한국수학사학회지 제21권 제2호(2008년 5월), 119 - 134

# '자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 정다각형의 작도 방법 연구

경상대학교 한인기
inkiski@gsnu.ac.kr

본 연구에서는 1709년 러시아에서 출판되었고, 다양한 작도문제의 해결방법이 기술된 '자와 컴퍼스의 방법'을 분석하였다. 이 책에 제시된 정삼각형, 정사각형, 정오각형, 정육각형, 정8각형, 정10각형의 작도방법을 소개하고, 이에 관련된 다양한 논의를 시도하였다. 이를 통해 정다각형 작도에 관련된 역사-발생적 연구를 위한 새로운 자료를 제공할 것으로 기대된다.

주제어 : 정사각형, 정오각형, 정8각형, 정10각형, 정다각형, 작도

## 0. 서론

작도문제는 수학의 태동기로부터 현대에 이르기까지 많은 연구자들이 진지한 연구를 수행했으며, 작도문제의 해결 과정에서 다양한 수학적 도구들, 방법들이 개발되고 활용되었다. 예를 들어, Euclid의 원론에는 작도문제들이 폭넓게 다루어졌으며, 3대 작도 불능 문제의 탐구는 원추곡선, 원적곡선(Quadratrix), Archimedes 나선 등의 활용에 관련되며, 이들 개념의 발달에 중요한 역할을 하였다.

많은 연구자들이 작도문제에 대한 다양한 수학사적, 교수학적 연구들을 수행하는 것은, 수학사 발전에서 작도문제의 위상을 생각하면 당연하고도 바람직하다고 할 수 있을 것이다. [6], [13]에서는 작도문제의 해결 단계 및 각 단계의 본질에 대한 체계적인 논의가 제시되어 있고, [2], [5], [8], [14], [15]에서는 다양한 작도문제의 구체적인 해결 방법(자와 컴퍼스를 이용한 작도문제의 해결, 컴퍼스만을 이용한 작도문제 해결, 자만을 이용한 작도문제 해결)이 제시되었으며, [3], [4], [7]에서는 수학 교수-학습에서 작도문제의 활용에 대한 교수학적 고찰이 수행되었다.

기술한 연구들로부터, 작도문제의 해결 방법, 다양한 작도문제에 대한 탐구 및 활용 방안에 대한 연구들은 폭넓게 진행되었지만, 작도문제의 해결에 관련된 역사적 자료들의 수집 및 분석에 관련된 연구들은 매우 빈약하게 이루어졌음을 알 수 있다. 특히,

이러한 역사적 자료들은 작도문제에 관련된 연구의 내용과 수준을 향상시킬 수 있는 중요한 기초자료가 될 수 있으므로, 다양한 유형의 자료 수집과 연구가 필요할 것이다.

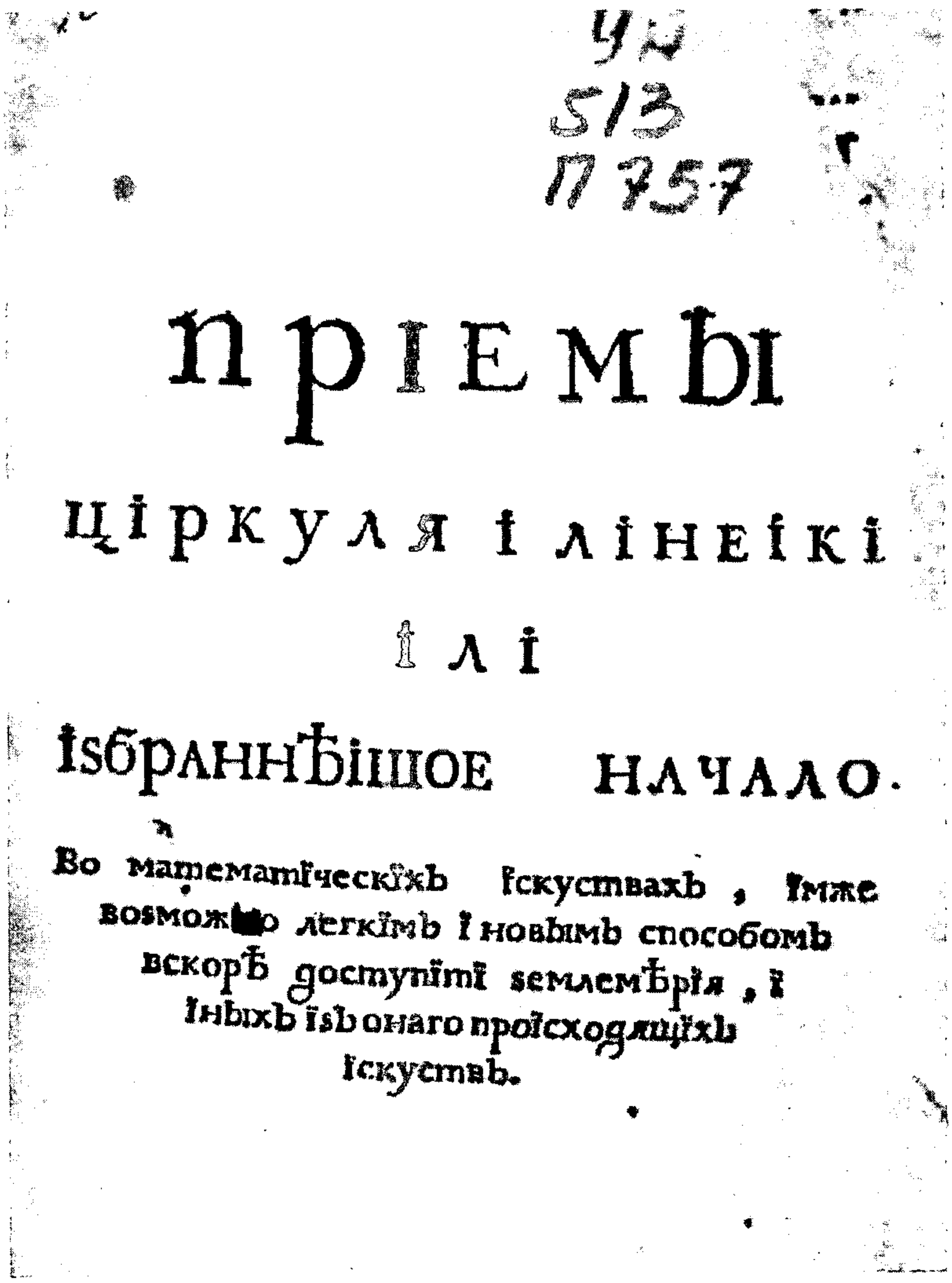
본 연구에서는 1709년 러시아에서 출판되었고, 다양한 작도문제의 해결방법이 기술된 책 ‘자와 컴퍼스의 방법’을 탐구할 것이다. ‘자와 컴퍼스의 방법’에는 여러 가지 다각형들, 내접도형들, 외접도형들, 입체도형들의 작도방법이 기술되어 있지만, 본 연구에서는 정삼각형, 정사각형, 정오각형, 정육각형, 정8각형, 정10각형의 작도방법을 분석하고, 작도방법의 타당성을 증명하며, 이에 관련된 다양한 측면들을 고찰할 것이다. 이를 통해 1709년의 수학 저술에 제시된 정다각형의 작도 방법을 소개하며, 정다각형 작도에 관련된 역사-발생적 연구를 위한 새로운 자료를 제공할 것으로 기대된다.

## 1. 자와 컴퍼스의 방법

‘자와 컴퍼스의 방법’은 러시아 황제의 명령에 의해 1709년 2월에 모스크바에서 출판되었으며, 저자는 미상이다. 현재 모스크바에 위치한 러시아교육학술원의 국립교육학도서관에 소장되어 있다.

‘자와 컴퍼스의 방법’은 375쪽으로 이루어졌으며, 기하학의 개관, 작도문제의 해결을 위한 바탕 지식들, 작도문제의 해결 방법, 작도문제의 활용 등의 내용을 포함하고 있다. ‘자와 컴퍼스의 방법’에 기술된 주제들을 나열하면, 다음과 같다.

