韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2008. 05. 제 47권, 제 2호, 169-180

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2008, Vol. 47, No. 2, 169-180

# 수학 문제해결 과정에서 나타나는 초등학생들의 수학적 사고 분석

**조 두 경 (서울강남초등학교)**
**박 만 구 (서울교육대학교)**

## I. 서 론

현재를 살아가는 학생들은 컴퓨터를 이용한 기술문명의 급격한 발달과 변화, 그리고 다양한 지식과 정보의 홍수 속에 살아가고 있다. 이러한 사회에서는 새로운 선택과 결정의 순간이 많아지게 되고 문제 상황에 직면하게 되면 창의적인 생각과 자기 주체성을 가지고 문제를 해결하는 능력이 요구되어 진다. 이에 따라 학생들이 자기 주도적으로 스스로 사고하고 논리적으로 탐구하여 추론하는 수학적 힘을 기르고, 활동적이며 자발적인 자세로 문제 해결력 및 다양한 수학적 사고 기능을 도와주는 것이 최근 수학교육의 흐름이다(김상룡, 2000). 또한 21세기 수학교육은 학생들의 수학 학습 능력과 학습 심리를 최대한 고려하는 것을 기본 방향으로 하고 있는데(교육인적자원부, 2005), 이를 기반으로 하는 학생들의 문제해결력 신장은 수학교육에서 강조해야 할 가장 중요한 요소 중의 하나이다(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989, 2000).

세계 수학교육의 흐름에 중요한 영향을 끼치고 있는 NCTM은 20여 년 전부터 일관되게 학생들의 문제해결을 강조해 오고 있다. NCTM은 문제해결이 모든 수학학습의 중요한 부분이 된다고 하였다.

> 수학에서 문제해결을 학습함으로써 학생들은 사고의 방법, 인내심과 호기심의 습관, 수학교실 밖에서의 익숙하지 않은 문제 상황 속에서도 확신을 갖는 것을 습득해야한다. 우리의 일상적인 삶과 일터에서 좋은 문제 해결자가 된다는 것은 많은 유익을 주게 된다. (NCTM, 2000, p. 52).

박만구(2002)는 학생이 수학을 어떻게 학습하는지에 관한 연구에서 교사가 어떻게 수학을 가르쳐야 하는지에 관한 것으로 관심이 변하고 있지만, 학생의 수학에 대한 세밀한 관찰을 토대로 한 교수 방법에 관한 연구는 많지 않다고 하였다. 이는 학생이 어떻게 수학을 하는지에 대하여 교사는 별 주목을 하지 않았거나 관심이 상대적으로 적었다는 것을 말해 주고 있다고 볼 수 있다. 또한 학교 교실에서 이루어지는 수학 수업의 성공을 위해서 교사는 학생들과의 상호 작용을 통해 수학 문제해결 과정에서 나타나는 초등학생들의 수학적 사고에 대하여 심층적으로 알아야 한다고 하였다.

본 연구에서는 수학 문제해결 과정에서 나타나는 초등학생들의 수학적 사고를 수학적 지식, 발견 전략, 조정, 수학적 성향의 4가지 구성요소로 분류하고 사례연구 방법을 적용하여 각각의 특성을 분석하였다. 그리고 분석한 결과를 바탕으로 수학적 사고의 네 가지 구성요소와 관련된 수학과 교수·학습에 대한 시사점을 제시하였다.

## II. 문제해결과 수학적 사고

### 1. 문제와 문제해결

문제(問題, Problem)에 대하여 수학에서의 정의는 학자에 따라 다양하고 모든 학습자의 수준에 따라 서로 다를 수 있으므로 한마디로 정의할 수는 없다. 본 연구에서는 Krulik과 Rudnick(1987)의 문제의 정의를 참고하여 문제를 목표(구하고자 하는 것), 주어진 상태(주어진 조건), 장애 요인이 포함되어 있고, 해결의 방법이 존재하

---

* 2008년 2월 투고, 2008년 5월 심사 완료.
* ZDM 분류 : D53
* MSC2000 분류 : 97D50
* 주제어 : 수학적 사고, 문제해결
* 본 연구의 초안은 2007년 8월 초등수학교육학회세미나에서 발표하였음.

는 초등학교 학생 수준의 수학적 문제로 정의하였다.

문제해결(問題解決)은 지식, 사고조작, 경험을 이용하여 주어진 문제의 해를 찾아가는 과정(process)이다. 즉 문제를 해결하기 위하여 주어진 조건으로부터 구하고자 하는 해로 진행되는 동안에 사용되어진 일련의 사고와 행동으로 산출된 결과만이 아닌 전체 과정을 문제해결이라고 하였다.

### 2. 문제해결의 과정

Polya(2004)는 자신이 문제를 해결해 왔던 경험을 분석한 뒤 문제해결 과정을 네 단계로 나누어 제시하였다. 첫 번째는 문제를 이해하는 문제에 대한 이해 단계(Understanding the problem), 두 번째는 궁극적으로 풀이에 대한 계획을 작성하는 계획의 작성 단계(Devising a plan), 세 번째는 계획을 실행하는 계획의 실행 단계(Carrying out the plan), 네 번째는 얻어진 풀이를 점검하는 반성의 단계(Looking back)이다. Polya는 각 단계에 필요한 유효하고 일반화된 발문과 권고에 따라 사고해 가는 방법을 제시하였다.

Schoenfeld(1985)는 학생들의 인지적 특성과 정의적 특성의 전단계인 신념의 체제를 강조하며 Polya가 제시한 네 단계를 바탕으로 다섯 단계의 문제해결 과정을 제시하였다. 다섯 단계는 문제에 대한 감각을 얻는 분석(Analysis), 해결과정을 제시해 주는 계획(Design), 문제해결을 하는 탐구(Exploration), 문제해결의 최종적 단계인 실행(Implementation), 전체적인 흐름을 재음미하는 검증(Verification)이다.

한국교육개발원(1989)이 제시한 모형은 Polya의 네 단계와 유사하다고 할 수 있으며 실제 교수·학습 상황에서 문제해결력을 어떻게 신장 시킬 수 있느냐 하는데 초점을 두었다. 특징으로는 문제 이해의 전 단계로 문제의식을 설정하여 문제 의식, 문제 이해, 계획 수립, 계획 실행, 반성의 다섯 단계로 구분하여 구안하였다는 것이다.

여러 학자들의 의견을 검토해 보면 문제해결의 과정을 설명하기 위해 사용하는 용어와 단계가 약간 상이하기는 하지만 그 전체적인 흐름은 Polya(2004)가 제시하고 있는 것과 크게 다르지 않음을 알 수 있다.

### 3. 문제해결로서의 수학적 사고

학생들은 수학적 지식을 이용하여 문제의 내용을 정확히 이해하고 그 이해를 바탕으로 문제해결의 계획을 세우고 문제에 적합한 해결전략을 수립하여 문제를 해결한다. 이때 학생들이 어떤 발견 전략을 사용하고 해결과정을 조정하고 확인하는지의 일련의 수학적 사고 과정이 문제해결의 본질이며 수학교육의 초점이 될 수 있다.

Polya는 수학교육은 수학적 사고, 곧 수학을 하는 정신적 활동의 교육이고, 수학적으로 사고한다는 것은 문제를 해결하는 것이라고 하였다. 문제해결로서의 수학적 사고는 직관과 논리가 긴밀하게 결합된 사고 작용을 통해 수학문제를 해결해 가는 체계적인 정신 활동이라고 할 수 있다(우정호, 2001b).

### 4. 수학적 사고의 구성요소

수학적 사고는 여러 학자들에 의하여 다양하게 정의되고 분류되어 왔다. 본 연구에서는 한국교육개발원(1989)에서 Schoenfeld의 문제 해결 행동 요인과 Charles와 Burton의 연구 결과를 참고로 하여 추출한 수학적 지식, 발견 전략, 조정, 수학적 성향을 수학적 사고의 네 가지 구성요소라고 하였다.

