구의 부피에 대한 수학사적 고찰 및 교수학적 함의*

진주교육대학교 수학교육과 장혜원
hwchang@cue.ac.kr

본 연구에서는 동서양 수학사에서 다양한 방식으로 취급된 구의 부피 측도에 대해 고찰한다. 서양수학사에서 발견되는 아르키메데스, 카발리에리, 케플러의 방법에 대비하여, 동양수학사에서 구장산술, 유휘, 조충지와 조긍의 방법, 그리고 조선시대 산학서에서 다루어진 방법에 대해 알아본다. 나아가 이러한 역사적 고찰 결과를 수학 및 수학교육적 관점에서 조명한다. 특히 현행 교과서 및 교수 실제상의 문제 제기로부터 교재 구성을 위한 대안을 모색해본다.

주제어 : 구의 부피, 동서양 수학사, 아르키메데스, 카발리에리, 케플러, 구장산술, 유휘, 조충지, 조긍, 조선 산학서, 실험 접근

0. 서론

'geometry'의 어원에서도 알 수 있듯이 기하라는 학문의 출발은 측정에 있다. 여기서 측정이라 함은 농사를 짓기 위해 토지의 넓이를 측량하는 평면도형의 측도가 대표적이다. 한편 입체도형은 토목 공사 및 곡식 비축 시의 양감 있는 모양과 관련된다. 그런데 고대 건축물은 지상에서의 버팀목의 필요성을 고려할 때 공 모양을 취한다는 것은 부담스럽고 곡식 역시 공 모양으로 쌓을 수는 없으므로 사실 구 모양의 입체는 일상생활에서의 측정과는 거리가 멀다고 할 수 있다. 이와 같이 실용성과 관련하여 설명되는 고대의 수학적 활동과 어울리지 않음에도 불구하고 동양과 서양의 수학사를 막론하여 구의 부피를 구하는 방법은 오래 전부터 수학자들의 관심사 중 하나여 왔다. Clairaut가 주장한대로, 수학 연구의 출발은 필요에 의한 것이지만 그에 못지않게 인간 본연의 호기심이 작용한 덕분이라고 할 수 있다([17]).

그러나 <구장산술>을 원형으로 하여 경험적이고 직관적인 특징의 수학으로 간주되

* 이 논문은 2006년 정부(교육인적자원부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임(KRF-2006-311-C00187).

는 동양 수학과 <원론>을 원형으로 하여 연역적이고 논리적인 특징의 수학으로 간주되는 서양 수학에서 구의 부피를 구하는 방식에는 차이가 있을 것으로 기대된다. 일반적으로, 구의 부피 문제에 대한 중국의 접근은 아르키메데스의 접근과는 상당히 다르다고 언급된다([22]). Man & Lo([23])는 그 차이로, 아르키메데스의 접근은 평형의 원리에 기초한 반면 조충지의 접근은 모합방개라는 특별한 입체를 이용하여 카발리에리의 원리에 기초하였다는 점을 들었다. 또한 시기적으로는 아르키메데스가 앞서지만 너무 복잡한 데 반해 조긍의 것은 보다 간단하다는 견해도 있다([26]).

이와 같이 서로 다른 특성을 지닌 동서양 수학사에서 구의 부피 측도에 관한 연구 역시 서로 다른 양상을 띠며 발전되어 왔다는 견해가 지배적이다. 이에 본 연구에서는 구의 부피 계산의 다양성을 추적하기 위해 동서양 수학사 속의 접근법들을 고찰, 비교하고자 한다. 특히 비교적 덜 알려진 중국의 모합방개 모델을 통한 전개 방법 및 조선 산학서에서 다루어진 관련 내용에 대해 구체적으로 알아본다. 나아가 수학교육적 관점에서 구의 부피 지도와 관련하여 교수 실제를 위한 시사점을 이끌어내고자 한다. 구의 부피를 다루기 위해 국내외 수학 교과서에서 애용되는 실험 접근([16])이 지닌 실행상의 문제점을 지적하고, 그 대안을 구상하기 위한 기초 논의로서 본 연구의 수학사적 비교 고찰로부터 얻은 한 가지 방안을 제시할 것이다.

1. 서양 수학사에서 구의 부피에 대한 접근법

아르키메데스(Archimedes of Syracuse, 기원전 287-기원전 212)는 "일찍이 기하학자들은 … 구가 그 지름의 세제곱에 비례함을 보였다([27, p.294])"고 했는데, 바로 유클리드의 <원론> 제12권 18번째 명제가 구의 부피와 관련 있다: 구는 지름의 세제곱에 비례한다([32]). 이 명제를 현대적 식으로 나타내면 $V_{\text{구}} = kd^3$ (d : 지름)이다. 즉 구와 그 외접정육면체의 비례 관계를 말해줄 뿐 정확한 크기를 알려주지는 않는 것이다. 그리고 같은 권 10번째 명제로서 원기둥과 같은 밑면, 같은 높이를 갖는 원뿔의 부피가 그 원기둥의 1/3임이 증명되지만, 구와 원기둥의 관계는 언급되지 않는다. 그 관계를 찾아내는 영광은 아르키메데스의 몫이다.

(1) 아르키메데스의 방법

서양 수학사에서는 구[1]의 부피와 관련하여 떠올리게 되는 첫 인물이 아르키메데스다. 그는 미적분학이 정립되기 2천여 년 전에 이미 적분의 아이디어를 암묵적으로 이용하여 구의 부피를 처음으로 구하였다. 초기 미적분학자들은 아르키메데스가 구의

1) 영어로 구를 뜻하는 단어 sphere는 그리스어 ΣΦαιρα를 기원으로 하여 라틴어 sphaera를 거쳐 그렇게 불리었다([27]).

부피를 구하기 위해 이용한 방법은 알고 있었지만 그가 그 아이디어를 어떻게 생각해 냈는지에 대한 실마리는 찾지 못하였다고 한다. 그러다가 20세기 초, 아르키메데스가 에라토스테네스(Eratosthenes of Cyrene, 기원전 275-기원전 194)에게 보내는 편지 형식의 문서인 <방법론(The Method)>의 10세기 사본이 덴마크 고전 문헌학자인 하이버그(Heiberg, J.L.)에 의해 콘스탄티노플에서 발견되어 비로소 구의 부피를 구하는 그의 독창적이고 간단한 방법이 자세하게 알려지게 되었다([20], [30]).

다음은 <방법론>의 서문에 들어있는 내용이다.

> 나는 너를 위해 바로 그 책에서 어떤 방법의 특이함에 대해 상세하게 설명하며 써 내려 가는 것이 좋겠다고 생각했다. 그 방법으로 너는 수학의 일부 문제를 역학을 이용하여 탐구할 수 있는 출발점에 있게 될 것이다 … 나는 이 방법을 써서 부가적으로 다른 정리를 발견할 수도 있다([23] 재인용).