- 기하학에 대해
- 사용된 단어들, 도형들의 명칭에 대한 설명
- 일반적으로 안다고 여겨지는 사실들
- 작도에 관련된 가정들
- 제 1권: 선들의 작도
- 제 2권: 평면도형들의 작도
- 제 3권: 내접도형들의 작도
- 제 4권: 외접도형들의 작도
- 제 5권: 비례하는 선들의 작도
- 제 6권: 입체들의 작도
- 평면도형들의 변형에 대해
- 수평인 곳에서 해시계를 어떻게 만드나?
- 수직인 벽 또는 모서리에 해시계를 어떻게 만드는가?


приемы

циркуля і лінеікі

іли

ізбраннѣйшое начало.

Во математіческіхъ іскуствахъ, імже возможно легкімъ і новымъ способомъ вскорѣ достуліті землемѣрія, і іныхъ із онаго происходящіхъ іскуствъ.

<그림 1> '자와 컴퍼스의 방법'의 속표지

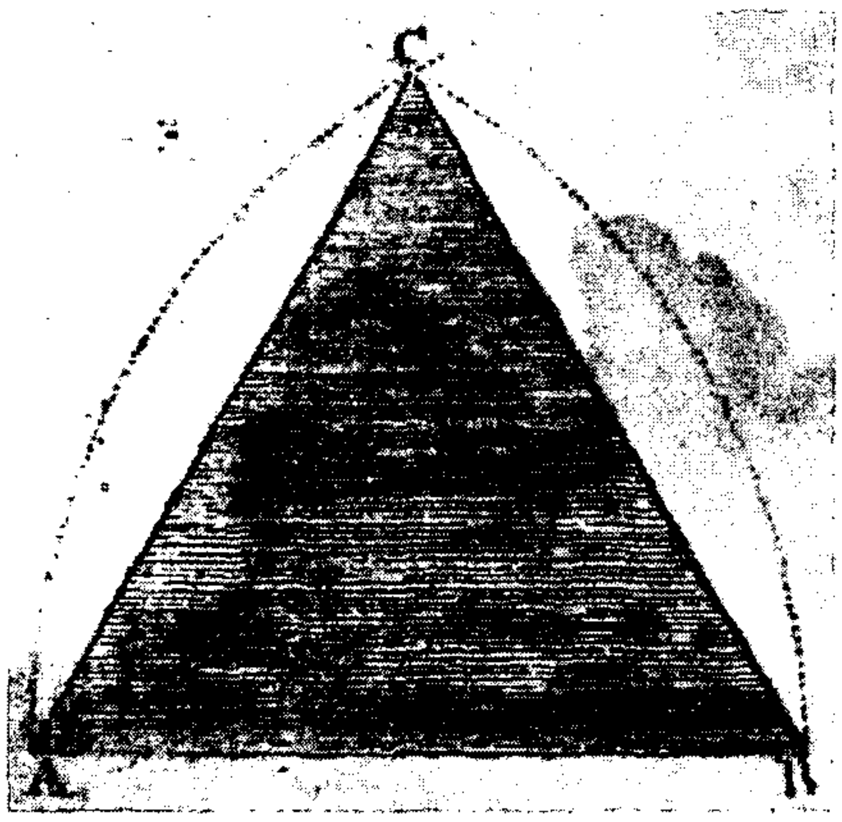
일반적으로, 작도문제는 분석-작도-증명-탐구의 순서로 해결되지만, '자와 컴퍼스의 방법'에는 작도순서와 상응하는 도형의 그림만 제시되어 있을 뿐, 작도문제의 해결을 위한 분석과정, 얻어진 작도방법의 타당성 증명은 기술되어 있지 않다.

## 2. 정사각형과 정오각형의 작도

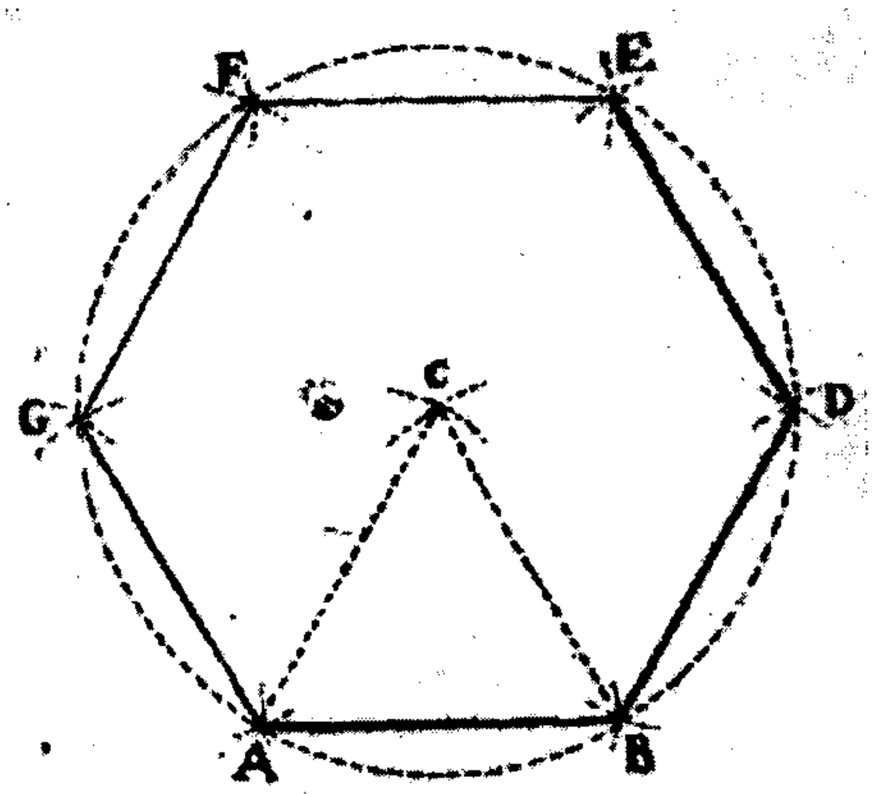
'자와 컴퍼스의 방법'에는 정삼각형, 정사각형, 정오각형, 정육각형, 정8각형, 정10각형을 자와 컴퍼스를 이용하여 작도하는 방법이 정확하게 제시되어 있다. 본 연구에서

는 '자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 정다각형 작도 방법을 체계적으로 정리하고, 그 타당성을 증명할 것이다.

'자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 정삼각형, 정육각형의 작도 방법은 <그림 2>, <그림 3>과 같으며, 이미 널리 알려진 작도 방법이므로, 작도 순서 및 그 타당성의 증명은 생략할 것이다.



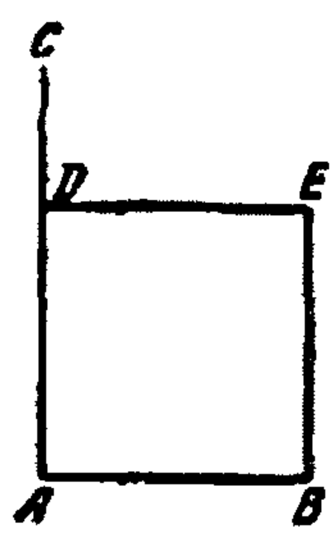

<그림 2> '자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 정삼각형의 작도 방법




<그림 3> '자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 정육각형의 작도 방법

### (1) 정사각형의 작도

주어진 선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형을 작도하는 방법은 오래 전부터 알려져 왔다. 특히, Euclid의 원론([12]) 제 1권 46번 명제가 주어진 직선에 정사각형을 작도하는 문제인데, Euclid의 원론에서는 수선과 평행선의 작도를 이용하여 정사각형을 작도하고 있다. Euclid의 작도 방법을 살펴보자(pp.57-58).




<그림 4>

주어진 직선을 AB라 하고, 직선 AB에 정사각형을 작도하자(그림 4). 점 A로부터 직선 AB에 직각을 이루도록 직선 AC를 긋고, AB와 같도록 AD를 표시한다. 그리고 점 D를 지나 AB와 평행하도록 DE를 긋고, 점 B를 지나 AD와 평행하도록 BE를 긋

는다. 이로부터 ADEB는 평행사변형이고, AB는 DE와 같고, AD는 BE와 같다. 그런데 AB는 AD와 같으므로, 네 직선 BA, AD, DE, EB는 서로 같게 되며, 평행사변형 ADEB는 등변평행사변형이다.