수학적 지식은 개념적 지식과 절차적 지식으로 구성된 형식적 지식과 직·간접 경험으로 얻은 비형식 지식으로 구성된다. 발견 전략은 문제해결로의 진전에 도움을 주는 방법으로써 경험과 학습에서 나온 규칙이다. Polya(2004)는 발견전략이 문제를 더 잘 이해하거나 그 해결로의 진전을 만들도록 도움을 주는 일반적인 암시일 뿐 완전한 해결을 보장하는 것은 아니라고 하였다. 조정이란 올바른 접근 방법을 선택하고 추구하는 것, 부적절한 선택을 적절한 선택으로 바꾸는 것, 전반적인 문제해결 과정을 점검하고 조감하는 것이다. 이러한 조정은 문제해결의 전 과정에 영향을 미친다. 수학적 성향은 개인의 태도 및 행위를 좌우하는 고도의 일반적인 작용원리로서, 특별히 어떤 방식으로 행동하려는 습관적인 경향성이다(한국교육개발원, 1989). 또한 수학에 대한 긍정적·부정적 신념과 선호하는 수학적 태도의 의미가 수학적 성향에 포함된다.

# Ⅲ. 연구 방법

## 1. 연구 참여자

본 연구에서는 서울N초등학교 5학년 학생 8명을 성별, 수학성취도, 선행학습 정도의 각 특성을 고려하여 참여 대상자로 선정하였다. 연구 참여자의 특성을 내용별로 정리하면 <표Ⅲ-1>과 같다.

<표Ⅲ-1> 연구 참여자의 특성

| 연구참여자 / 내 용 | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 성 별 | 여 | 여 | 여 | 여 | 남 | 남 | 남 | 남 |
| 수학성취도 | 상 | 상 | 중 | 중 | 상 | 상 | 중 | 중 |
| '선행학습 정도 | 6-나 | 6-가 | 6-나 | 5-나 | 5-나 | 6-가 | 5-나 | 5-나 |

## 2. 연구 방법

본 연구에서는 문제해결이라는 특정한 예를 선정하여 문제해결 과정에서 나타나는 초등학생들의 수학적 사고를 자연스러운 맥락에서 분석하기 위해 질적 연구방법인 사례연구를 적용하였다. 연구는 2007년 3월부터 6월까지 각 연구 참여자에게 1차에 6문항씩 2차에 걸쳐 총 16회의 서술형 지필검사를 하면서 참여관찰 및 검사과정과 검사 후에 반구조화된 면담을 통하여 자료를 수집하였다. 이 과정에서 수학적 사고의 네 가지 구성요소에 해당되는 말과 행동이 연구 참여자에게 반복되어 공통적으로 나타나는 내용을 분석의 대상으로 하여 범주화하고 분석하였다. 이 모든 과정을 비디오카메라를 이용하여 녹화하여 문서로 기록한 자료와 문제해결 과정에서 나타나는 수학적 사고와 관련된 행동 특징을 참여관찰과 반구조화 된 면담을 통해 기록한 자료를 삼각검증법을 이용하여 분석하였다.

## 3. 자료 수집

이용숙과 김영천(1998)의 '교육에서의 질적 연구'에 제시되어 있는 자료 수집 방법인 서술형 지필 검사, 참여 관찰, 반구조화 된 면담을 이용하여 자료를 수집하였다.

### 가. 서술형 지필 검사

본 연구에서 사용된 검사문항은 연구 참여자가 선행학습한 영향을 적게 받고 다양한 수학적 사고가 일어날 수 있는 내용이 포함되도록 고려되어 졌다. 그리고 각 단원의 내용을 기반으로 하여 응용 심화된 내용이 포함되고 8단원의 '문제 푸는 방법 찾기'에서 현재 학년에서 학습하고 있는 내용과 관련이 깊고, 여러 가지 해결전략의 사용이 가능하다고 판단되는 서술형 지필 검사문제 12문항을 연구자가 선정하여 재구성하거나 제작하였다(부록 1).

연구 참여자들은 1명 또는 2명이 1차에 6문항씩 2차에 걸쳐 한 문항에 10여분의 시간동안 검사문항을 해결하였다. 또한 검사문항을 해결할 때 발성사고법(thinking aloud)을 이용하여 생각이 나는 내용을 자연스럽게 말하게 하였다.

### 나. 참여 관찰

참여 관찰은 연구자가 연구 참여자의 문제해결 과정에 최소한의 직접 참여만 하면서 순간적인 대화 내용까지도 수집하여 자료로 사용하는 자료 수집 방법이다. 문제해결 과정에서 수학적 사고와 관련지어 나타나는 연구참여자의 행동과 말을 가능한 자세히 기록하였다.

### 다. 반구조화 된 면담

연구 참여자와 비형식적인 대화를 통해서 자료를 수집하는 반구조화 된 면담은 연구 참여자의 이해와 지식을 보다 깊이 있고, 폭넓게 제공받을 수 있다. 서술 형태로 기술된 답지를 보면서 연구 참여자의 사고과정에 대한 통찰을 요구하는 특징적인 발견 전략의 사용과 해결과정 내용이나, 궁금한 사항, 특이한 행동을 보인 학생을 대상으로 문제해결 과정 중이라도 면담을 실시하여 자료를 수집하였다.

서술형 지필 검사와 참여 관찰 및 반구조화 된 면담 내용을 문서화한 자료에 코드를 부여하였다(Bogdan & Biklen, 2007, pp. 159-197). 코드의 체계는 <표Ⅲ-2>와 같다.

<표III-2> 코드 체계

| B | S | - | 05 | 007 |
|---|---|---|---|---|
| 해당 학생의 표시 | S:학생의 반응<br>T:연구자의 질문 및 관찰내용(괄호) | | 문항 번호 | 반응의 순서 |

예를 들면 BS-05007은 B학생의 프로토콜 내용 중 문항번호 5번의 7번째 반응이라는 뜻이고, CT-07008은 C학생의 프로토콜 내용 중, 문항번호 7번의 8번째 연구자의 질문 또는 관찰내용을 나타낸다.

## IV. 분석 및 논의

### 1. 수학적 사고 구성요소에 따른 분석

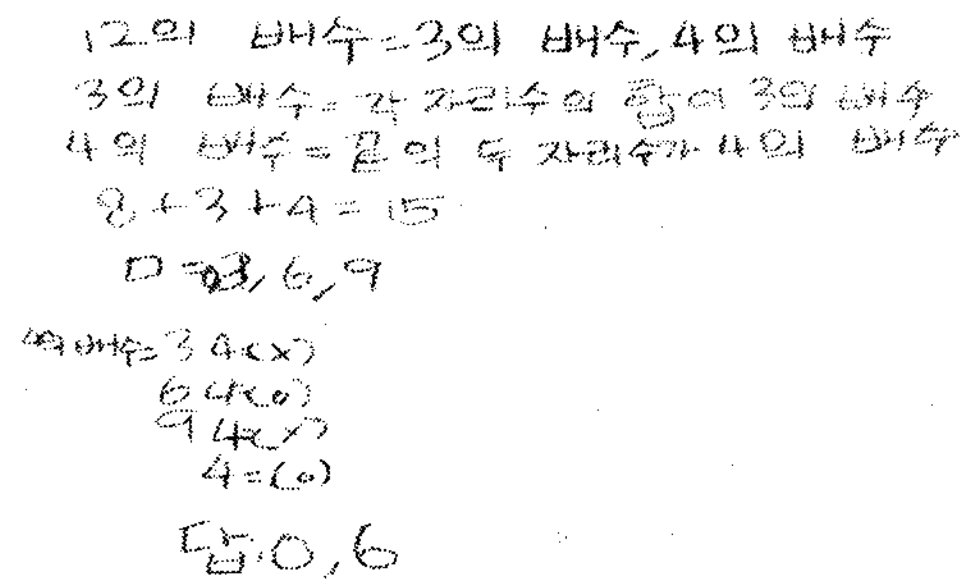
문제해결 과정에서 나타나는 초등학생들의 수학적 사고를 수학적 지식, 발견 전략, 조정, 수학적 성향의 네 가지 구성요소로 분류하고 범주화하여 분석하였다. 문제를 해결하는 과정에서 수학적 사고의 네 가지 구성요소에 해당되는 말과 행동이 연구 참여자 8명 중에서 4명 이상에게 공통으로 나타나는 내용을 분석의 대상으로 하였다.

