda}(\langle\!\langle \tilde{\boldsymbol{x}}_{\cdot i}, \boldsymbol{u} \rangle\!\rangle),$$

$$i=1,\cdots,n, \ \boldsymbol{u} \ge 0, \ \boldsymbol{v} \ge 0,$$

(FDEA-D')

$$\min_{\theta,\pi} \ \theta$$

$$s.t. \quad V_P^{\lambda}(\theta \tilde{x}_{jp}) \ge V_P^{\lambda}(\langle\!\langle \tilde{\boldsymbol{x}}_{j\cdot}, \boldsymbol{\pi} \rangle\!\rangle),$$

$$V_P^{\lambda}(\langle\!\langle \tilde{\boldsymbol{y}}_{k\cdot}, \boldsymbol{\pi} \rangle\!\rangle) \ge V_P^{\lambda}(\tilde{y}_{kp}),$$

$$j=1,\cdots,m, \ \ k=1,\cdots,s, \ \ \boldsymbol{\pi} \ge 0.$$

이를 다시 쓰면,

(FDEA-P')

$$\max_{u,v} \ v_1 V_P^{\lambda}(\tilde{y}_{1p}) + \cdots + v_s V_P^{\lambda}(\tilde{y}_{sp})$$

$$s.t. \quad u_1 V_P^{\lambda}(\tilde{x}_{1p}) + \cdots + u_m V_P^{\lambda}(\tilde{x}_{mp}) = 1$$

$$v_1 V_P^{\lambda}(\tilde{y}_{1i}) + \cdots + v_s V_P^{\lambda}(\tilde{y}_{si})$$

$$\le u_1 V_P^{\lambda}(\tilde{x}_{1i}) + \cdots + u_m V_P^{\lambda}(\tilde{x}_{mi}),$$

$$i=1,\cdots,n, \quad u_j \ge 0, \ v_k \ge 0, \ \forall j, k$$

(FDEA-D')

$$\min_{\theta,\pi} \ \theta$$

$$s.t. \quad \theta V_P^{\lambda}(\tilde{x}_{jp}) \ge \pi_1 V_P^{\lambda}(\tilde{x}_{j1}) + \cdots + \pi_n V_P^{\lambda}(\tilde{x}_{jn}),$$

$$\pi_1 V_P^{\lambda}(\tilde{y}_{k1}) + \cdots + \pi_n V_P^{\lambda}(\tilde{y}_{kn}) \ge V_P^{\lambda}(\tilde{y}_{kp}),$$

$$j=1,\cdots,m, \quad k=1,\cdots,s, \quad \pi_j \ge 0, \forall j$$

위와 같은 퍼지 DEA 문제를 평균 지수 변환법 및 가능성 접근법으로 풀었을 때 어떠한 결과를 얻을 수 있는지 예제를 통해 알아보자. 예제는 Guo and Tanaka

의 논문[9]에 있는 것을 사용하는데, 그 데이터는 아래 <표 1>과 같다. 각 투입 요소와 산출 요소의 값들은 대칭 소속 함수를 가지는 삼각 퍼지 숫자들로서 (c, d)로 표시한다. 단, c는 소속 함수의 값이 1이 되는 점, 즉 중심이고, d는 퍼지 숫자의 범위 양끝 값이 중심으로부터 떨어진 거리를 나타낸다.

<표 1> 2개의 투입 요소와 2개의 산출 요소를 가지는 5개의 DMU

DMU(i)	1	2	3	4	5
투입 요소 1	(4.0, 0.5)	(2.9, 0.0)	(4.9, 0.5)	(4.1, 0.7)	(6.5, 0.6)
투입 요소 2	(2.1, 0.2)	(1.5, 0.1)	(2.6, 0.4)	(2.3, 0.1)	(4.1, 0.5)
산출 요소 1	(2.6, 0.2)	(2.2, 0.0)	(3.2, 0.5)	(2.9, 0.4)	(5.1, 0.7)
산출 요소 2	(4.1, 0.3)	(3.5, 0.2)	(5.1, 0.8)	(5.7, 0.2)	(7.4, 0.9)

Lertworasirikul 등은 퍼지 DEA에 가능성 접근법을 제안하였는데, 위의 예제에 그 방법을 적용한 결과를 보였다. 구체적으로 그들은 퍼지 DEA의 원문제, 즉 (DEA-P)에 가능성 접근법을 적용하였고, 가능성 수준 α에 따른 각 DMU의 효율성 값을 계산하였다. 그 결과는 다음 <표 2>와 같다. 이 결과에 따르면, DMU2, DMU4, DMU5는 모든 가능성 수준에서 효율적이라고 할 수 있다. 그러나, DMU1과 DMU3는 특정 가능성 수준에서만 효율적이다.