이제 평행사변형 ADEB가 직각평행사변형임을 보이자. 평행인 직선 AB, DE에 직선 AD를 그었으므로, 각 BAD와 ADE는 함께 2직각을 이룬다. 각 BAD는 직각이고, ADE도 직각이다. 평행인 직선들에 의해 만들어진 영역의 대변, 대각은 서로 같으므로, 대각들 ABE, BED 각각은 직각이며, ADEB는 직각평행사변형이다. □

기술한 Euclid의 작도방법에서는 ① 선분 AB에 대한 수선 AD, ② AB에 평행한 DE, ③ AD에 평행한 BE를 이용하여 정사각형 ADEB를 작도하였다. 이 방법은 정사각형의 정의를 생각하면 쉽게 떠올릴 수 있는 방법으로, Clairaut([11])도 Euclid와 유사하게, 선분 AB의 끝점 A, B로부터 AB에 수선을 긋는 방법을 이용하여 정사각형을 작도하였다.

'자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 정사각형의 작도에서는 Euclid나 Clairaut의 방법과 다른 작도 방법을 보여주고 있다. 이를 자세히 살펴보자(pp.106-107).

주어진 직선 AB에 정사각형을 작도하자. 선 AB의 길이를 이용하여 두 점 A, B로부터 호를 그려, 이들 호의 교점을 D라 하자. 컴퍼스를 그대로 이동시켜, 같은 길이만큼을 점 D로부터 왼쪽의 호에 표시하여 점 C라 하자. 두 점 C, D로부터 같은 거리만큼을 이용하여 점 E에서 교차하는 같은 두 호를 그린다. 점 A로부터 표시된 점 E에 직선을 긋고, 이 직선과 호 CB의 교점을 F라 하자. 그리고 나서 길이 DF만큼을 잡아 다른 호에 점 G를 표시한다(그림 5). 모든 네 점 A, F, G, B를 직선으로 연결하면, 정사각형이 얻어진다. □

'자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 정사각형의 작도 순서를 정리하면, 다음과 같다.

① 점 A, B를 중심, 선분 AB를 반지름으로 하는 원을 그려 그 교점을 D라 한다.

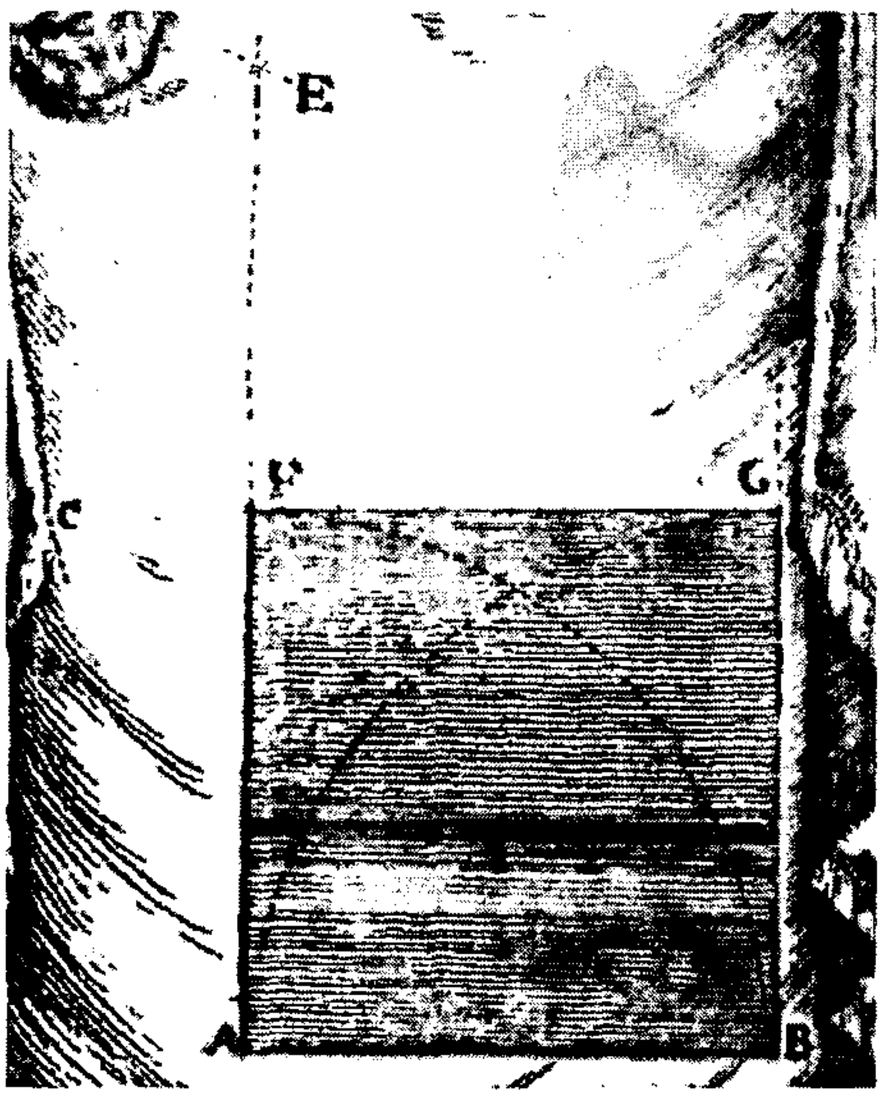
② 점 D를 중심으로 반지름이 선분 AB인 원을 그려, 중심이 A인 원과의 교점을 C라 한다.

③ 점 C, D를 중심, 선분 AB가 반지름인 원을 그려, 그 교점을 E라 한다.

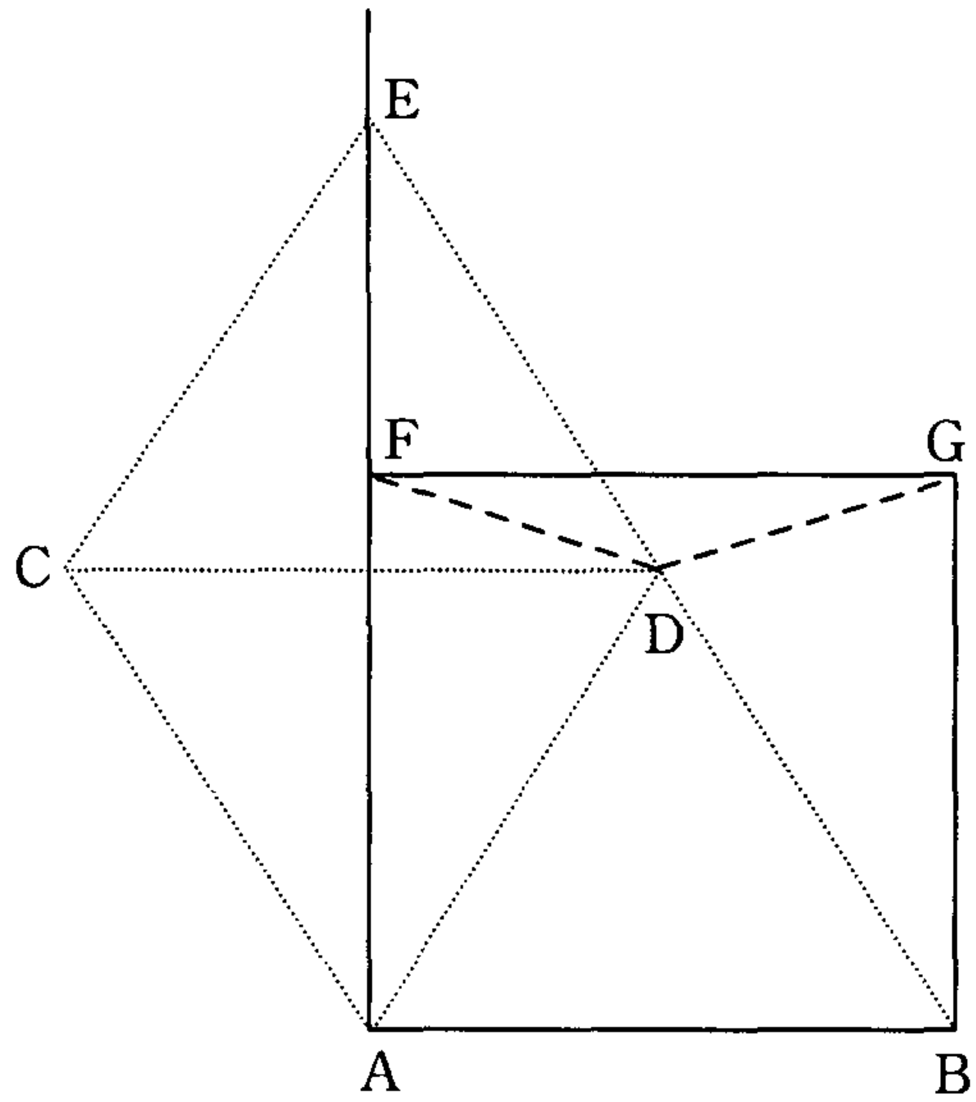
④ 직선 AE와 중심이 A인 원의 교점을 F라 한다.