#### 가. 수학적 지식

수학적 지식은 일반적으로 형식적 지식과 비형식적 지식으로 구성되어 있고, 형식적 지식은 다시 개념적 지식과 절차적 지식으로 나눌 수 있다.

1) 개념적 지식(conceptual knowledge)

개념적 지식은 "~을 아는 것(knowing what)"으로 내용지식과 설명지식으로 구성된 사고들에 관한 지식이며 수학적 용어와 약속, 기호 등이 해당된다. 연구 참여자가 어느 수준의 개념적 지식을 소유하고 있느냐에 따라 문제 해결 방법과 능력은 다르게 된다. 연구 참여자 A는 문항2에서 3의 배수와 4의 배수에 대한 정확한 개념과 이를 통해 12의 배수에 대한 지식을 이끌어 내어 주어진 문제를 성공적으로 해결하였다. 이에 대한 문제 해결 과정 <그림VI-1>과 면담내용은 다음과 같다.



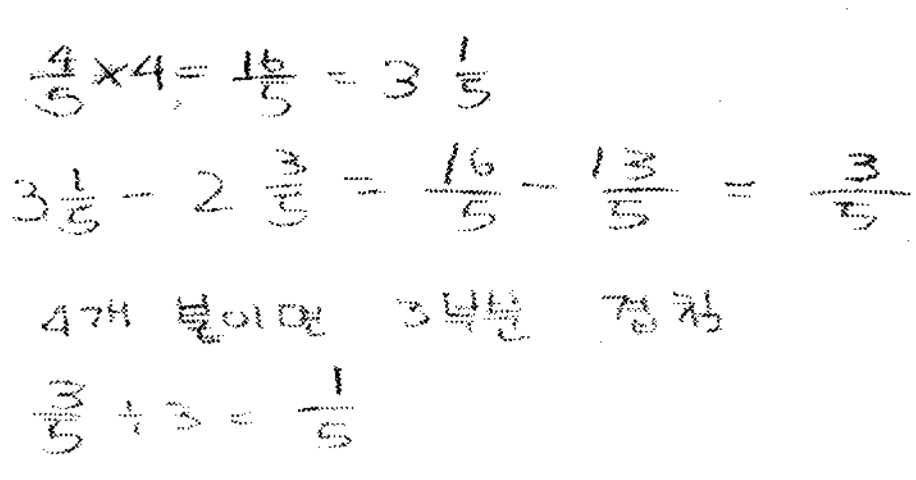

<그림IV-1> 개념적 지식을 활용하여 해결한 경우

**AS-02001**: 12의 배수는? 음, 3의 배수이고 4의 배수이면 되지.

**AS-02002**: 12의 배수는 3의 배수이고, 4의 배수이면 되니까요. 3의 배수는 각 자리 수의 합이 3의 배수이고, 4의 배수는 끝의 두 자리가 수가 4의 배수이면 돼요. 먼저 각 자리의 수를 더하면 15가 되어 □안에 들어가는 수는 0, 3, 6, 9가 될 수 있어요. 그 중에서 4의 배수는 3과 9는 안 되고, 0과 6만 되는데요?

2) 절차적 지식(procedural knowledge)

절차적 지식은 "~을 할 줄 아는 것(knowing how)"으로 어떤 과정 또는 절차에 대한 지식이다. 절차적 지식은 두 가지로 이루어져 있는데 그 하나는 수학의 형식적 언어 즉 기호 표현 체계이고 또 하나는 수학적 문제를 해결하는데 사용하는 규칙, 알고리즘 또는 절차들로 이루어져 있다(우광식, 1995). 절차적 지식은 정확하고 빠르게 문제를 해결하는 좋은 방법이며 기능이다. 연구 참여자 C는 문제에 알맞은 식을 세우고 적절한 절차를 통하여 문제를 해결하였다. 이에 대한 문제해결 과정 <그림VI-2>와 면담 내용은 다음과 같다.



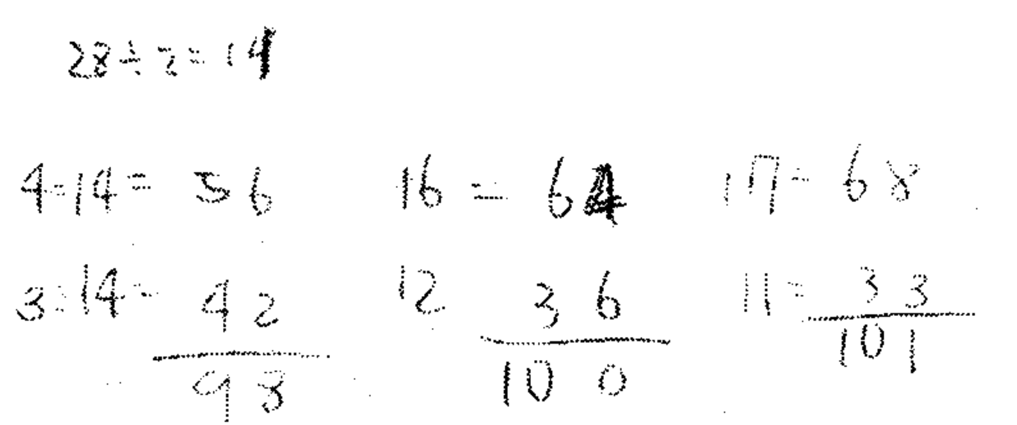

<그림VI-2> 절차적 지식을 활용하여 해결한 경우

**CT-01001**: (그림 그리는 것이 없이 식을 세워 문제를 푼다.) 설명해 볼까?

**CS-01001**: 색 테이프 4개를 겹치면 3개의 겹친 부분이 나오니까. 이 값을 3으로 나누면 5분의 1이 나오는데 그것은 5분의 1씩 겹친다는 거예요.

3) 비형식적 지식

비형식적 지식은 학생들이 일상생활 속에서 실제로 체험하여 직접적으로 경험하거나 또는 책이나 이야기를 통해 간접적으로 경험하여 알게 된 것이다. 또 우정호(2001a, pp. 72-73)가 정의한 "풍부하고 다양하며 충분한 경험을 통한 증거나 정확하고 엄밀한 논리적 추론과 논증에 의해 뒷받침되지도 않았음에도 불구하고, 학생들이 분명한 것으로 인정하며 수용하는 경향이 있는 직관"도 본 연구에서는 비형식적 지식이라 하였다. 연구 참여자 C는 경험을 통하여 얻은 반으로 나누어 보는 직관이라는 비형식적 지식을 활용하여 문항6을 해결하였다. 이에 대한 해결 과정 <그림VI-3>과 면담 내용은 다음과 같다.