여기서 어떤 방법이란 평형법(method of equilibrium)을 말한다. 그 기본이 되는 아이디어는 부피를 알고자하는 입체를 여러 개의 평행한 원판으로 잘라 지렛대의 한쪽 끝에 매달고 부피와 무게 중심을 이미 알고 있는 다른 입체와 평형을 이루도록 한다는 것이다. 구하고자 하는 입체는 구이고 이미 알고 있는 입체는 원기둥과 원뿔이다. 그 결과로서 '구의 부피는 그 반지름을 높이로 하고 대원을 밑면으로 하는 원뿔의 부피의 4배라는 것(명제 2)'을 발견하였으며, 그보다 앞서 '타원의 활꼴 넓이가 그에 내접하는 삼각형 넓이의 4/3라는 것(명제 1)' 역시 평형법을 이용하여 밝혀내었다(명제1의 증명은 [21] 참조). 앞서 지적했듯이 이 방법의 위대함은 오늘날 우리가 사용하는 적분의 원리와 본질적으로 동일하다는 사실에 있다. Polya도 적분법의 발견을 가능하게 했던 구의 부피 계산을 아르키메데스의 업적 중에서 가장 극적이고 눈부신 예로 간주하였다([25, p.270]).

구체적으로, 아르키메데스가 명제 2의 증명에서 이용한 3개의 입체도형과 전개 방식은 다음과 같다([21]).2)

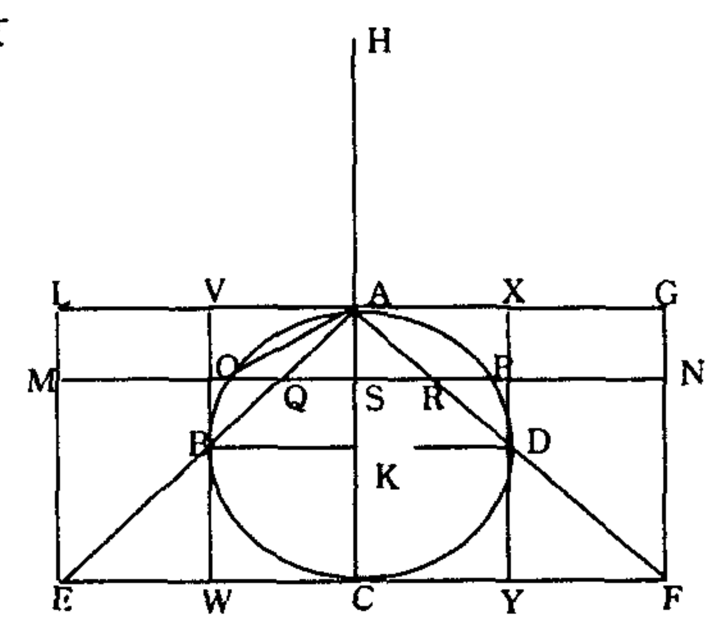
반지름 r의 구

밑면의 반지름 $2r$, 높이 $2r$의 직원뿔

밑면의 반지름 $2r$, 높이 $2r$의 직원기둥

$MS = AC$, $QS = AS$이므로,

$MS \times SQ = CA \times AS = AO^2 = OS^2 + SQ^2$



[그림 1] 아르키메데스의 평형법

2) 그러나 Man & Lo([23]), 서성보([5]), 이정연([7])에서는 아르키메데스가 이용한 원기둥 대신 구에 외접한 원기둥을 이용하여 설명하고 있다. Stein([28])이 이 세 개의 입체도형을 소개하며 '원기둥의 지름은 구의 지름의 두 배'라고 언급하고 있는 것은 많은 연구자들이 이러한 착오를 일으키기 때문인 듯하다.

$$\begin{aligned} HA = AC\text{이므로},\quad HA : AS &= CA : AS \\ &= MS : SQ \\ &= MS^2 : MS \times SQ \\ &= MS^2 : (OS^2 + SQ^2) \\ &= MN^2 : (OP^2 + QR^2) \\ &= \text{원}_{MN} : (\text{원}_{OP} + \text{원}_{QR}) \end{aligned}$$

즉 $HA : AS = C_{\text{원기둥}} : (C_{\text{구}} + C_{\text{원뿔}})$ (C는 입체의 단면)

따라서 그 위치에 있는 원기둥의 단면은 무게중심 H에 있는 구의 단면 및 원뿔의 단면과 A에 대해 평형을 이룬다.

AC에 수직인 어떤 평면에 의해 생기는 세 개의 단면에 대해서도 마찬가지다.

AC에 수직인 평면이 세 입체를 잘라 생기는, 따라서 각각 세 입체를 구성하는 모든 세 원을 같은 방식으로 다룬다면, 그 위치에 있는 원기둥은 무게 중심이 H에 있는 구 및 원뿔과 A에 대해 평형을 이룰 것이다.

따라서 K는 원기둥의 무게 중심이므로,

$HA : AK =$ 원기둥 : (구+원뿔 AEF)

$HA = 2AK$이므로 원기둥 = 2(구+원뿔 AEF)

원기둥 = 3 원뿔 AEF이므로[3]

원뿔 AEF = 2 구

그런데 $EF = 2BD$이므로 원뿔 AEF=8 원뿔 ABD

따라서 구 = 4 원뿔 ABD

그러나 Polya([25])가 각 입체도형을 그 단면의 합으로 다룬 일련의 과정은 '논리적으로 타당성을 가지는 것이 아니라 발견적으로 가정되는 것'이라고 했듯이 아르키메데스 자신은 이 결과를 개연성 있는 결론으로 여겼을 뿐이지 증명된 정리로 생각한 것은 아님을 다음에서 파악할 수 있다.

우리가 발견한 사실은, 우리가 했던 토론에 의하여 논리적으로 증명된 것은 아니다. 그러나 그 토론은 결론이 참일 것이라는 어떤 종류의 징후를 보여주고 있다([25, p.274] 재인용).

3) Archimedes보다 앞선 시대에 Democritus는 원뿔의 부피가 같은 높이와 밑면을 갖는 원기둥 부피의 1/3이라고 밝혔다. 그 방법에 대해서는 알려진 바가 없지만 단면적인 원의 변화를 조사함으로써 구한 것으로 보이는 근거가 있으며, Eudoxus가 가장 먼저 Democritus의 주장을 증명하였다([25]).

다시 말해 <방법론>에서의 설명은 오늘날 미적분 아이디어의 발상인 평형법을 활용한 발견의 과정을 보여주며 정당화의 과정은 별개로 전개되었다.