⑤ 점 D를 중심, 선분 DF가 반지름인 원을 그려, 중심이 B인 원과의 교점을 G라 한다.

⑥ 네 점 A, B, F, G를 연결하면, 정사각형 ABFG를 얻는다.




<그림 5> '자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 정사각형의 작도 방법




<그림 6> 정사각형 작도의 타당성 증명

이제 기술한 작도 방법의 타당성을 증명하자. 이를 위해 <그림 5>에서 점 A, B, C, D, E, G를 선분으로 연결하여 <그림 6>을 생각하자. 사각형 AFGB가 정사각형임을 보이기 위해, 각 A, F, G, B가 직각이며 변 AF, FG, GB, AB가 서로 같다는 것을 증명하자. <그림 5>의 작도 방법에 의해, 선분 AF, AB, BG는 서로 같다. 한편, <그림 6>에서 삼각형 DAB는 정삼각형이므로 변 DA, DB는 같다. 그리고 작도에 의해 선분 DF, DG가 서로 같다. 이로부터 삼각형 DAF, DBG는 합동이 되며, 각 DAF와 DBG는 서로 같다.

삼각형 ADC, ECD가 정삼각형이므로 사각형 ACED는 평행사변형이고, 대각선 CD는 AE에 의해 이등분된다. 결국 선분 AE는 삼각형 ECD, ACD의 중선이며 각 CAD, CED의 이등분선이 된다. 이로부터 각 DAF는 30°가 되며, DBG도 30°가 된다. 이제 삼각형 DAE가 정삼각형임을 감안하면, 각 FAB, GBA가 직각임을 알 수 있다.

결국 사각형 AFGB에서 AF와 BG는 서로 같고 평행하므로, 사각형 AFGB는 평행사변형이 되며, AB와 FG는 서로 같고, 각 FAB와 BGF, 각 ABG와 AFG는 모두 직각이 된다. 이로부터 사각형 AFGB는 정사각형이라는 것이 증명된다. □

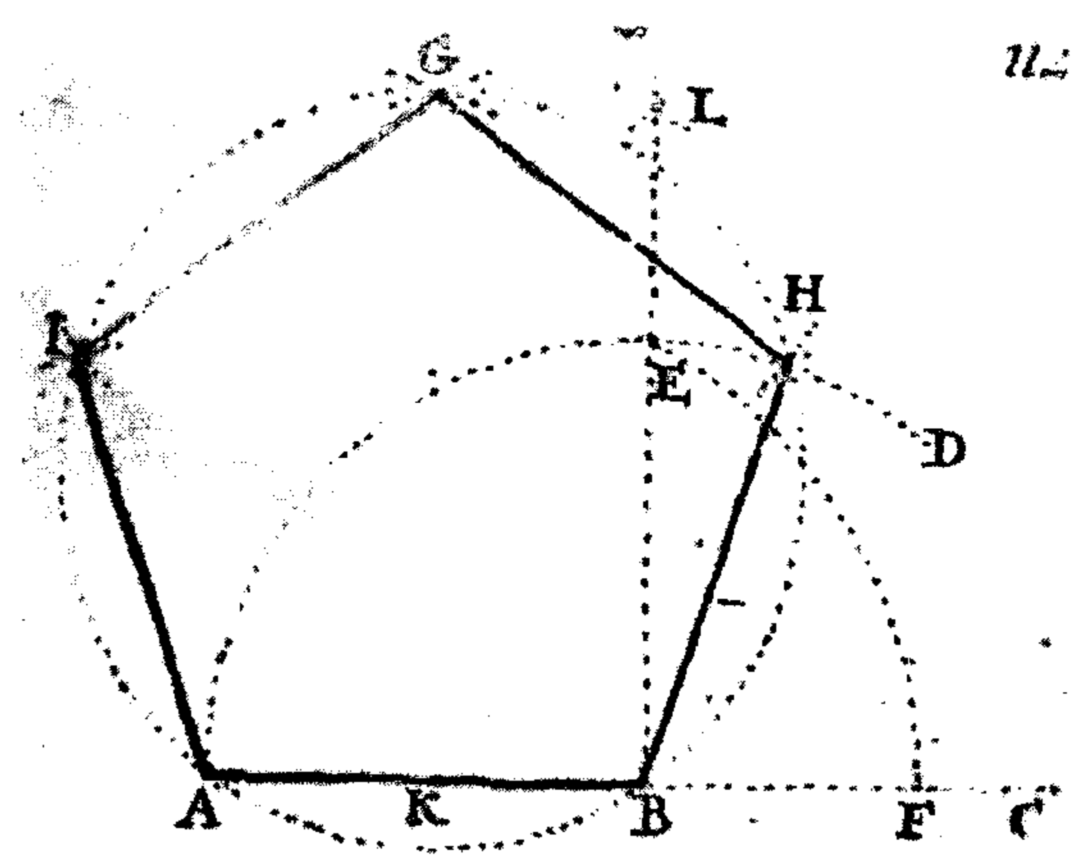
'자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 정사각형의 작도는 정삼각형의 작도에 근거하며, 이 방법에서는 Euclid나 Clairaut의 방법과는 달리 선분 AB에 대한 수선을 오직 하나 AE만을 그었다. 즉, '자와 컴퍼스의 방법'에서는 꼭지점 G를 AB에 대한 수선이나 AF와 평행인 직선의 작도를 통해서 찾은 것이 아니라, 점 G가 중심이 B이고 반지름이 BA인 원과 중심이 D이고 반지름이 DF인 원의 교점이 된다는 것을 이용하여 찾았다.

이 방법은 정사각형의 작도 과정에서 수선 또는 평행선의 작도 횟수를 줄이는 흥미로운 방법이라 할 수 있다.

### (2) 정오각형의 작도

정오각형의 작도는 한 변이 주어진 정오각형 작도, 주어진 원에 내접 또는 외접하는 정오각형 작도로 나누어 생각할 수 있다. Euclid의 원론([12]) 제 4권 11번 명제, 12번 명제에는 주어진 원에 내접하는 정오각형, 외접하는 정오각형의 작도 방법이 기술되어 있다. '자와 컴퍼스의 방법'에는 한 변이 주어진 정오각형의 작도 방법이 제시되어 있으며, 이를 살펴보자(pp.112~113).

주어진 직선 AB에 정오각형을 작도하자. 선 AB를 연장하여, 선 AB와 같은 BC를 만들자. 두 점 A, C로부터 점 L에서 교차하는 같은 두 호를 그린다. 점 B로부터 표시된 점 L을 지나는 수선 BL을 그린다. 점 B로부터 선 BA의 길이만큼을 이용하여 호 AD를 그려, 선 BL과의 교점을 E라 하자. 선 AB를 점 K에서 두 부분으로 나눈다. 컴퍼스로 길이 KE를 잡아, 점 K로부터 호 EF를 그린다. 길이 FA를 잡아 두 점 A, B로부터 같은 두 호를 작도하여 교점을 G라 하면, 이것이 오각형의 한 꼭지점이 된다. 이제 길이 AB를 잡아 점 A, G로부터 같은 두 호를 만들어, 그 교점을 I라 하자(그림 7). 같은 길이로 점 B, G로부터 두 호를 그려 교점을 H라 하자. 표시된 점들을 직선으로 연결하면 오각형 ABHGI가 얻어진다. □




<그림 7> '자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 정오각형의 작도 방법

기술한 정오각형의 작도 방법을 정리하면 다음과 같다.

① 선분 AB를 연장하여, AB와 같은 선분 BC를 표시한다.

② 점 B로부터 AC에 수선 BL을 작도한다.