<그림VI-3> 비형식적 지식을 활용하여 해결한 경우

**CS-06001**: (문제를 읽으며 28에 표시를 한다.)

**CS-06002**: (28 ÷ 2 = 14를 쓰면서) 나누면서 이건 찍어야 되니까.

**CT-06001**: 무엇을 찍어?

**CS-06003**: 이거는요. 예상을 해 봐야 되니까? 딱 해보기에 반으로 나누어서 해보면 어느 쪽이 많은 지를 알기가 쉬워요

**CT-06002**: 누가 알려 주었니?

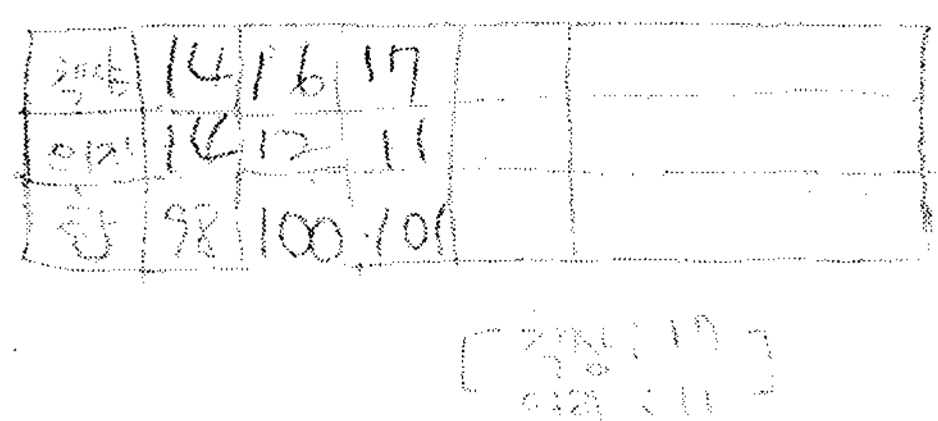
**CS-06004**: 제가 생각했어요. 문제를 풀다가 반으로 쪼갰을 때 답이 되는 게 많았어요.

나. 발견 전략

발견 전략은 문제해결에 도움을 주는 방법으로 문제에 따라 적용이 달리 될 수 있다. 발견 전략으로는 기존에 존재하는 방법을 학습하고 경험한 특수 전략과 처음 접한 문제에 적용할 수 있는 무계획적 시행착오의 방법과 같은 일반 전략이 있다. 학생들은 문제에 따라 여러 가지 전략을 다양하게 생각할 수도 있고, 또 그 전략 가운데 가장 효율적으로 문제를 해결할 수 있는 전략을 선택할 수 있다.

1) 특수 전략

문제에 따라 다양한 전략을 생각하고 선택해야 하는데 본 연구 참여자들은 경험했던 발견 전략을 선택하여 문제를 해결하는 경향을 보였다. 이는 이지영(2007)이 말한 문제의 이해와 분석을 바탕으로 하기보다는 예전에 비슷한 문제를 해결하였던 경험을 바탕으로 하는 것과 같다고 할 수 있다. 연구 참여자 B는 문제를 읽은 후 다양한 해결 전략을 생각하거나 시도하려 하지 않고 자신이 경험하였던 전략 중에서 표를 그리는 방법을 선택하여 문제를 해결하였다. 이에 대한 문제해결 과정 <그림IV-4>와 면담 내용은 다음과 같다.




<그림IV-4> 특수 전략을 활용하여 해결한 경우

**BT-06001**: 처음 본 문제니?

**BS-06001**: 이런 문제 많이 풀어 봤어요.

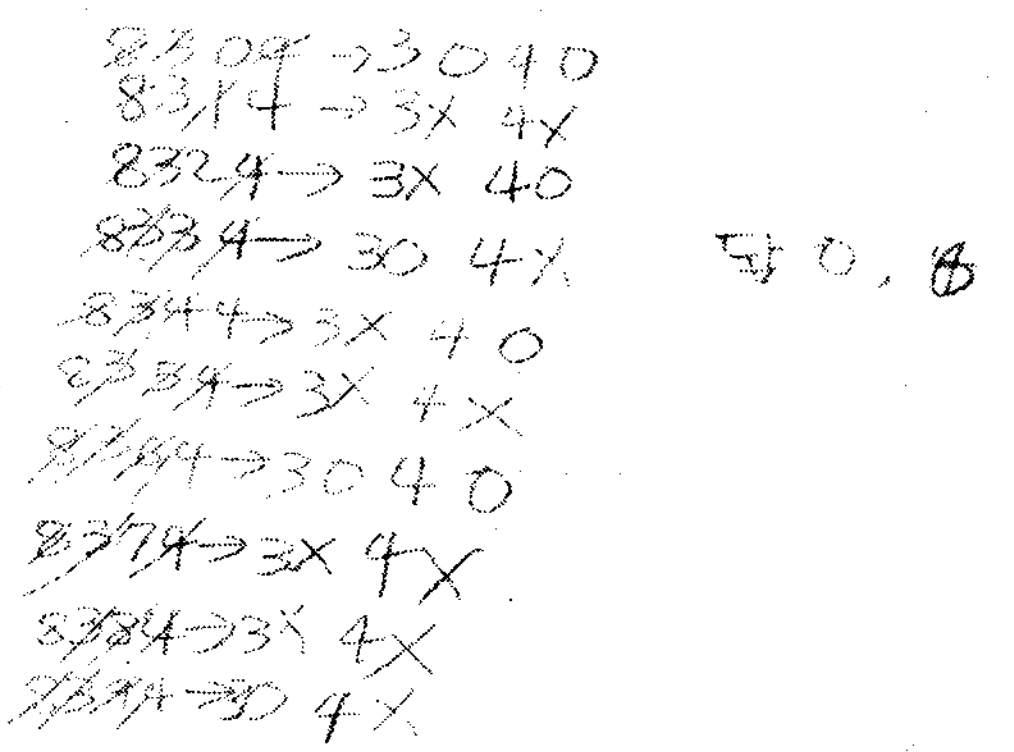
**BT-06002**: (문제를 읽은 후 바로 표를 그려 답을 구한다.) 설명 해 볼까?

**BS-06002**: 대부분 표나 예상하고 확인해서 풀어요. 이번에는 표로 풀어 봤어요. 네 번 만에 풀었어요. 책상 하나씩 늘어나고, 의자가 하나씩 줄어들면 다리가 1개씩 늘어나요. 그래서 책상은 17개 의자는 11개요.

2) 일반 전략

처음 보는 문제를 접하게 되면 초등학생들은 어떻게 해결할 지를 궁리하다 쉽게 해결 전략이 떠오르지 않으면 조건을 만족하는 모든 경우를 생각하여 해결한다. 이러한 방법을 무계획적 시행착오라 하며, 이는 계획 없이 가능한 조작을 적용해 보는 방법이다(Wickelgren, 1995,

p. 46). 연구 참여자 H는 12의 배수를 구하는데 모든 경우의 수를 생각하여 문제를 해결하였다. 이에 대한 문제해결 과정<그림Ⅳ-5>와 면담 내용은 다음과 같다.



<그림Ⅳ-5> 일반 전략을 활용하여 해결한 경우

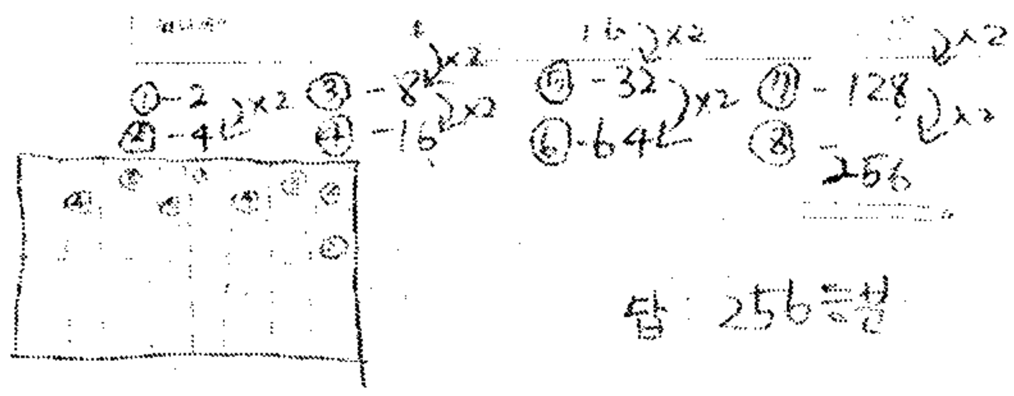
**HT-02001**: 처음 보는 문제니?
**HS-02001**: 아니요. 그런데 12의 배수를 구하는 문제는 처음이에요.
**HS-02002**: (문제를 읽어 본 후 문제를 풀기 시작 한다.) 4이면서 3의 배수이면 될 것 같은데
**HS-02003**: (□안에 1부터 9까지 넣어가며 구한 후, 맨 나중에 0을 넣어서 구한다.) 0과 6요.