아르키메데스의 또 다른 저서 <구와 원기둥에 관하여(On the Sphere and Cylinder)> 제1권에 나오는 명제 34는 앞서 구와 원뿔의 부피 관계를 설명한 <방법론>의 명제 2와 동일하다. <방법론>에서 발견한 것을 이 책에서 증명한 셈이다. 이 증명을 위해 아르키메데스는 원의 넓이에 대한 증명을 할 때와 마찬가지로 소진법을 이용하였다.4) 다시 말해 구의 부피가 그러한 원뿔의 4배가 아니라면, 즉 더 크거나 작다면 모순이 야기됨을 보이는 것이다(증명의 세부 과정은 [21] 참조).

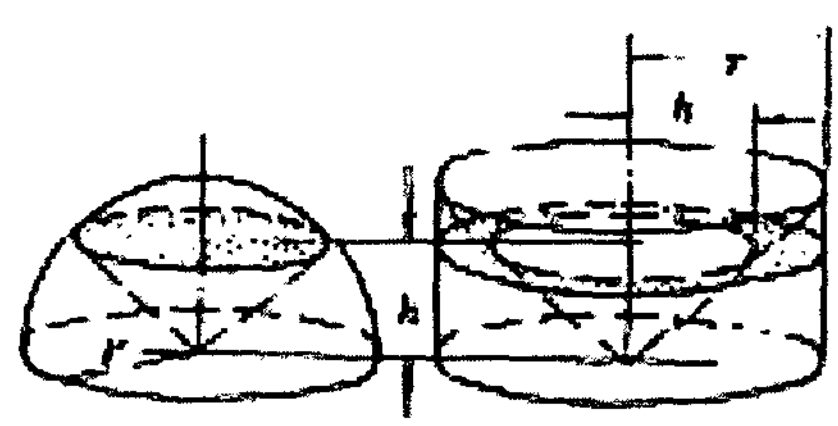
아울러 같은 책 제2권의 명제 2를 이용하여 증명을 구성하기도 하였다. 그 명제는 구를 한 평면으로 잘라 생기는 부분인 구결(球缺)의 부피가 밑면이 동일하고 어떤 비례식을 만족하는 높이로 결정되는 원뿔의 부피와 같음을 말한다. 따라서 그 비례식에 의해 높이가 결정되므로 임의의 구결의 부피를 구할 수 있고, 반구는 구결의 특수한 경우이므로 그 부피를 구할 수 있게 되는 것이다([21], [9]).

(2) 카발리에리의 방법

카발리에리(Bonaventura Francesco Cavalieri, 1598-1647)는 오늘날 그의 이름이 붙어있는 카발리에리 원리라는 무한소 방법을 써서 구의 부피 공식을 이끌 수 있었다. 그 원리란 '평행한 평면 사이에 어떠한 입체도형들이 구성되어도 평행한 평면으로부터 같은 거리에 있는 임의의 평면에 포함된 평면도형의 넓이가 같다면, 그 입체도형들은 부피가 서로 같다.'를 말한다. 직관적으로 말하면, 입체도형을 단면이 되는 평면도형들을 쌓아놓은 것으로 간주할 때 임의의 같은 높이에서 단면이 같다면 그 합인 부피도 같다는 생각이다.

이 원리를 적용하여 구의 부피를 구하기 위해 [그림 2]에 있는 2개의 도형을 이용한다. 하나는 탐구 대상인 반지름 r인 반구이고 또 하나는 반지름 r, 높이 r인 원기둥에서 같은 반지름과 높이의 원뿔을 제거한 도형이다.

두 입체를 밑면에 평행인 임의의 평면으로 높이 h에서 자른다. 이 때 두 입체의 단면은 각각 원과 환형이 되는데, 높이 h에서 그 넓이를 계산하면 $\pi(r^2-h^2)$으로 서로 같다. 카발리에리 원리에 의해 두 입체도형의 부피는 같고 원기둥과 원뿔의 부피를 이미 아는 상태에서 다음 공식을 얻는다.



[그림 2] 카발리에리 원리 ([26, p.240])

4) 소진법(method of exhaustion)은 극한에 의해 도형의 넓이를 구하는 방법으로, 전형적으로 귀류법(reductio ad absurdum)이라 부르는 모순에 의한 증명법을 사용한다. 어떤 영역의 참값이 다른 영역보다 크거나 작다고 가정할 때 모순이 야기됨을 이용하는 것이다.

$$V_{구} = 2(V_{원기둥} - V_{원뿔}) = 2(\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

(3) 케플러의 방법

케플러(Kepler, J., 1571-1630)는 뉴턴 이전에 이미 직관적인 미적분의 관념을 지녔고, 그에 기초하여 책 <Stereometrie Doliorum>에서 다음 사항을 알아냈다([24]).

원의 넓이= $\frac{1}{2}$ · 반지름 · 둘레

구의 부피= $\frac{1}{3}$ · 반지름 · 구의 겉넓이

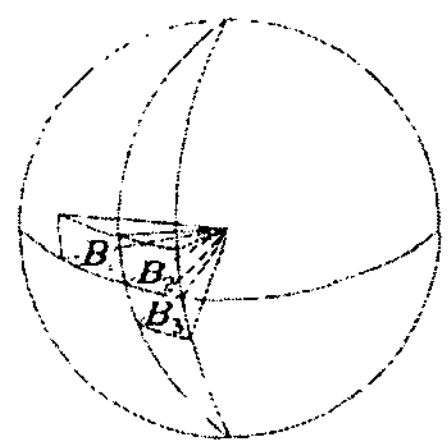
첫 번째 공식은 원을 원의 중심을 꼭짓점으로 하고 합이 원의 둘레와 거의 마찬가지인 무한히 작은 현을 밑변으로 하는 이등변삼각형으로 이루어진 내접 다각형으로 간주함으로써 얻는다. 마찬가지로 두 번째 공식은 구를 구의 중심을 꼭짓점으로 하고 합이 겉넓이와 거의 마찬가지인 무한히 작은 밑면을 갖는 사각뿔로 이루어진 것으로 간주함으로써 얻는다([그림 3]). 다음과 같은 식으로 표현되는 아이디어다.

$$V_{구} = \frac{1}{3}rB_1 + \frac{1}{3}rB_2 + \frac{1}{3}rB_3 + \cdots$$

$$= \frac{1}{3}r(B_1 + B_2 + B_3 + \cdots)$$

$$= \frac{1}{3}r\,(\text{구의 겉넓이})$$

이제 구의 겉넓이 $4\pi r^2$을 알고 있다면 다 구하였다.



[그림 3] 케플러의 방법([24, p.408])

2. 동양 수학사에서 구의 부피에 대한 접근법

동양 수학의 실용적 특성을 고려할 때 이론적 연구 대상인 구의 측도에 대해 어떤 연구 결과가 있었는지 알아보는 것은 흥미로운 주제이다. 본 고에서는 중국 수학사를 중심으로 유휘의 아이디어와 조충지-조긍 부자의 완성도 높은 결과에 주목한다. 동양 수학의 실용적 특성이라는 표현을 재고하도록 하는, 중국 수학사상 이른 시기의 중요한 성과이다. 이어 중국 수학의 영향을 받은 조선시대 수학책에서는 구의 부피를 어떻게 계산하였는지 알아본다.