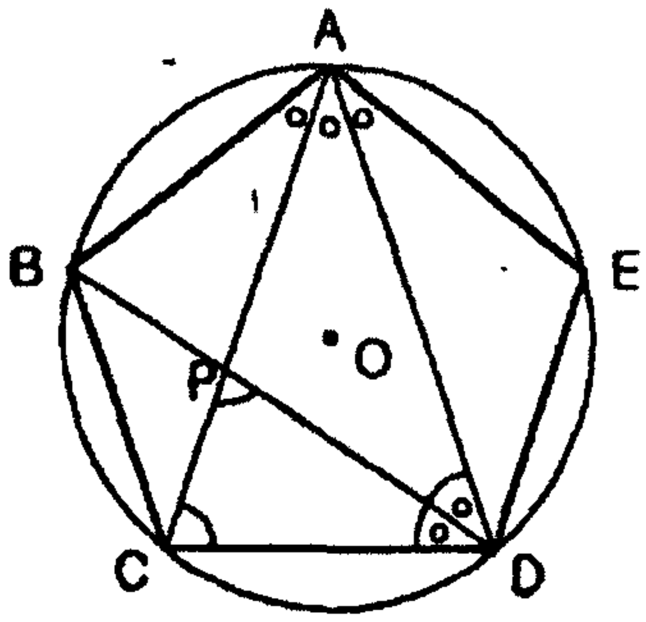
③ 중심이 B이고 반지름이 BA인 원과 BL의 교점을 E라 한다.
④ AB의 중점 K가 중심이고 반지름이 KE인 원과 AC의 교점을 F라 한다.
⑤ 중심이 A, B이고 반지름이 AF인 두 원의 한 교점을 G라 한다.
⑥ 중심이 A, G이고 반지름이 AB인 두 원의 한 교점을 I라 한다.
⑦ 중심이 B, G이고 반지름이 AB인 두 원의 한 교점을 H라 한다.
⑧ 네 점 A, I, G, H, B를 연결하면, 정오각형 AIGHB를 얻는다.

기술한 작도 방법의 타당성을 증명하자. 작도방법에 의해, <그림 7>에서 얻어진 오각형 AIGHB는 등변오각형이 된다. 이제 오각형 AIGHB는 등각오각형, 즉 원에 내접한다는 것을 보이자. 우선 선분 AB의 길이를 a라 놓고, 선분 AG의 길이를 구하자. 점 G는 중심이 A, B이고 반지름이 AF인 원의 교점이므로, 선분 AG와 AF는 서로 같다. 한편 선분 AF는 AK와 KF의 합과 같으며, KF는 KE와 같다. 직각삼각형 EKB에서 $KE^2=KB^2+BE^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2=\left(\frac{5a}{4}\right)^2$임을 알 수 있다. 이로부터 AG의 길이를 계산하면 $\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}a=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)a$을 얻게 된다.

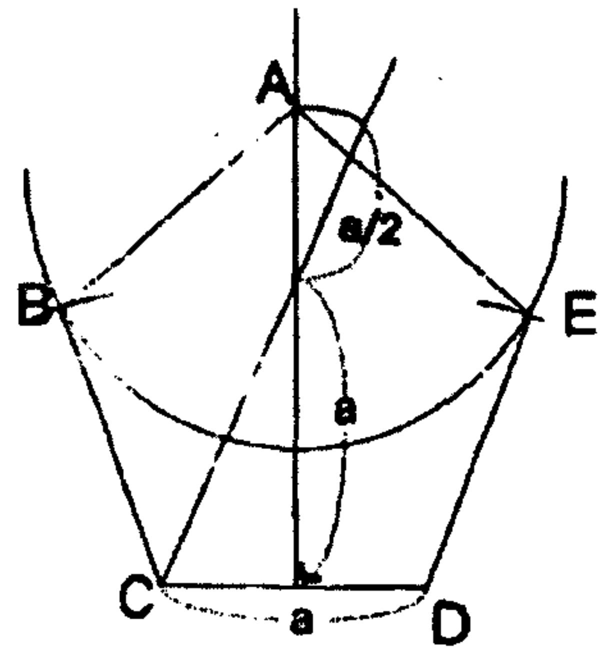
이제 이등변삼각형 GAB를 생각하자. 수선 GK를 내리면, 직각삼각형 GAK를 얻을 수 있고, 각 AGK의 사인값을 계산하면, $\frac{AK}{GA}=\frac{1}{1+\sqrt{5}}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$를 얻을 수 있다. 그런데 $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$은 sin 18°의 값이므로, 각 AGB는 36°가 됨을 알 수 있다. 이제 선분 BI를 그어 AG와의 교점을 M이라 하면, 삼각형 GAB와 BAM은 닮음이 된다. 이로부터 각 MBA는 36°임을 알 수 있고, 삼각형 AIB가 이등변삼각형임을 감안하면 각 AIB도 36°가 된다. 같은 방법으로 각 AHB가 36°임을 알 수 있고, 이로부터 점 A, I, G, H, B는 한 원에 속하며, 오각형 AIGHB는 등각오각형임을 알 수 있다. □

'자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 정오각형의 작도에서는 수직이등분선, 원의 작도가 이용되었다. 본 연구에서는 이 방법의 타당성을 대각선의 길이를 이용하여 얻어진 오각형이 등각오각형이 된다는 것을 이용하여 증명하였다.

정오각형을 대각선의 길이를 직접 이용하여 작도하는 방법으로, 김주봉([1])의 연구를 들 수 있다. 여기서는 한 변의 길이가 a인 정오각형의 대각선의 길이를 구한 다음, 자와 컴퍼스를 이용하여 대각선을 작도하고, 이로부터 정오각형을 작도하였다. 즉 정오각형 ABCDE에서 선분 PC의 길이를 x라 하면(그림 8), 이차방정식 $x^2+ax-a^2=0$이 성립하며, 선분 AC의 길이는 $x+a=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}$이 된다. 그리고 피타고라스 정리를 이용하여 선분 AC를 작도하여, <그림 9>와 같은 정오각형 ABCDE 작도를 얻었다.




<그림 8>




<그림 9>

<그림 9>에 제시된 정오각형 ABCDE의 작도순서를 분석하면, 다음과 같다.

① 길이가 a인 선분 CD의 수직이등분선을 긋는다.

② 선분 CD의 수직이등분선에 CD의 중점으로부터 a만큼 떨어진 점 M을 표시한다.

③ 점 C와 M의 연장선에 길이가 $\frac{a}{2}$인 선분 MN을 표시한다.

④ 중심이 C이고 반지름이 CN인 원을 그려, 선분 CD의 수직이등분선과의 교점을 A라 한다.

⑤ 중심이 A, C이고 반지름이 a인 원을 그려, 그 교점을 B라 한다.

⑥ 중심이 A, D이고 반지름이 a인 원을 그려, 그 교점을 E라 한다.

⑦ A, B, C, D, E를 연결하면, 정오각형 ABCDE를 얻는다.

'자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 정오각형의 작도에서는 대각선을 직접적으로 이용하지 않았지만, [1]에서는 대각선과 길이가 같은 선분 CN을 먼저 작도한 다음, 중심이 C이고 반지름이 CN인 원과 선분 CD의 수직이등분선의 교점으로 꼭지점 A를 찾았다. [1]의 작도방법은 대수적인 계산을 통해 얻어진 작도방법이라 할 수 있다.

## 3. 정8각형과 정10각형의 작도

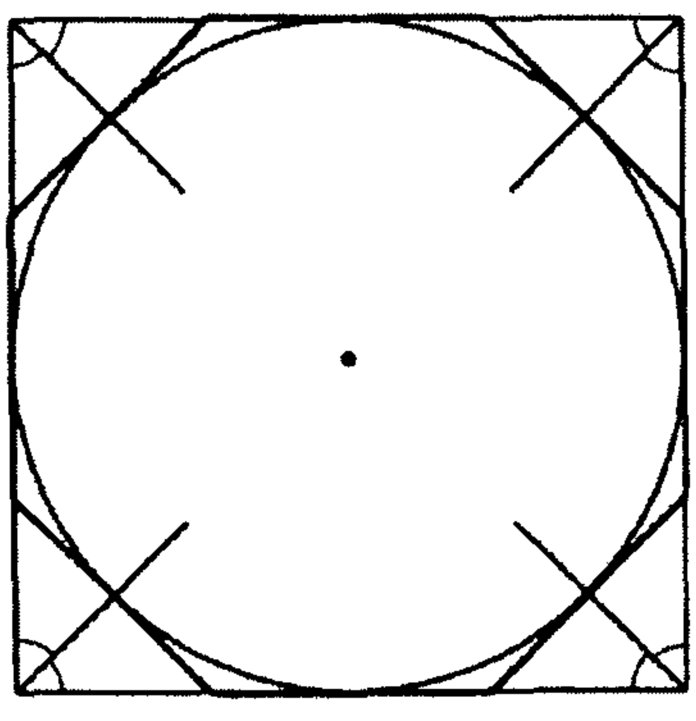
정8각형과 정10각형은 중등학교 수학교육에서는 거의 취급되지 않으며, 그 작도 방법도 널리 알려져 있지는 않다. '자와 컴퍼스의 방법'을 중심으로, 한 변이 주어진 정8각형과 정10각형의 작도방법을 살펴보고, 작도의 타당성을 증명해 보자.