### 다. 조정

조정은 문제해결 과정에서 선택한 전략이나 절차를 자신이 생각하기에 보다 효과적이라고 생각하는 또 다른 것으로 대치하는 것을 의미한다. 학생들은 문제를 해결하는 과정에서 여러 가지 조정의 형태를 보였다. 발견 전략 선택에 있어서 처음에 선택한 전략을 보다 효과적이라고 생각하는 전략으로 전환하는 조정과 문제 해결과정에서 조정을 거치면서 문제해결에 성공을 하는 경우도 있었다.

#### 1) 발견 전략 선택의 조정

학생들은 문제해결을 위해 발견 전략을 선택하는데 있어 조정을 하였다. 연구 참여자 B는 그림그리기 전략을 사용하여 문제를 해결하려 하였으나 해결에 어려움을 느껴, 조정을 하여 그림 그리기와 규칙을 찾는 전략을 함께 사용하여 문제 해결에 성공을 하였다. 이에 대한 문제해결 과정 <그림Ⅳ-6>과 면담 내용은 다음과 같다.

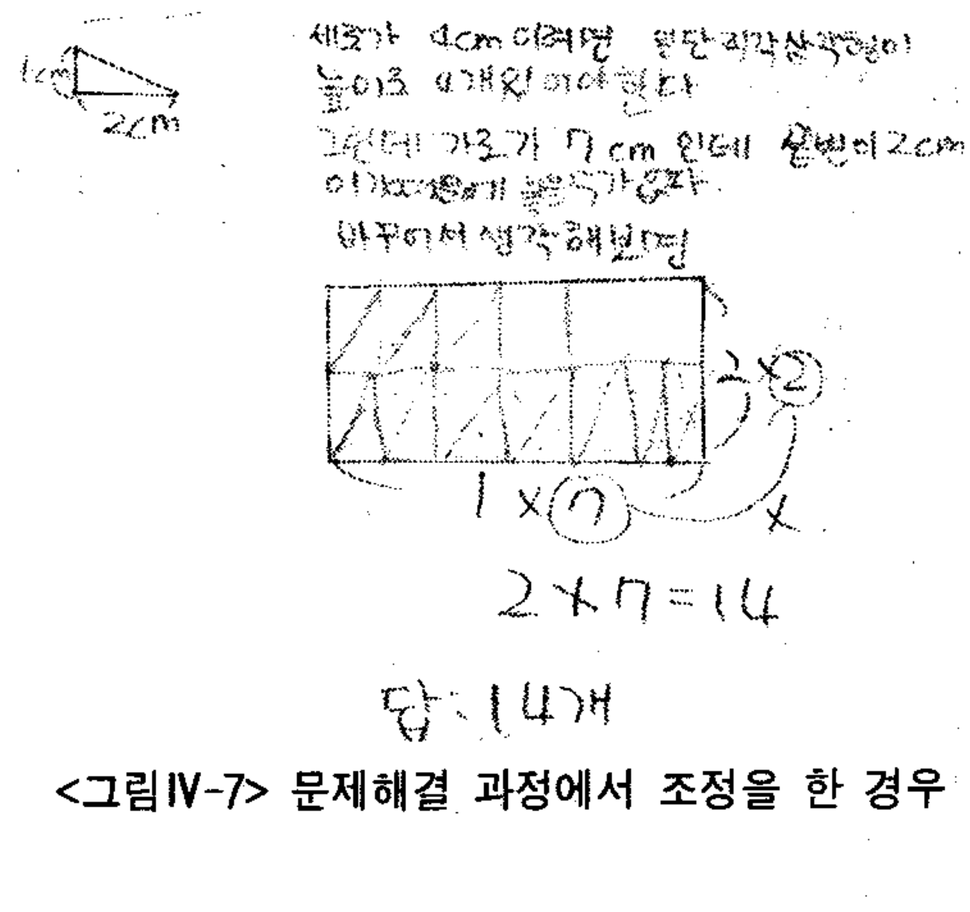


<그림Ⅳ-6> 발견 전략 선택의 조정을 한 경우

**BS-03004**: (실제로 접는 것처럼 그림을 그리고 숫자를 적어 표시한다. 규칙을 찾은 듯하다.)
**BS-03005**: 됐다!
**BT-03002**: 어떻게 해결했는지 설명해 볼까?
**BS-03006**: 저는 그림을 그려서 해 봤어요. 처음에 이해가 안 되어 그림을 그려서 해결했어요.
**BT-03003**: 무엇이 이해가 안 되었지?
**BS-03007**: 여덟 번 접었을 때, 머릿속으로 그려 봤는데 머릿속에서는 헷갈려서 안 그려져요. 그래서 그림을 그려 봤어요. 한번 접으니까 두 조각으로 나누어지고, 두 번 접으니까 네 조각으로 나누어지고, 세 번 접으니까 8조각으로 나누어지더라고요. 그래서 곱하기 곱하기가 계속 반복되니까 8번째까지 찾아서 해 봤어요. 그랬더니 256요.

#### 2) 문제해결 과정의 조정

학생들이 문제해결 과정에서 조정을 하여 문제해결을 성공으로 이끄는 경우는 매우 바람직하고 필요한 상황이라 할 수 있다. 연구 참여자 B는 해결과정에서 주어진 삼각형과 만들어야 하는 직사각형의 길이 조건을 더 생각하는 해결과정의 조정을 하여 문제해결에 성공하였다. 이에 대한 문제해결 과정 <그림Ⅳ-7>과 면담 내용은 다음과 같다.




<그림Ⅳ-7> 문제해결 과정에서 조정을 한 경우

**BT-12001**: (직사각형을 그리며 생각을 글로 쓰면서 문제를 해결한다.) 설명해 볼까요?

**BS-12001**: 처음에는 이런 모양(삼각형)을 그리고 나서 돌려 보는 것을 생각 안했는데 문제를 다시 읽어 보니 돌려서 해결해야 한다고 생각했어요.

**BT-12002**: 왜 돌려야 한다고 생각했는데 말해 줄까요?

**BS-12002**: 가로가 7cm인데 밑면이 2cm라 놓을 수가 없잖아요. 그래서 돌려 보았어요.

### 라. 수학적 성향

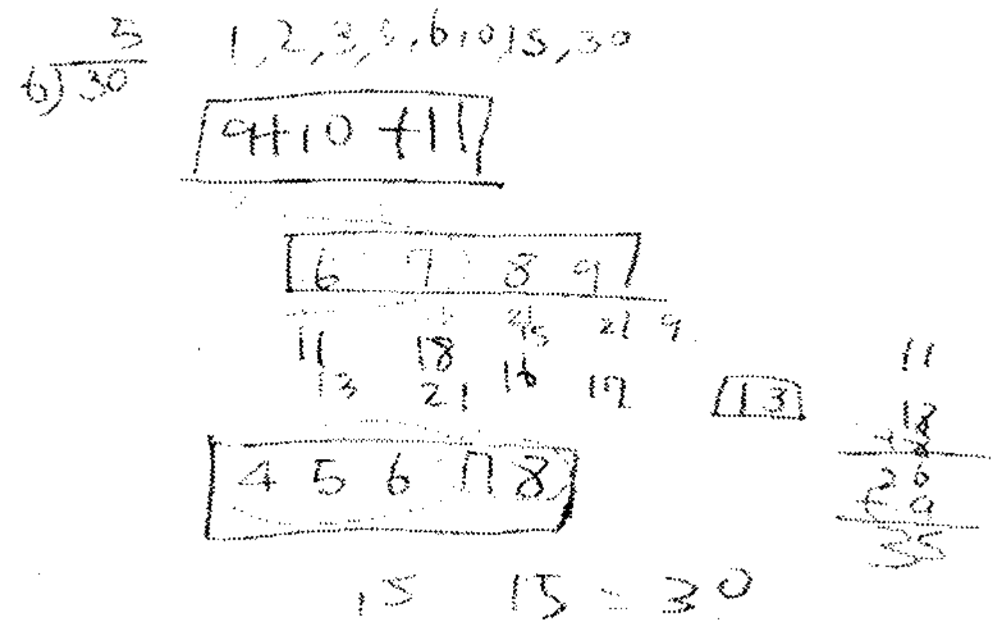
수학적 성향은 수학에 대하여 가지고 있는 수학적인 신념과 기존의 문제 해결의 경험에서 오는 태도를 의미한다. 이 때 수학적 신념은 긍정적 신념 또는 부정적 신념을 가질 수 있는데 이것이 문제 해결의 성패에 영향을 주기고 한다.