(1) <구장산술>의 방법

<구장산술>에 구의 측도에 대한 내용이 있을까? 담긴 문제의 특성상 현실과의 밀

접한 관련성을 염두에 둔다면 부정적인 답이 예견된다. 그 내용을 찾아보기 위해 책을 검토할 때 여러 모양을 띤 밭의 넓이를 통해 제1권 방전에서 평면도형이 발견되는 것을 생각하면 구는 여러 모양의 토목 공사나 곡식의 쌓아놓은 모양을 통해 입체도형의 부피를 다루는 제5권 상공에서 발견될 것을 기대할 수 있다. 그러나 좀 더 생각해보면 현실에서 공 모양의 건축 공사나 곡식 쌓는 모양은 당시로서는 비현실적이다. 구의 부피에 대한 계산은 수학적 관심에서 비롯되며 따라서 실제로 <구장산술>에서 구의 부피를 다루는 부분은 제4권 소광이며, 세제곱근과 관련하여 다루어진다는 사실 또한 주목할 만하다. 제23문과 24문이 부피가 주어진 구[5]의 지름을 구하는 문제인데, 그로부터 구의 부피에 대한 공식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$V=\frac{9}{16}(\text{지름})^3$$

이 공식은 구의 지름과 정육면체의 한 모서리가 같을 때 두 입체의 무게비가 16 : 9 ($\frac{V_{\text{정육면체}}}{V_{\text{구}}}=\frac{16}{9}$)임을 파악한 금세공인의 오랜 경험에서 비롯되었다고 한다([31]).

이 공식의 부정확성에 대해 관심 있던 한나라의 장형(張衡, 78~139)은 원기둥과 내접구의 부피 관계에 대한 한 가지 가설을 세운다. 두 입체의 부피비가 정사각형과 그 내접원(구의 단면)의 넓이비 4 : 3[6]과 같다는 가정이다([19]).

이 가설과 함께 이미 알려진 사실로서 정육면체와 내접원기둥의 부피비가 그 단면적의 비 4 : 3임을 따른다면 다음이 성립한다([31]).

$$\frac{V_{\text{정육면체}}}{V_{\text{구}}}=\frac{V_{\text{정육면체}}}{V_{\text{원기둥}}}\times\frac{V_{\text{원기둥}}}{V_{\text{구}}}=\frac{16}{9}$$

이와 같이 장형은 <구장산술>을 이해하는 차원에서 가설을 세우고 설명했지만 어디까지나 가설에 머물렀다.

(2) 유휘의 업적

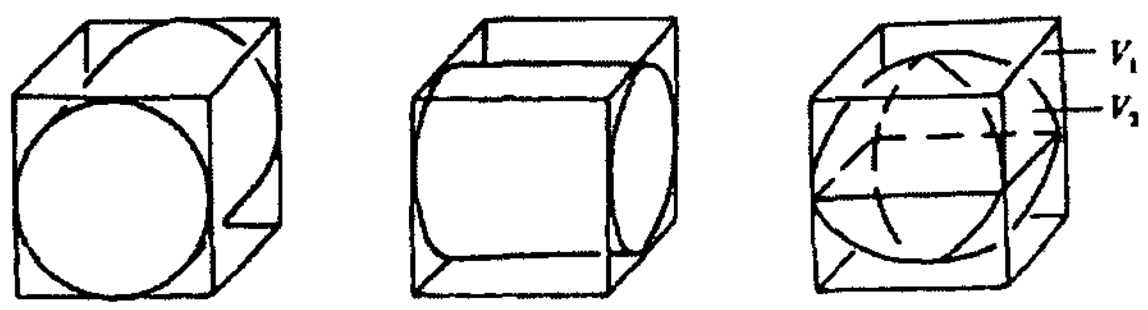
여기서 주목해야할 것이 유휘(劉徽, 3c)의 부피 계산이다. 곽서춘([15, p.63])은 유휘 이전의 부피 계통과 유휘의 부피 계통을 두 개의 도표로 나타내어 비교하였는데, 큰 차이 중 하나가 바로 구의 부피 계산과 관련되어 있다. 원기둥으로부터 직접 구의 부피비를 구했던 이전에 비해, 유휘는 양자 사이의 매개물로서 모합방개(牟合方蓋)를 고

5) 중국 및 조선 수학에서 구는 입원(立圓)이라 불린다. 다만 남병길은 입원을 구체(球體)라고도 하였으며, 홍대용의 <주해수용>에는 정원형(正圓形) 또는 정원체라는 용어도 등장한다.

6) 정사각형과 내접원의 넓이비 $4:\pi$에서 고법 3으로 대체한 것이다. 고법 3이 원을 내접 정육각형과 동일시한 값일 만큼 둘레에 관한 한 정육각형이 원의 근사 도형으로 이용되었지만 넓이에 있어서는 정사각형과 관련지어 다루어졌다. 정사각형의 넓이는 잘 알려진 측도이지만 정육각형의 넓이를 구하는 데 필요한 정삼각형의 넓이 계산이 당시로서는 풀기 어려운 문제였기 때문일 것이다.

려했다는 차이를 담고 있다. 어떤 과정인지 알아보자.

유휘는 <구장산술>을 주해하면서 구의 측도에 있는 상수 9/16가 어떻게 나온 것인지에 대해 다각적으로 탐구하였다. 그리고 장형이 세운 가설의 오류를 지적하였다. 원주율을 3으로 하면 원의 넓이는 너무 작고, 기둥을 구의 비율로 하면 구의 부피가 너무 커서 그것을 조정하여 대략 9 : 16으로 했는데 역시 크다고 하였다.7) 얼마큼 큰 지는 밝히지 못했지만 더 정확한 구의 부피를 얻기 위해 새로운 입체를 구상하였다. 모합방개8)라 불리는 그 입체의 문자그대로의 의미는 '똑같이(牟) 합쳐진(合) 정사각(方) 우산(蓋)'이며, 한 모서리가 1인 8개의 정육면체를 쌓아 한 변이 2인 정육면체를 만들고 [그림 4]와 같이 지름과 높이가 각각 2인 두 개의 원기둥을 수평으로 직각을 이루게 놓아 정육면체를 자른 공통부분에 해당한다. 한편 유휘는 이 입체를 다른 관점에서 파악하였다. 카발리에리 원리와 마찬가지 아이디어를 떠올려 구를 다양한 크기의 원을 쌓아올린 것으로 간주하고 쌓인 각각의 원을 그것의 외접 정사각형으로 대체하면 모합방개인 것이다([26]). 그렇다면 이제 4 : 3은 장형의 가설에 따른 원기둥과 구의 비가 아닌 모합방개와 구의 비가 되는 것이다.