### (1) 정8각형의 작도

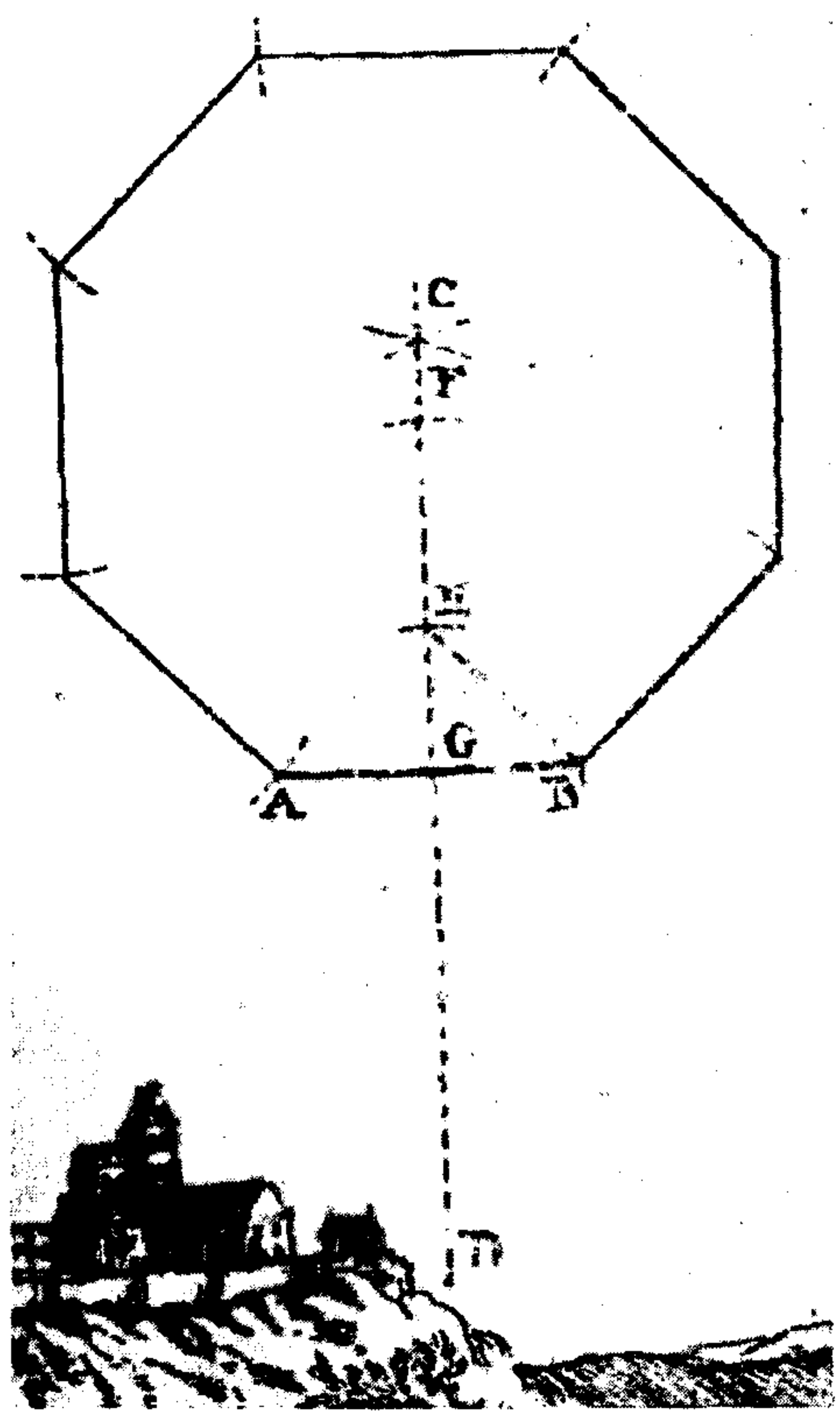
Euclid의 원론에 한 변이 주어진 정8각형의 작도방법은 제시되어 있지 않다. [10]

에 정8각형의 작도가 제시되어 있지만, 한 변이 주어진 정8각형의 작도는 아니다. 즉 정사각형에 내접원을 작도한 후에, 정사각형의 각의 이등분선과 내접원의 교점을 구하고, 이들 교점으로부터 내접원에 대한 접선을 작도하여 정8각형을 작도하는 방법이 소개되어 있다(그림 10). 이제, 한 변이 주어진 정8각형을 작도하는 '자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 방법을 자세히 살펴보자(p.118).

주어진 직선 AB에 정8각형을 작도하자. 두 점 A, B로부터 커다란 호를 그려 위쪽과 아래쪽에서 C, D에서 교차한다고 하자. 교점 C, D를 지나 선 AB와 만나는 직선을 그으면, 교점 G는 AB를 두 부분으로 나눈다. 길이 GB를 잡아, 수선 GC에 점 G로부터 점 E를 표시하자. 그리고 길이 EB를 잡아 수선 GC에 점 E로부터 점 F를 표시한다. 거리 FB를 이용하여 점 F에서 원을 작도한다(그림 11). 선 AB만큼을 7개의 원을 작도하면, 팔각형이 얻어진다. □



<그림 10>




<그림 11> '자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 정8각형의 작도 방법

기술한 정8각형 작도에서는 주어진 선분 AB를 현으로 가지는 외접원을 작도한 다음, 현 AB와 같은 선분을 원에 작도하여 정8각형을 얻었다. 작도 방법을 체계적으로

정리하면, 다음과 같다.

① AB의 수직이등분선 CD를 그리고, AB의 중점을 G라 한다.
② 수선 GC에 GB와 같은 선분 GE를 표시한다.
③ 수선 GC에 EB와 같은 선분 EF를 표시한다.
④ 중심이 F이고 반지름이 FA인 원을 작도한다.
⑤ 원에 현 AB와 같은 점 L, M, N, O, P, Q를 잡는다.
⑥ 점 A, B, L, M, N, O, P, Q를 연결하면, 정8각형이 얻어진다.

기술한 작도 방법의 타당성을 증명하자. 작도방법에 의해, <그림 11>에서 얻어진 8각형 ABLMNOPQ는 내접8각형이 된다. 이제 8각형 ABLMNOPQ가 등변8각형이라는 것을 보이면, 얻어진 도형이 정8각형임이 증명된다.

외접원의 반지름이 R인 정n각형의 한 변이 $2R\sin\frac{180^\circ}{n}$이 된다([9]). 즉 <그림 11>에서 8각형의 외접원의 반지름 R을 구하여 $2R\sin\frac{180^\circ}{8}$을 계산한 다음, 이 값이 AB의 길이와 같다는 것을 확인하면, <그림 11>의 작도에 의해 얻어진 도형이 등변8각형이라는 것이 증명된다.

우선 외접원의 반지름 R을 구하자. AB를 a라 놓으면, 선분 GE는 $\frac{a}{2}$이고, 피타고라스 정리에 의해 EB, 즉 EF는 $\frac{a}{\sqrt{2}}$가 된다. 결국 선분 GF의 길이는 $\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{a}{2}$이 되며, 삼각형 FAG에서 피타고라스 정리에 의해, FA는 $\sqrt{a^2+\frac{a^2}{\sqrt{2}}}=a\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$가 된다. 즉 외접원의 반지름 R은 $a\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$이다.