#### 1) 수학적 신념

수학적 신념은 학생들이 수학이라는 영역 안에서 인지적 활동과 관련하여 가지고 있는 관점이나 선입견이다. 이러한 신념은 수학적 지식, 발견 전략, 조정이 작용하는 것들을 개인적으로 특성화하는 기능을 가진다. 수학에 대한 개인의 신념은 문제를 이해하고 접근하기 위하여 어떠한 수학적 지식을 떠 올리고 문제 해결을 위하여 어떠한 전략을 선택하고 그 전략을 활용하여 해결 할지 말지를 결정하게 한다. 그리고 문제를 얼마나 오랫동안 매달리고 열심히 풀 것인지 등을 결정하기도 한다(이지영, 2007).

##### 가) 긍정적 신념

긍정적 신념을 소유한 학생은 문제해결 과정에서 어려움에 직면하게 되면 이를 극복하려는 자세를 보이고 결국에는 문제의 성공을 이룬다. 연구 참여자 C는 해결과정에서 혼란에 빠졌어도 해결 할 수 있다는 강한 의지와 긍정적 신념 때문에 문제해결의 성공을 하였다. 이에 대한 문제해결 과정 <그림Ⅳ-8>과 면담 내용은 다음과 같다.



<그림Ⅳ-8> 긍정적 신념을 가지고 해결한 경우

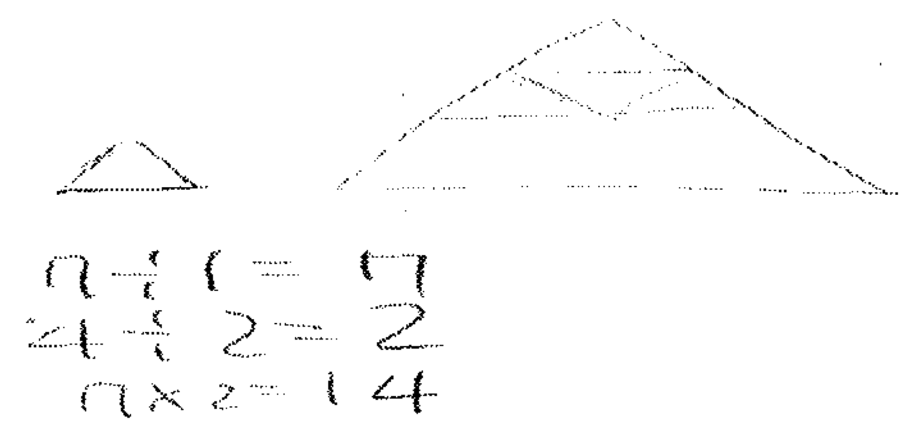
**CT-09006**: 잘 되지 않는구나. 포기하고 싶지 않니? 그만 할까?

**CS-09013**: 포기하고 싶은데요. 또 꼭 풀고 싶기도 해요.

**CS-09014**: (잠시 후에)오 구했다! 5, 6, 7, 8, 9요.

##### 나) 부정적 신념

연구 참여자들은 문제해결의 실패했던 경험이 자기 자신의 신념으로 고착화 되어 문제해결에 영향을 끼침을 알 수 있었다. 연구 참여자 C는 그림을 그리면 쉽게 해결할 수 있는 문제인데도 연구 참여자 자신이 그림을 그려 실패했던 경험 때문에 자신 없어 하였다. 그리고 그림을 그려도 문제에 적합한 그림보다는 자신이 이해한 그림을 그리는 경향을 보였다. 이에 대한 문제해결 과정 <그림Ⅳ-9>와 면담내용은 다음과 같다.



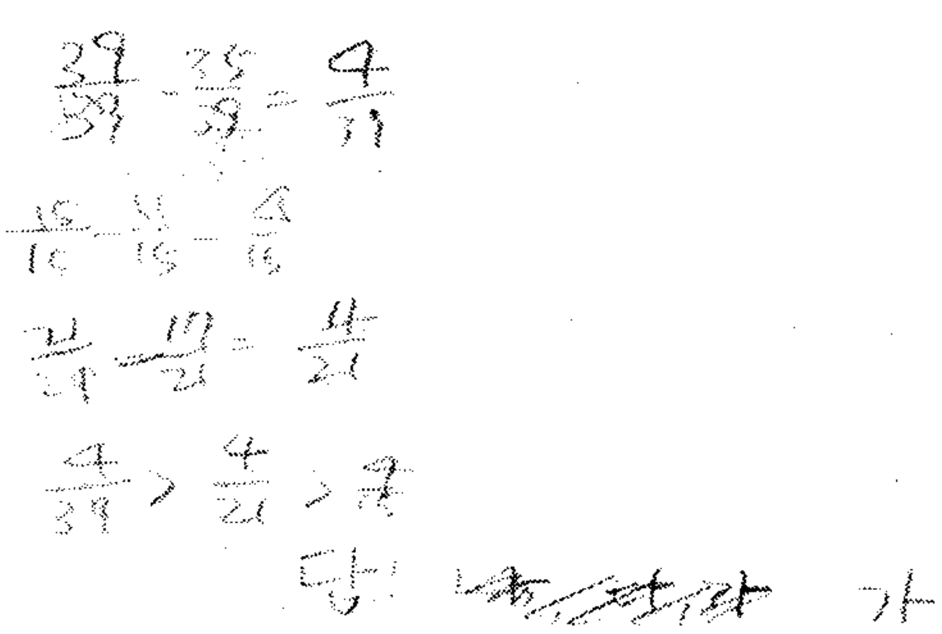
<그림Ⅳ-9> 부정적 신념을 가지고 해결한 경우

**CS-12001**: 그림 그려 봐야겠다. (삼각형 모양을 그린다.) 2곱하기 7은 14 아닌가?

CS-12002: (잠깐 망설이다가 그리면서) 내가 그려 보면 정확하지 않은데….
CS-12003: 아, 그려 봤는데 모르겠다.
CT-12001: 설명해 볼까?
CS-12004: 그려보면요. 그려 놓은 게… 예상해서 그리니까요. 2cm가 1cm와 똑같아 지니까요. 어떻게 놓아야 할지 모르겠어요.

2) 선호하는 수학적 태도

연구 참여자들이 소유하고 있는 선호하는 수학적 태도가 문제해결에 영향을 미치는 경향이 있었다. 연구 참여자 E는 통분을 싫어하는 태도 때문에 통분을 하여 문제를 해결하기 보다는 분모 분자의 차가 일정한 경우의 분수크기 비교하는 방법을 생각하여 문제해결의 성공을 하였다. 이에 대한 해결 과정 <그림Ⅳ-10>과 면담 내용은 다음과 같다.