<표 2> 가능성 접근법을 사용하였을 경우 5가지 가능성 수준에 따른 효율성 값

가능성 수준, α	$\tilde{f}$				
	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4	DMU5
0	1.107	1.238	1.276	1.52	1.296
0.25	1.032	1.173	1.149	1.386	1.226
0.5	0.963	1.112	1.035	1.258	1.159
0.75	0.904	1.055	0.932	1.131	1.095
1	0.855	1.000	0.861	1.000	1.000

DEA을 선형계획법으로 풀 때, 원문제를 통해서는 해당 DMU의 효율성 여부를 판단할 수 있고, 쌍대 문제를 통해서는 비효율적인 하나의 DMU에 대한 벤치마킹 대상을 식별할 수 있다. 그러나 가능성 접근법의 경우 원문제와 쌍대 문제의 관계가 모호하다는 단점이 있다. 즉, (FDEA-P)에 가능성 접근법을 적용하여 얻어진 선형계획법 문제와 (FDEA-D)에 가능성 접근법을 적용하여 얻어진 선형계획법 문제가 서로 쌍대 관계가 아니다. 반면, 평균 지수 변환법을 적용할 경우에는 쌍대 관계가 정확히 성립한다. 이는 평균 지수 연산자가 선형이라는 특성 때문이다.

위 예제에 평균 지수 변환법을 적용해 보자. 확률분포 P가 일양분포이고 $Y=[0,1]$라고 한다면, 삼각 퍼지 숫자 $\tilde{a}=(c,d)$에 대한 $V_P^\lambda(\tilde{a})$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V_P^\lambda(\tilde{a}) &= \frac{1}{2}[c+\lambda(c+d)+(1-\lambda)(c-d)] \\ &= c+(\lambda-0.5)d \end{aligned}$$

이를 이용하여 문제를 일반 선형계획법 문제로 변환한 후, 최적해를 구해보면 그 결과가 <표 3>과 같다. DMU2, DMU4, DMU5는 모든 λ에 대해서 효율적이고, DMU1, DMU3은 어떠한 λ에 대해서도 효율적이 아니며 그 효율성 값은 조금씩 달라진다. 여기서 비효율적인 DMU들에 대해서는 쌍대 문제 (FDEA-D)를 풀어 벤치마킹 대상을 찾을 수 있다.

<표 3> 평균 지수 접근법을 사용했을 경우 5가지 λ값에 따른 효율성 값

λ	$V_P^\lambda(\langle\!\langle \tilde{y}_{\cdot p}, v \rangle\!\rangle)$				
	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4	DMU5
0	0.882	1.000	0.840	1.000	1.000
0.25	0.868	1.000	0.852	1.000	1.000
0.5	0.855	1.000	0.861	1.000	1.000
0.75	0.854	1.000	0.868	1.000	1.000
1	0.865	1.000	0.879	1.000	1.000

참고문헌

[1] Bellman, R. E. and Zadeh, L. A.; "Decision making in fuzzy environment," *Management Science*, 17 : 141-164, 1970.

[2] Bortolan, G. and Delgani, R.; "A review of some methods for ranking fuzzy subsets," *Fuzzy Sets and Systems*, 15 : 1-19, 1985.

[3] Campos, L. M. and Gonzalez, A.; "A subjective approach for ranking fuzzy numbers," *Fuzzy Sets and Systems*, 29 : 145-153, 1989.

[4] Charnes, A., Cooper, W. W., Lewin, A. Y., and Seiford, L. M.(Eds.); *Data envelopment analysis : Theory, methodology, and applications*, Boston: Kluwer, 1994.

[5] Charnes, A., Cooper, W. W., and Rhodes, E.; "Measuring the efficiency of decision making units," *European Journal of Operational Research*, 2 : 429-444,

1978.

[6] Chen, S. J. and Hwang, C. L.; *Fuzzy multiple attribute decision making, Methods and Applications*, Springer, Berlin, 1992.

[7] Dubois, D. and Prade, H.; *Possibility theory : an approach to computerized processing of uncertainty*, Plenum Press, New York, 1988.

[8] Ganesan, K. and Veeramani, P.; "Fuzzy linear programs with trapezoidal fuzzy numbers," *Annals of Operational Research*, 143 : 305-315, 2006.

[9] Guo, P. and Tanaka, H.; "Fuzzy DEA : a perceptual evaluation method," *Fuzzy Sets and Systems*, 119 : 149-160, 2001.

[10] Hougaard, J. L.; "Fuzzy scores of technical efficiency," *European Journal of Operational Research*, 115 : 529-541, 1999.

[11] Lertworasirikul, S., Fang, S.-C., Joines, J. A., and Nuttle, H. L. W.; "Fuzzy data envelopment analysis (DEA) : a possibility approach," *Fuzzy Sets and Systems*, 139 : 379-394, 2003.

[12] Rommelfanger, H.; "Fuzzy linear programming and applications," *European Journal of Operational Research*, 92 : 512-527, 1996.

[13] Talluri, S.; "Data envelopment analysis : models and extensions," *Decision Line*, 31 : 8-11, 2000.

[14] Tanaka, H., Okuda, T., and Asai, K.; "On fuzzy mathematical programming," *Journal of Cybernetics*, 13 : 37-46, 1974.

[15] Tanaka, H. and Asai, K.; "Fuzzy linear programming problems with fuzzy numbers," *Fuzzy Sets and Systems*, 13 : 1-10, 1984.

[16] Zadeh, L. A.; "Fuzzy sets," *Information and Control*, 8 : 338-353, 1965.

[17] Zadeh, L. A.; "The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning I, II, and III," *Information Sciences*, 8 : 199-249, 301-357; 9 : 43-80, 1975.

[18] Zadeh, L. A.; "Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility," *Fuzzy Sets and Systems*, 1 : 3-28, 1978.

[19] Zimmermann, H. J.; "Optimization in fuzzy environment," presented at XXI Int. TIMES and 46th ORSA Conference, San Juan, Puerto Rico, 1974.