[그림 4] 모합방개의 형성([26, p.233])

이제 남은 것은 모합방개의 부피를 아는 것인데, 유휘는 그 입체를 구상했지만 부피를 구하지는 못했다.9) 그러한 한계에도 불구하고 유휘의 업적은 적어도 두 가지 점에서 주목할 만하다. 우선 당시에 널리 통용된 방법의 부정확성을 인식하여 더 정확한 방법을 추구했다는 사실(물론 그 과정에는 이전까지 이용된 원기둥과 그 내접구의 부피비에 대한 잘못된 가정을 지적하는 것도 포함된다)과, 이를 위해 구에 대한 근사로서 원기둥이 아닌 더 가까운 근사값이 가능한 새로운 입체를 고안했다는 점을 들

7) 이에 대한 Shen([26])의 설명을 참조하면, 유휘는 휘술을 계산했으므로 $\frac{3}{4}(\text{지름})^2 < \frac{\pi}{4}(\text{지름})^2 = S_{\text{원}}$, $\frac{3}{4}(\text{지름})^3 < \frac{\pi}{4}(\text{지름})^3 = V_{\text{원기둥}}$임을 알고 있었다. 후자에 원기둥과 구의 비로 가정된 3/4를 곱하여 우변을 구의 비율로 하면 너무 커서 더 작은 좌변 $V=\frac{9}{16}(\text{지름})^3$을 구로 간주했으나 역시 크다는 것이다.

8) 아르키메데스도 두 수직 원기둥의 공통부분인 이 입체를 다루며, 그 부피 공식을 <방법론>의 15번째 정리로 제시한다.

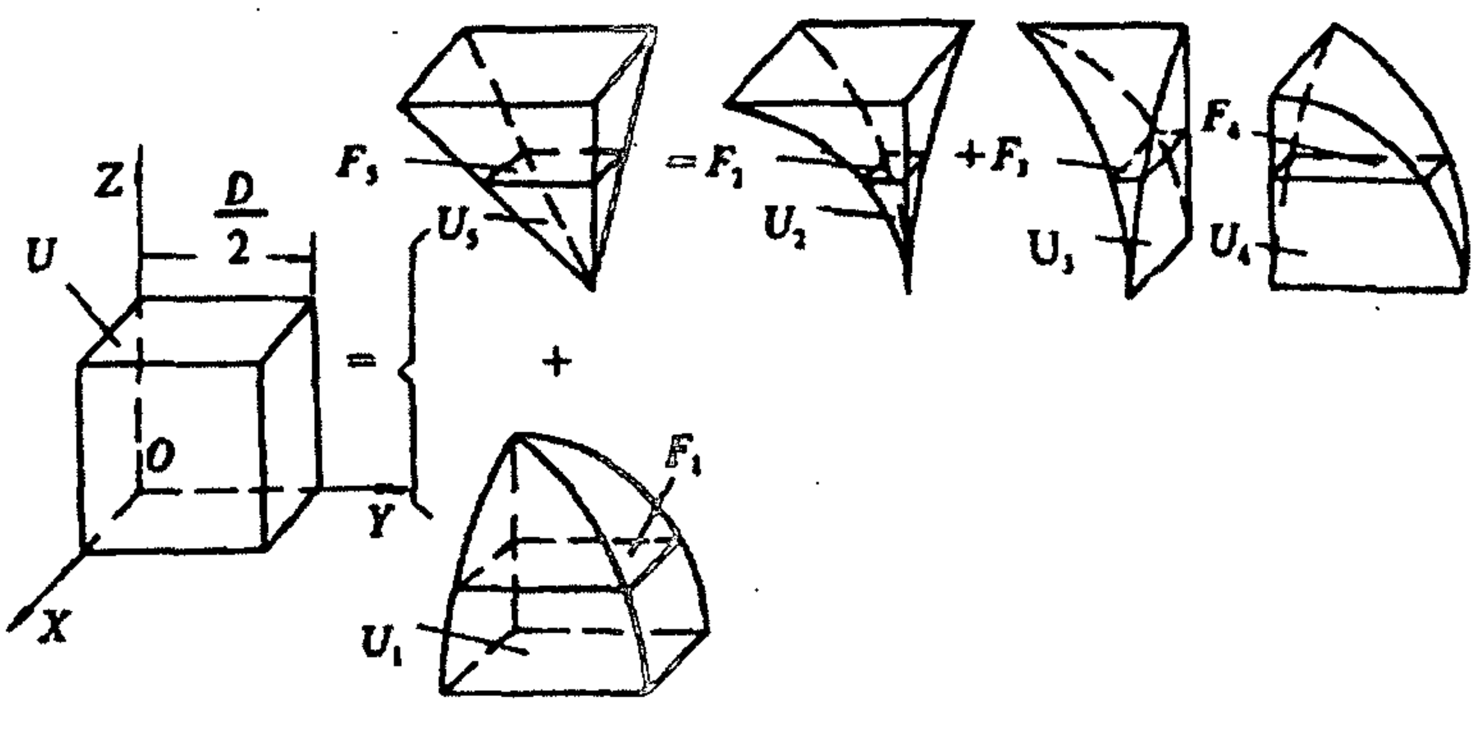
9) 참값을 말할 수 있는 자에게 문제를 남긴다고 하였고 그 영예가 조충지, 조긍 부자에게 넘어간 것은 잘 알려진 사실이다.

수 있다. 이전까지 구의 부피를 원기둥과 관련지어 생각한 기본 틀 내에서 좀 더 구에 가까운 입체를 모색하다 보니 두 원기둥의 공통부분으로서 구에 보다 근접한 입체를 구상할 수 있었던 것으로 추정된다. 그리고 그 과정에서 3차원 입체를 단면에 의해 2차원적으로 파악한 것이 실마리가 되었다는 사실은 중요하다.

(3) 조충지-조긍 부자의 방법

모합방개의 부피는 조충지(祖冲之, 429-500)와 조긍(450?-520?) 부자에 의해 밝혀진다. Fu([19])는 구의 부피 계산에서 대조되는 유휘의 실패와 조긍의 성공을 각자의 발견술 탓으로 돌리며 양자를 구별한다. 유휘의 발견술은 많은 기하 문제를 해결했지만 구에 관한한 모델까지 생각하고서도 공식에 이르지 못한 추론 패턴으로 규정된다.

조 부자의 저서가 현존하지 않기 때문에 Shen([26])은 이순풍의 주해를 기초로 하여 조 부자의 방법을 다음과 같이 정리하였다: 모합방개의 1/8을 생각하자. 유휘가 모합방개를 만들 때 두 개의 원기둥을 이용하여 잘랐던 것을 정육면체의 1/8에 국한시켜 생각하면 구의 반지름 $D/2$를 모서리로 하는 작은 정육면체는 [그림 5]와 같이 네 개의 부분 U_1, U_2, U_3, U_4로 나뉜다. 이 중 U_1이 바로 모합방개의 1/8이다.