<그림Ⅳ-10> 선호하는 수학적 태도가 영향을 준 경우

ES-07001: 휴… (한숨을 쉰다)이런 문제는 싫어요?
ET-07001: 왜? 문제가 길고, 어려워서 그러니?
ES-07002: 아니요. 저는 통분하는 것이 싫어요.
ET-07002: (세 분수의 분모 세 수를 3으로 나누어 본다. 나뉘어 진 수를 분모에 곱해 본다.)
ES-07003: 아! 할 필요가 없구나.
ES-07004: 가장 깊은 곳은 ㉯ 아니에요? ㉯ !
ET-07005: 처음에는 통분하려고 하지 않았니?
ES-07005: 예. 이런 문제는 통분밖에 생각이 안나요. 통분을 하려고 보니 숫자가 커지는 거에요. 그래서 짜증나는 거예요. 그래서 쉬운 방법이 없을까 생각해 하게 됐어요. 선생님이 말씀하신 것이 생각이 났어요. 저는 처음에 분모와 분자의 차가 1인 것만 되는 줄 알았어요. 그래서 통분을 했는데….

## V. 결론 및 제언

본 연구에서는 수학 문제해결 과정에서 나타나는 초등학생들의 수학적 사고를 수학적 지식, 발견 전략, 조정, 수학적 성향으로 나누어 분석하여 다음과 같은 결과를 얻을 수 있었다.

첫째, 초등학생들은 학습을 통하여 소유한 개념적 지식과 알고리즘의 절차적 지식, 그리고 직관과 같은 비형식적 지식을 문제해결 과정에서 사용하였으나, 이러한 지식들을 각각 개별적인 지식으로 활용하였다.

둘째, 초등학생들은 문제에 따라 더 쉽고 간단한 발견 전략이 있는지 생각하여 해결하기 보다는 자신의 경험과 좋아하는 전략만을 상기하여 문제를 해결하는 태도를 보였다.

셋째, 초등학생들은 수학 문제를 해결할 때에 문제에 알맞은 발견 전략을 선택하여 해결하기도 하나 자기의 계획과 의도대로 해결과정이 진행되지 않으면 전략을 수정해 보거나 해결과정을 점검하는 조정을 하며 문제를 해결하기도 하였다.

넷째, 초등학생들이 가지고 있는 수학적 성향인 긍정적·부정적 신념과 선호하는 태도가 문제해결 과정에 전반적으로 적지 않은 영향을 주어 문제해결 성패를 좌우하였다.

교수자인 교사가 학생들의 수학 문제해결 과정에서 나타나는 수학적 사고를 종합적으로 통찰하여 이해하게 된다면 앞으로 학생들의 문제해결력 신장에 적절한 도움을 줄 수 있을 것이라 생각한다. 학생들의 수학 문제해결과정에서 나타나는 수학적 사고의 분석 결과를 토대로 다음과 같이 수학과 교수·학습에 대하여 시사점을 제시하고자 한다.

첫째, 일반적으로 학교현장에서 교사들의 수업을 보면 수학적 개념, 절차, 문제해결을 개별적으로 생각하여 각각을 분리하여 지도하는 것을 볼 수 있다. 이는 연구의 결과에서도 알 수 있듯이 학생들로 하여금 관계적이고 통합적인 수학적 지식을 활용한 사고를 제한시키는 결과를 가져오고, 이미 배운 내용을 새로운 문제 상황에 적절하게 활용하는 것을 어렵게 하여 새로운 상황에서의 문제를 해결 하는데 실패하게 하는 요인으로 작용한다고 볼 수 있다. 교사는 학생들을 지도할 때 교수 내용의 연

관성 및 체계, 수업의 흐름, 영역간의 통합적인 분석을 하고, 그것을 토대로 하여 지도가 이루어 질 수 있도록 해야 할 것이다.

둘째, 교사들은 문제해결을 지도할 때 교과서에 제시되어 있는 방법과 과정만을 활용하여 지도를 하고 있는 것이 일반적인 현실이다. 그로 인해 경험하고 학습한 방법과 과정만으로 문제를 해결하는 연구의 결과와 같이 학생들은 수학을 기성의 완성품으로써 수동적으로 전달받아 익히고 있다. 이를 해결하기 위해서 교사는 다양한 발견 전략과 해결과정을 학생들에게 제시해 주거나 또는 학생들이 스스로 탐색, 발견하게 해 주어야 한다. 그리고 교사는 학생들이 자신들에게 익숙한 문제 해결 방법만을 활용하는 경향이 있으므로 다양한 전략을 사용해 보도록 격려할 필요가 있고, 문제에 따라서 다른 전략을 사용할 필요성을 느낄 수 있도록 해야 한다.

셋째, 성취도 수준이 비슷한 학생들 사이에서도 그들이 보이는 문제해결의 과정은 다양하다. 학생들은 자신이 선택한 전략이 문제를 해결하는데 도움이 되지 않음에도 집착하는 경향이 있기도 하지만 자신의 전략을 수정하거나 해결과정을 점검하여 다른 방법을 사용하는 조정의 과정을 거치기도 했다. 교사는 여러 가지 다양한 문제 상황에서 문제해결 과정을 검토하는 반성 이 이루어지도록 해야 한다. 전략 선택의 경우에 문제해결을 위한 여러 가지 다양한 전략이 사용 가능함을 학생들이 깨닫도록 해야 하고 그 전략들 중에서 개인적이기는 하지만 가장 선호하거나 효율적인 전략을 선택해 보도록 하는 경험을 제공할 필요도 있다.

마지막으로, 수학적 성향인 긍정적 또는 부정적 신념과 태도가 문제해결 과정에 전반적으로 영향을 주게 되므로 문제해결을 자연스럽고 친근한 상황 속에서 접근하도록 해야 한다. 수학에 대한 부정적인 태도는 문제해결뿐만 아니라 장기적으로 학생들이 수학을 영원히 멀리하는 결과를 초래할 수 있으므로 교사가 각 학생들의 특성 및 수준을 이해하여 그들의 다양성을 찾아서 격려해 주고 학생들이 수학에 대한 새로운 시각과 즐거움을 느낄 수 있도록 할 필요가 있다. 이를 위해 교사들 자신부터 수학 문제해결에 흥미를 가지고 해결해 볼 필요가 있고, 문제 해결을 위한 학생들의 시도에 보다 적극적으로 참여하여 관찰하고, 학생들의 반응과 풀이 전략에 흥미를 가지고 '그들의 수학'을 이해하려는 노력이 선행되어야 할 것이다.

교사는 학생들의 문제해결 과정에서 나타나는 수학적 사고의 심층적인 관찰을 통하여 학생 한 사람 한사람의 인격과 재능 그리고 소질과 성향을 인정해 주고 그들이 보다 자발적인 학습자로 그리고 창의적인 문제해결자로 성장해 가도록 도울 수 있어야 할 것이다.

## 참 고 문 헌


교육인적자원부 (2005). 초등학교 교사용 지도서 수학 - 나, 서울: 대한교과서 주식회사.

김상룡 (2000). 수학적 사고력 신장을 인한 확률·통계 영역의 교수·학습 자료 개발에 관한 연구, 과학·수학 교육연구 23, pp.123-154.

박만구 (2002). 수학 문제해결의 심층적 관찰을 통한 교수 방법의 개선, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> 14, pp.217-219.

우광식 (1995). 문제해결을 통한 개념과 절차 지도, 청람수학교육 3, pp.87-102.

우정호 (2001a). 수학학습-지도 원리와 방법, 서울: 서울대학교 출판부.

우정호 (2001b). 학교수학의 교육적 기초, 서울: 서울대학교 출판부.

이용숙·김영천(편) (1998). 교육에서의 질적 연구 -방법과 적용-, 서울: 교육과학사.

이지영 (2007). 아동의 수학 문제해결 과정 사례 분석, 경인교육대학교 석사학위논문.

한국교육개발원 (1989). 수학과 문제해결력 신장을 위한 학습 자료 개발 연구 연구보고 RR89-11, 서울: 한국교육개발원.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (2007). *Qualitative research for education: An introduction to theories and methods,* Pearson Education, MA: Allyn & Bacon.