이제, 얻어진 R값을 $2R\sin\frac{180^\circ}{8}$에 대입하면, $2R\sin\frac{180^\circ}{8}=2a\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\sin\frac{180^\circ}{8}$가 된다. $\sin\frac{180^\circ}{8}=\sin\frac{45^\circ}{2}$이므로, 반각공식을 이용하면 $\sin\frac{45^\circ}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$가 된다. 이로부터 $2R\sin\frac{180^\circ}{8}$는 a가 됨을 알 수 있고, 결국 <그림 11>에 의해 얻어진 도형은 등변8각형이라는 것이 증명된다. □

기술한 증명에 의해, <그림 11>에서 얻어진 8각형의 한 변의 길이는 정8각형의 한 변의 길이와 같으므로, 외접원에 현 AB와 같은 점 L, M, N, O, P, Q를 잡으면 정8각형이 얻어지게 된다.

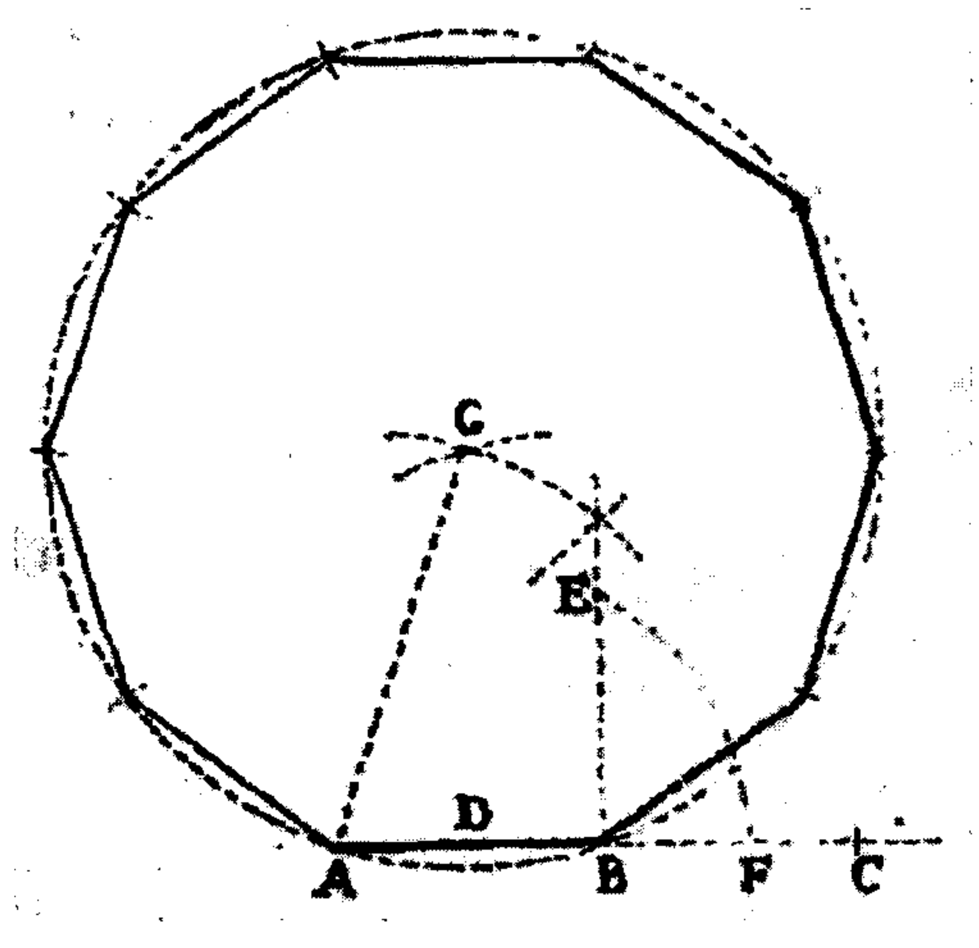
## (2) 정10각형의 작도

[1], [10]에는 주어진 원에 내접하는 정10각형의 작도방법이 소개되어 있으며, '자와 컴퍼스의 방법'과 [2]에는 한 변이 주어진 정10각형의 작도가 제시되어 있다. 우선, '자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 정10각형의 작도 방법을 살펴보자(p.122).

주어진 직선 AB에 정10각형을 작도하자. 정오각형을 작도할 때와 마찬가지 방법으로 점 G를 잡자(그림 12). 길이 GA로 점 G로부터 원을 작도한다. 주어진 선 AB만큼을 잡아 아홉 개의 원을 그리면, 정10각형이 얻어진다. □

제시된 작도방법을 상세히 분석하면, 다음과 같은 작도순서를 얻을 수 있다.

① 선분 AB를 연장하여, AB와 같은 선분 BC를 표시한다.
② 점 B로부터 AC에 수선 BL을 작도한다.
③ 중심이 B이고 반지름이 BA인 원과 BL의 교점을 E라 한다.
④ AB의 중점 D가 중심이고 반지름이 DE인 원과 AC의 교점을 F라 한다.
⑤ 중심이 A, B이고 반지름이 AF인 두 원의 한 교점을 G라 한다.
⑥ 중심이 G이고 반지름이 GA인 원을 작도한다.
⑦ 원에 현 AB와 같은 현들을 표시한다.
⑧ 얻어진 점들을 연결하면, 정10각형을 얻는다.




<그림 12> '자와 컴퍼스의 방법'에 제시된
정10각형의 작도 방법

살펴본 작도방법에서는 정오각형의 작도에서 주어진 선분 AB로부터 다른 꼭지점 G를 작도하는 것과 같은 방법으로, 선분 AB로부터 외접원의 중심 G를 잡았다.

<그림 12>에 외접원이 작도되어 있으므로, 기술된 작도 방법의 타당성 증명은 정8

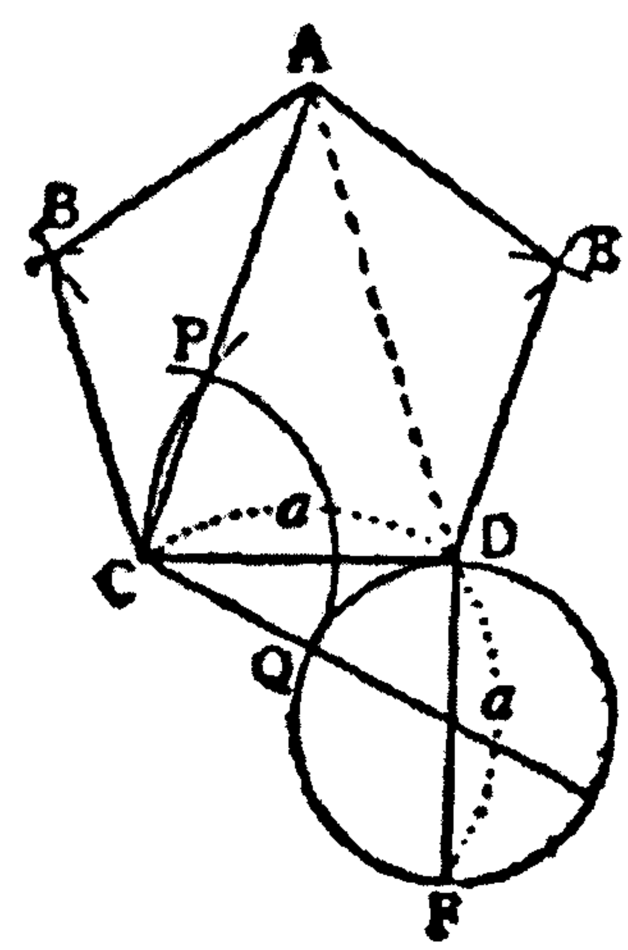
각형에서와 마찬가지로 외접원의 반지름과 한 변의 관계를 이용하여 살펴보자.