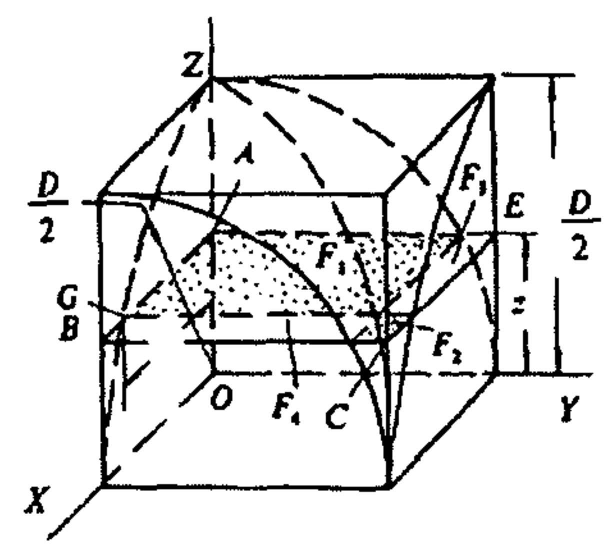
[그림 5] 조 부자의 방법 1 ([26, p..237])

네 부분을 다시 모아 높이 z에서 수평으로 자른다(그림 6). 이때 그 단면을 모합방개의 단면 F_1과 그 나머지 부분인 노몬으로 구분해볼 수 있다. F_1의 넓이가 AG^2이므로 노몬의 넓이는 $(\frac{D}{2})^2 - AG^2$이다. 그런데 XZ축에 있는 1/8(모합방개)의 옆면에서 $\frac{D}{2}$, AG, z는 직각삼각형의 세 변을 이루므로 구고술에 의해 노몬의 넓이는 z^2이 된다. 즉 노몬은 높이 z를 한 변으로 하는 정사각형으로 변형될 수 있다. 높이 z는 임의적이므로 어느 높이에서든 입체 U_2, U_3, U_4의 단면의 합은 U_5의 단면과 같다. 카

발리에리와 동일한 원리에 의해 U_2, U_3, U_4의 부피의 합은 U_5의 부피와 같게 된다. 즉 정육면체에서 모합방개를 뺀 입체가 당시 측도가 알려진 '양마(陽馬)'라 일컫는 정사각뿔과 같으므로 이제 모합방개의 부피를 구할 수 있고, 구의 부피도 얻는다.

$$\frac{1}{8}V_{\text{모합방개}} = V_{\text{정육면체}} - V_{\text{정사각뿔}} = r^3 - \frac{1}{3}r^3 = \frac{2}{3}r^3$$

$$V_{\text{구}} = \frac{\pi}{4}V_{\text{모합방개}} = \frac{\pi}{4}\cdot 8\cdot\frac{2}{3}r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$



[그림 6] 조 부자의 방법 2 ([26, p.237])

조 부자 식으로 표현하면 $\frac{(\text{지름})^3}{2}$ 인데, 모합방개의 부피는 외접 정육면체의 2/3이고, 구의 부피는 고법 3의 조건 아래 모합방개의 3/4이므로 정육면체의 1/2에 해당하므로 이 식은 고법의 경우에 오늘날과 동일한 참값을 준다. 조 부자는 유휘가 고안한 새로운 모델에 대해 유휘 자신은 암묵적으로 생각한 원리를 명시적으로 적용함으로써[10] 구의 부피를 정확하게 계산해낸 것이다.

조 부자가 구한 정확한 구의 측도 덕분에 이전에 가정되었던 구와 외접원기둥의 비 3 : 4는 오류임이 명확히 밝혀졌다. 실제 비는 2 : 3이고, 이후 중국 수학에서는 구가 외접원기둥의 2/3임을 보이는 새로운 증명법이 고안되었다. 예컨대 청대의 매문정(梅文鼎, 1633-1721)과 서유임(徐有壬)의 방법[11]이다.

(4) 조선시대 산학서에서 다루어진 구의 부피

조선에서는 중기 이후 실학사상의 팽배로 산학 분야의 연구가 활성화되었고 따라서 산학서도 발행되었다. 그 중 몇 권의 내용을 검토함으로써 당시 다루어진 구의 부피에 대해 알아본다.

<묵사집산법>에서 제시된 두 가지 방법은 다음과 같다([2, p.39]).

$$\frac{(\text{둘레})^2\times(\text{둘레})}{48} \text{과} \quad \frac{(\text{지름})^2\times(\text{지름})\times 9}{16}$$

후자가 <구장산술>에서 사용된 방법이며 전자는 고법의 경우 후자와 일치한다. 따라서 둘 모두 참값과 거리가 먼 근사값이며 원주율로 고법만을 고려했음을 보여준다.

<구일집>에서는 책머리인 범례에서 그 방법을 요약하며, 제4권 구척해은문(毬隻解隱門)에서 구의 부피와 관련된 총 9개의 문제를 다룬다([12]). 이 문제들을 풀기 위한

10) 덴마크의 과학사가 Wagner는 중국 수학에서 카발리에리의 원리와 동일한 아이디어가 사용되었음을 지적하였다. 그 원리에 상응하는 결과를 조긍은 명백하게 언급하고 이용하였으며 더 앞선 유휘는 유사한 상황에서 몇 차례 암묵적으로 적용하였다는 것이다([26, p.46]).

11) 구체적인 방법은 [26] 참조.

계산에는 삼차방정식의 풀이가 포함되므로 당시 삼차방정식의 해법인 개입방술과 방정식 표기법인 천원술이 책 속에 처음 등장하는 부분이기도 하다.

지름, 둘레, 둘레와 지름이 주어질 때의 세 경우에 대해 각각 다음을 제시한다.12)

$$\frac{(\text{지름})^3\pi^2}{16},\quad \frac{(\text{둘레})^3}{16\pi},\quad \frac{\frac{(\text{둘레})\times(\text{지름})}{4}\times(\text{둘레})}{4}$$

지름이나 둘레 중 하나를 알면 나머지 하나도 알 수 있으므로 실제로 세 개의 식은 같은 방법의 다른 표현일 뿐이며, 고법 3을 취하면 세 식은 모두 $\frac{9}{16}(\text{지름})^3$이 되므로 원주율의 정확도 수준을 고려한 것을 제외하면 적어도 구의 부피와 관련해서는 <구장산술> 이후의 수학적 발전이 전혀 반영되지 않았다고 할 수 있다. 특히 세 번째는 $\frac{(\text{둘레})\times(\text{지름})}{4}$이 당시 원의 넓이를 구하는 공식임을 고려할 때([8]) 대원의 넓이를 이용하여 구의 부피를 구하는 공식이 된다.