Krulik, S. & Rudnick, J. A. (1987). *Problem solving : A handbook for teachers,* New York: Allyn & Bacon.

NCTM. (1989). *Curriculum and evaluation for school*

mathematics, Reston, VA: Author.
NCTM. (2000). *Principles and Standards for school mathematics*, Reston, VA: Author.
Polya, G. (2004). *How to solve it? : A new aspect of mathematical method*, New York: Doubleday & Company.
Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*, New York: Academic Press.
Wickelgren, W. A. (1995). *How to solve mathematical problems*, New York: Dover Publication.

# An Analysis on the Elementary Students' Mathematical Thinking in the Mathematical Problem Solving Processes

**Cho, Dookyoung**
Seoul Kangnam Elementary School, 501 Sangdol-dong, Dongjak-gu, Seoul, Korea, 156-830
E-mail: heesoogo@hanmail.net

**Park, Mangoo**
Department of Mathematics Education, Seoul National University of Education,
1650 Seocho-dong, Seocho-gu, Seoul, Korea, 137-742
E-mail: mpark29@snue.ac.kr

The purpose of this study was to analyze the elementary students' mathematical thinking, which is found during mathematical problem solving processes based on mathematical knowledge, heuristics, control, and mathematical disposition. The participants were 8 fifth grade elementary students in Seoul. A qualitative case study was used for investigating the students' mathematical thinking. The data were coded according to the four components of the students' mathematical thinking. The results of the analyses concerning mathematical thinking of the elementary students were as follows: First, in terms of mathematical knowledge, the elementary students frequently used conceptual knowledge, procedural knowledge and informal knowledge during problem solving processes. Second, students tended not to find new heuristics or apply new one, but they only used the heuristics acquired from the experiences of the class and prior experiences. Third, control was found while students were solving problems. Last, mathematical disposition influenced on the mathematical problem solving processes. Teachers need to in-depth observations on the problem solving processes of students, which leads to teachers' effective assistance on facilitating students' problem solving skills.

* ZDM Classification : D53
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50
* Key Words : mathematical thinking, problem solving

## (부록 1) 서술형 지필검사 문항

### 1. 검사문항 1

길이가 $\frac{4}{5}$m인 색 테이프가 4개 있습니다. 이 색 테이프를 겹쳐진 부분이 모두 같게 이어서 전체 길이가 $2\frac{3}{5}$m가 되게 하려고 합니다. 겹쳐진 한 부분을 몇 m로 하면 됩니까?

### 2) 검사문항 2

다음 주어진 네 자리 수가 12의 배수가 되도록 □안에 알맞은 숫자를 모두 구하시오.

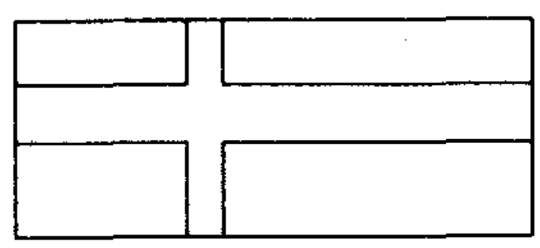
8 3 □ 4

### 3) 검사문항 3

직사각형 모양의 도화지를 완전히 겹쳐지게 계속 8번 접었을 때, 도화지는 모두 몇 등분이 됩니까?

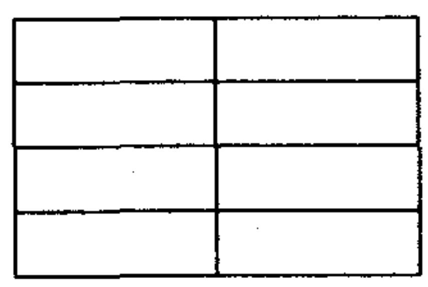
### 4) 검사문항 4

가로의 길이가 9m, 세로의 길이가 6m인 직사각형 모양의 꽃밭이 있습니다. 이 꽃밭에 폭이 1m인 길을 내려고 합니다. 길을 낸 후 꽃밭의 넓이는 몇 $m^2$입니까?



### 5) 검사문항 5

정사각형을 그림처럼 모양과 크기가 같게 8등분하였습니다. 오른쪽 그림에서 그릴 수 있는 서로 다른 모양의 직사각형은 모두 몇 개입니까?



### 6) 검사문항 6

다리가 4개인 책상과 다리가 3개인 의자가 모두 28개 있습니다. 책상과 의자의 다리의 합은 101개입니다. 책상과 의자는 각각 몇 개입니까?

7) 검사문항 7

학교에 있는 생태연못의 깊이를 길이가 1 m 인 막대를 이용하여 측정하였습니다. ㉮지점은 막대의 $\frac{11}{15}$ 이, ㉯지점은 막대의 $\frac{35}{39}$가, ㉰지점은 막대의 $\frac{17}{21}$이 물에 젖었습니다. 연못의 깊이가 가장 깊은 곳은 어느 지점입니까?

8) 검사문항 8

담덕이는 처음에 가지고 있던 돈의 반으로 책을 샀습니다. 남은 돈의 $\frac{1}{3}$을 동생에게 주고, 삼촌에에게 3000 원을 받았습니다. 가진 돈의 반 보다 500 원을 더 썼더니 2000 원이 남았습니다. 담덕이가 처음에 가지고 있던 돈은 얼마입니까?

9) 검사문항 9

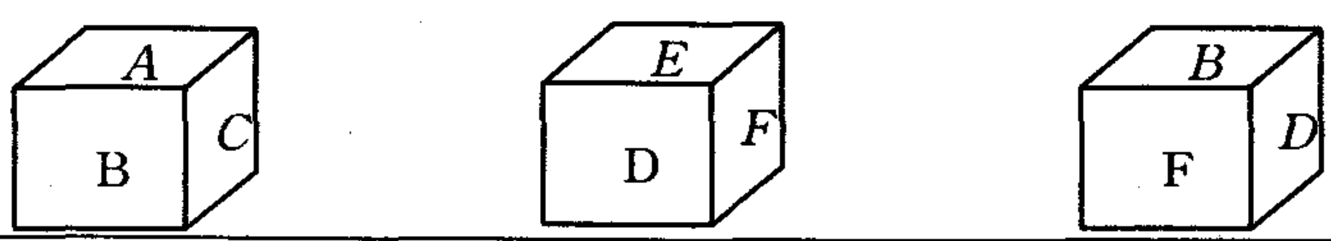
7 , 8 , 12 등은 다음과 같이 연속하는 수의 합으로 나타낼 수 있습니다.

$7 = 3 + 4 \qquad 10 = 1 + 2 + 3 + 4 \qquad 12 = 3 + 4 + 5$

3 0 을 연속하는 수의 합으로 나타내는 방법을 세 가지 써 보시오.

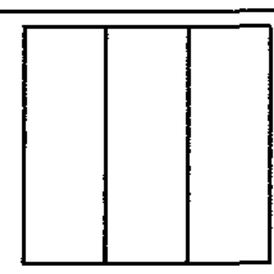
10) 검사문항 10

다음은 정육면체의 각 면에 A, B, C, D, E, F 를 적은 다음, 세 방향에서 본 그림입니다. B를 적은 면과 평행인 면의 알파벳은 무엇입니까?




11) 검사문항 11

오른쪽 그림과 같이 정사각형을 크기가 똑같은 직사각형 3 개로 나누었을 때, 작은 직사각형의 둘레의 길이가 32 cm 이었습니다. 처음 정사각형의 넓이를 구하시오.



12) 검사문항 12

밑변의 길이가 2 cm, 높이가 1 cm 인 직각삼각형 모양으로 여러 장 오려 가로의 길이가 7 cm, 세로의 길이가 4 cm 인 직사각형을 덮으려고 합니다. 직각삼각형은 모두 몇 장 필요합니까?