<그림 7>에서 AB의 길이를 a라 할 때, AG는 $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$a임을 보였다. <그림 12>에서 AG는 외접원의 반지름 R이므로, 정10각형의 한 변의 길이 $2R\sin\frac{180^\circ}{10}$를 계산하여, AB의 길이인 a값과 비교하자. $2R\sin\frac{180^\circ}{10}=2a\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\sin\frac{180^\circ}{10}$이고, $\sin 18^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$이므로, $2R\sin\frac{180^\circ}{10}=2a\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)$가 된다. 얻어진 식을 정리하면 a가 되므로, <그림 12>의 작도에서 얻어진 다각형은 정10각형임이 증명된다. □

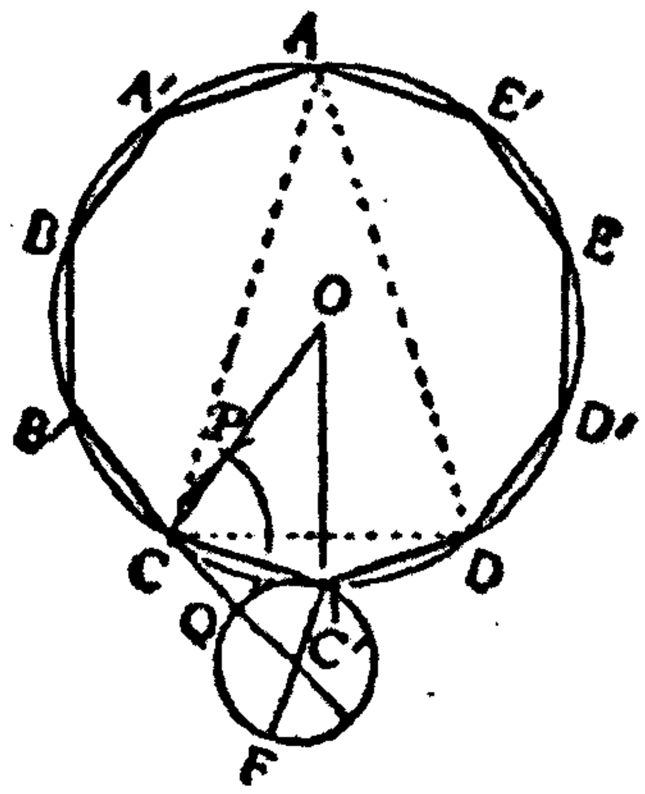
'자와 컴퍼스의 방법'에서와 같이, 정오각형의 작도방법을 이용하여 정10각형을 작도하려는 시도는 [2]에서도 찾아볼 수 있다. [2]에는 정오각형을 <그림 13>과 같이 작도하였다(p.349).

길이가 a인 선분 CD를 잡고, D에서 CD에 수선을 그어 DF=CD가 되도록 F를 잡는다. 이제 선분 DF를 지름으로 하는 원을 작도하고, 이 원의 중심과 C를 연결하는 선분을 그어 원과의 교점을 Q라 한다.

이제 중심이 C이고 반지름이 CQ인 원과 중심이 D이고 반지름이 CD인 원의 교점을 P라 한다. 직선 CP를 그어, 직선에 PA=CD인 점 A를 잡는다. 중심이 A, C이고 반지름이 a인 원의 교점을 B, 중심이 A, D이고 반지름이 a인 원의 교점을 E라 하자. 점 A, B, C, D, E를 연결하면, 정오각형이 얻어진다. □



<그림 13>



<그림 14>

[2]에 제시된 정오각형 작도방법은 '자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 방법과 유사하지

만, 꼭지점 A를 찾는 방법이 다르다. 한편, [2]에는 정10각형을 정오각형의 작도를 이용하여, '자와 컴퍼스의 방법'과 유사한 방법으로 작도하고 있다.

<그림 14>에서 삼각형 CC'O를 <그림 13>에서 삼각형 ACD를 작도하는 것과 같은 방법으로 작도하고, 중심이 O이고 반지름이 OC인 원을 작도한 다음, CC'과 같은 현들을 표시하여 정10각형을 작도하고 있다.

## 4. 결론

본 연구에서는 1709년 러시아에서 출판되었고, 다양한 작도문제의 해결방법이 기술된 책 '자와 컴퍼스의 방법'을 탐구하였다. 특히, 정삼각형, 정사각형, 정오각형, 정육각형, 정8각형, 정10각형의 작도방법을 분석하였고, 작도방법의 타당성을 증명하였다.

'자와 컴퍼스의 방법'은 러시아 황제의 명령에 의해 1709년 2월에 모스크바에서 출판되었으며, 저자는 미상이다. '자와 컴퍼스의 방법'은 375쪽으로 이루어졌으며, 기하학의 개관, 작도문제의 해결을 위한 바탕 지식들, 작도문제의 해결 방법, 작도문제의 활용 등의 내용을 포함하고 있다.

'자와 컴퍼스의 방법'에는 다양한 직선들, 평면도형들, 내접도형들, 외접도형들, 비례하는 선들, 입체도형들에 관련된 많은 작도문제가 제시되어 있다. 작도문제의 풀이에는 작도순서의 기술뿐만 아니라, 그 타당성의 증명이 중요한 부분을 차지하지만, '자와 컴퍼스의 방법'에는 작도순서만 기술되어 있기 때문에, 본 연구에서 이들 작도 방법의 타당성을 증명하였다.

'자와 컴퍼스의 방법'에서는 정삼각형의 작도 방법을 이용하여 정사각형을 작도하였고, 정오각형의 작도 방법을 이용하여 정10각형의 작도를 수행하였다. 이와 같은 문제해결 방법들 사이의 연결성은 '자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 정다각형의 작도방법이 수학 탐구 과정에서 또는 교수-학습 과정에서 폭넓게 활용될 수 있음을 보여준다고 할 수 있다.

한편, '자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 정오각형의 작도에서는 수직이등분선, 원의 작도가 이용되었는데, 본 연구에서는 이 방법의 타당성을 대각선의 길이를 이용하여 얻어진 오각형이 등각오각형이 된다는 것을 통해 증명하였다.

본 연구에서는 문헌연구를 통해 정사각형, 정오각형, 정8각형, 정10각형을 작도하는 다른 방법들을 소개하였으며, 이 방법을 '자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 작도 방법과 비교하면서 고찰하였다.

본 연구의 결과는 정다각형 작도에 관련된 역사-발생적 연구를 위한 새로운 자료를 제공하며, 수학에 관련된 고문헌의 체계적인 연구를 활성화 시킬 수 있는 계기가 될 것으로 기대된다.

## 참고 문헌

1. 김주봉, 정다각형의 작도법에 관한 고찰, 청주교육대학교 과학교육연구소 논문집 20(1999), 73-88.
2. 이성헌, 이지홍, 기하대전, 경문사, 1960.
3. 장혜원, 중학교 기하 영역 중 작도 단원에 관한 고찰, 대한수학교육학회논문집 7 No.2 (1997), 327-336.
4. 정창현, 평면 도형의 작도에 관한 고찰, 수학교육 31 No.4 (1992), 83-92.
5. 한인기, 강인주, 모어-마스케로니의 정리에 대한 고찰, 한국수학사학회지 13 No.2 (2000), 133-144.
6. 한인기, 작도 문제 해결 방법, 수학교육 논문집 9 (1999), 153-164.
7. 한인기, 김문섭, 바탕문제를 활용한 정사면체와 정육면체의 절단면 작도에 대한 연구, 수학교육 46 No.3 (2007), 303-314.
8. Akeksandrov I.I., ***Sbornik Geometricheskih Zadach na Postroenie***, URSS, 2004.
9. Amelkin V.V., Rabtsevich V.L., Timohovich V.L., *Geometriya na Ploskosti*, Asar, 2003.
10. Butuzov V. F., Kadomtsev S. B., Poznyak E. G., Shestakov S. A., Yudina I. I., ***Planimetriya***, FIZMATLIT, 2005.
11. Clairaut, ***Elements de Geometrie***, 1741 / 장혜원 역, 클레로의 기하학 원론, 경문사, 2005.
12. Euclid, ***Hachala***(Knigi (I-IV), Texniko-Teoreticheskoi Literatury, 1948.
13. Perepelkin D. I., ***Geometricheskie Postroeniya v Srednei Shkole***, 1947, IAPN.
14. Posamentier A. S., ***Advanced Euclidean Geometry***, Key College Publishing, 2002.
15. Prasolov V. V., ***Zadachi po Planimetriya***, MTsNMO, 2001.

# A Study on the Construction of Regular Polygons in 'Method of Ruler and Compass'

Gyeongsang National University **In Ki Han**

In this paper we study a book 'Method of Ruler and Compass' written in Russia three hundreds years ago. In this book many construction problems related with plane figures and solid figures are solved. In this study we analyze construction method of some regular polygon(square, regular pentagon, regular octagon, regular decagon) suggested in 'Method of Ruler and Compass', give mathematical proofs of these construction.

*Key words*: construction problems, regular polygon, square, regular pentagon, regular octagon, regular decagon

2000 Mathematical Subject Classification: 01A05, 01A50, 97U20

ZDM Classification: U24

접수일 : 2008년 3월 20일 수정일 : 2008년 4월 25일 게재확정일 : 2008년 5월 7일