<주해수용>에는 체적법(體積法)([11, p.71])에서, <동산초>에서는 구척해은문(毬隻解隱門) 중 2개의 문제로 구의 부피를 다룬다([1, pp.133-134]). 전자는 <구장산술>의 수준이며 후자는 휘술과 밀률을 이용하므로 <구일집>과 같은 정도로 볼 수 있다.

그러나 황윤석이나 남병길의 책에 보면 상황이 달라진다. 아마도 사대부들은 중인 산학자보다 문헌 자료의 제약을 덜 받고 중국의 수학서적들을 널리 참조했을 것이므로 이전에 이루어진 중국의 발전을 접하고 연구했을 가능성이 높다. 그 결과, <구장산술>의 방법 외에 조 부자의 방법 및 그 밖의 관계에 대한 논의를 첨부하고 있다.

황윤석(黃胤錫, 1729-1791)의 <산학본원>은 우선 '원율삼가(圓率三家)'에서 주어진 지름 $2\frac{1}{2}$에 대한 고법, 휘술, 밀률에 따른 구체적 예를 통해 <구장산술>의 공식을 반지름을 알 때의 공식 $\frac{(\text{반지름})^3\times\pi^2}{2}$으로 고쳐서 제시하는 수준이다. 그러나 이어 나오는 '조충지원산(祖冲之圓算)'에는 다음과 같이 적혀있다.

둘레나 지름을 알고 구의 부피를 구할 때는 둘레나 지름을 세제곱하고 구의 부피 정률을 곱하고 정육면체의 부피 정률로 나눈다([13, p.85]).

이 방법을 적용하려면 우선 구의 부피 정률과 정육면체의 부피 정률을 알아야 한다. 따라서 세 개의 원주율인 밀법 3.14159265, 밀률 $\frac{355}{113}$, 약률 $\frac{22}{7}$에 대해 구의 부

12) <구일집>에서 원주율은 $\frac{(\text{둘레의 법})}{(\text{지름의 법})}$으로 나타냈고 정확도에 따라 고법, 휘술, 밀률의 세 가지 중 택일하여 이용되었다([8] 참조). 이를 π로 나타낸 것이다.

피 정률과 정육면체의 부피 정률을 제시하여 놓았다. 예컨대 셋 중 가장 정확한 밀법의 경우, 다음과 같다([13, p.86]).

구의 지름 1자(세제곱입방)
　구의 부피 정률 523치 598775
　정육면체의 부피 정률 1000치(입방)

구의 둘레 3자 14159265(세제곱입방)
　구의 부피 정률 523치 598775
　정육면체의 부피 정률 31006치 276574010302860934625(입방)

여기서 구의 부피 정률은 오늘날 $\frac{4}{3}\pi r^3$에 의해 계산된 값과 정확하게 일치하며 정육면체의 부피 정률은 지름(또는 둘레)을 세제곱한 값이다. 그렇다면 위에서 말한 구의 부피 구하는 방법의 타당성을 다음과 같이 확인할 수 있다. 세 가지 원주율에 대한 지름, 둘레, 정률이 주어진 덕분에 그 지름 d에 대한 부피 정률 $\frac{4}{3}\pi(\frac{d}{2})^3$을 아는 상태에서, 문제의 조건인 지름 $d'=kd$ 인 구의 부피는 $\frac{4}{3}\pi(\frac{d'}{2})^3=\frac{4}{3}\pi(\frac{kd}{2})^3$ $=\frac{4}{3}\pi(\frac{d}{2})^3k^3=\frac{(kd)^3\times\frac{4}{3}\pi(\frac{d}{2})^3}{d^3}$ 이므로 곧 지름의 세제곱과 구의 부피 정률의 곱을 정육면체의 부피 정률로 나누어 얻는다.

따라서 지름이 1자일 때 구의 부피인 구의 부피 정률을 알면 모든 구의 부피를 구할 수 있는 것이다. 여기에는 비에 대한 생각이 들어 있음을 알 수 있다. 그런데 이 정률을 어떻게 구했는지에 대한 정확한 언급은 없다. 다만 밀률 부분에 '<수리정온(數理精蘊, 1722)>에 구의 부피를 구할 때 먼저 원의 넓이를 구하고 여기에 지름을 곱하여 원기둥의 부피를 얻고 2배하고 3으로 나누어 이 새로운 비율을 얻는다([13, p.87]).' 고 하여 구의 부피가 외접 원기둥의 2/3라는 사실이 알려져 있었음이 분명하고, 마지막 부분에 '다시 고, 휘, 밀 세 가지의 비율을 생각해보면 서로 다르기 때문에 넓이도 역시 서로 다르고 그것을 써서 구의 부피를 구하면 유난히 오차가 크다. 마땅히 <수리정온>에 근거하여 먼저 원의 넓이를 구하고 여기에 지름을 곱하여 2배하고 3으로 나누는 법을 사용하고 아울러 제곱과 세제곱 및 비례를 정확히 사용하면 원의 넓이와 구의 부피가 명료하여 아무런 문제가 없다([13, p.90])'로 정리하고 있는 것으로부터 아마도 <수리정온>의 방법을 이용한 것으로 추측된다. 원주율 3에 국한된 조 부자의 공식이 아니다. 그러나 이와 같은 정확하고 일반적인 방법을 알고 있음에도 불구하고 몇 가지 정률을 구해놓고 이용한 이유를 파악하는 것 또한 쉽지 않다.

남병길(南秉吉, 1820-1869)은 <구장산술>을 주해한 책 <구장술해>에서 개입원술에 의해 구의 부피로부터 지름을 구하는 방법에 대해 다음과 같은 설명을 첨가한다.

16이란 것은 방률 4를 제곱한 수이다. 9란 것은 원율 3을 제곱한 수이다. 그 실제를 탐구하면, 지름 1에 둘레 3의 비율이라면 마땅히 부피의 2배를 실로 하여 세제곱근을 구하여 지름을 얻는다. 무릇 구의 겉넓이는 대원 넓이의 4배, 즉 정사각형 넓이의 3배이다. 또 이 겉넓이와 반지름을 곱하여 얻은 수를 3으로 나누면 구의 부피이다. 3과 1/2을 곱하면 즉 정육면체의 부피 1개 반이다. 또, 3으로 나누면 구의 부피는 반드시 정육면체 부피의 반이다. 따라서 부피의 2배를 실로 하여 세제곱근을 구한다([3, p.349]).

여기에는 많은 사실이 담겨있다. <구장산술> 방법에서 상수 9/16를 원과 외접정사각형의 넓이의 제곱비로 본 것, 실제 부피는 고법의 경우 $\frac{d^3}{2}$이므로 정육면체의 반이고 따라서 지름은 $\sqrt[3]{2V}$임을 파악한 것, 구의 겉넓이 $4\pi r^2$ 및 그것을 이용하여 구의 부피 구하는 방법 $\frac{4\pi r^3}{3}$ 등이다.

한편 <산학정의(算學正義)>에서 남병길은 다음 문제를 포함한다.

문제: 지금 원구(圓球)의 지름이 4자 5치 2분이다. 부피는 얼마인가?
답: 48자 351치 947분 약 ([4, p.156])

이에 대한 풀이는 지름과 원주율의 곱으로 둘레($2\pi r$)를 얻고, 다시 지름을 곱하여 겉넓이($4\pi r^2$)[13]를 얻고, 여기에 반지름을 곱하고 3으로 나누어 부피를 얻는다는 것이다. 식으로 나타내면 $\frac{2\pi r \times 2r \times r}{3}$, <구장술해>의 반복된 설명이다.

한편 별해로는 반지름과 원주의 반을 곱하여 원의 넓이를 얻고 이에 지름을 곱하여 원기둥[14]의 부피를 얻고 2를 곱하고 3으로 나누어 부피를 얻는다. 구가 외접원기둥의 2/3라는 관계를 파악한 결과이다.

더욱이 주목할 만한 것은 본 풀이를 뒷받침하기 위한 보충 설명인데, 구는 중심으로부터 백억 개의 첨체(尖體: 뿔)로 나눌 수 있다는 것이다. 구를 반지름이 높이이고 겉넓이를 무수히 많은 조각으로 쪼개어 밑면으로 하는 각뿔의 합의 극한으로 보는 관점이 적어도 조선 수학에서는 처음 등장하는 것으로 보인다.

13) 주해에서, 구의 겉넓이는 원래 지름이 같은 원넓이의 4배와 같은데, 반지름과 원주의 반의 곱이 원의 넓이이므로 지름과 원주의 곱은 넓이의 4배가 된다고 하였다.
14) '구체는 원래 입원체의 2/3이다'라고 주해를 덧붙였으며 남병길은 구를 구체, 원기둥을 입원체라 함을 알 수 있다.

3. 논의 및 교수학적 함의

이상과 같은 동서양의 구의 부피 발달사는 시기적, 도구적, 방법적인 측면에서 다양성을 보여준다. 그러나 일부 선행 연구에서 주목한 양자간의 차이는 원리의 구현상 구체적으로 드러난 차이일 뿐 동서양을 막론하고 구의 부피 계산을 가능하게 했던 공통의 아이디어는 입체도형을 무한소의 합으로 본 것이라 할 수 있다. 카발리에리나 조긍의 원리의 핵심 아이디어인, 입체를 2차원 평면 요소의 합으로 생각하는 것은 사실 아르키메데스의 평형법에도 들어있던 것이고 나아가 훗날의 미적분학의 탄생을 예고한 발상이다. 다만 구체적으로 사용한 입체에 차이가 있고 특히 동양의 경우, 모합방개라는 매개물의 등장이 독특하다.15)

본 고의 수학사적 고찰로부터 수학 및 수학교육의 관점에서 주목할만한 점은 다음과 같다. 첫째, 수학의 발달 과정이 수학 연구의 전개 사례를 보여준다. 수학적 개념의 형성과 수학적 탐구는 경험으로부터 출발하여 근사적 개념 및 공식을 얻고 다시 정확성을 추구하는 과정이다. 완성된 지식체로서의 수학관이 수학을 체계적이고 연역적으로 특성짓는 데 반해, 수학자의 발견 과정에서 발생하는 경험적, 귀납적, 역동적 특성의 수학을 학교 수학에서 경험시켜야 한다는 주장에 근거할 때 의미 있는 역사적 사례로 볼 수 있다. 아르키메데스가 구와 원뿔의 관계에 대한 발견과 증명을 구분한 경우가 그렇다. 또한 중국 수학사에서 경험에 기초한 형성, 기존의 지식과 가정에 기초한 설명, 포함된 근사적 수치에 대한 문제 제기, 새로운 모델의 고안, 새로운 공식의 발견이라는 절차는 지식이 점차적으로 정련되어가는 일련의 과정을 보여준다.

둘째, 그 과정에서 모델의 역할이 중요함을 보여준다. 중국 수학사에서 구의 부피를 찾는 과정에서 모합방개라는 모델의 역할은 필수적이었다. 셋째, 연구 흐름에 있어 관점 변화의 결과를 보여준다. 카발리에리 또는 유-조 원리의 기본 아이디어는 입체를 평면의 합으로 인식하는 데서 출발한다. 입체(3차원)를 다루면서 단면(2차원)에 주목함으로써 문제해결로 이끈 원리를 찾아낸 것이다. 이는 동서양 모두에서 공통된 주춧돌이었다. 동양의 경우, 모합방개를 만들 때 이용한 누인 원기둥의 단면이 직사각형이라는 사실이 단면 정사각형의 모합방개를 착안하는데 중요한 역할을 했을 것으로 추측되며, 중국 수학사에서 구의 부피와 관련한 주요 인물인 유휘, 조 부자 모두가 원주율의 더 나은 근사값을 마련하였다는 점은 그들이 구를 단면인 원의 합으로 간주하여 탐구하였을 가능성을 높인다. 넷째, 수학적 설명을 위해 다양한 접근 방식이 가능함을 시사한다. 그 다양성은 유사한 원리에 기초하지만 다른 모델을 취함으로써 서로 구별된 접근법을 보인 동서양 수학사를 비교함으로써 파악될 수 있다. 이는 오늘날 수학

15) 아르키메데스의 <방법론>에도 맨 마지막인 15번째 명제에서 '두 개의 원기둥에 의해 포함된 입체(곧, 동양의 모합방개에 해당)'의 부피가 정육면체의 2/3임을 증명하지만([21]), 이미 두 번째 명제에서 구한 구의 부피 공식과 연결시키지 못할 뿐만 아니라 실제로 구의 부피를 구하기 위한 매개 역할이 아니므로 연결될 필요도 없었다.

문제해결에 대한 접근의 다양성에 비견하여 탐구 과정 및 타당화의 다양성을 추구할 기회를 마련한다. 다섯째, 그러한 다양성 속에서 공통 기반이 발견된다. 바로 앞에서 유사한 원리라고 표현한 카발리에리, 유-조의 원리이다. 오늘날 중국 수학교과서([14])에서는 이 원리를 '조긍의 원리'라고 소개하고 있다. 여섯째, 특정 주제의 수학 발달사에 대한 전체적 안목을 제공한다. 미적분의 아이디어가 명시화된 것은 17세기이지만 그러한 생각의 태동은 이미 아르키메데스로부터 시작되고 있었던 것이다. 암묵적 사용기를 거쳐 정련된 아이디어가 수학적으로 명시화되는 과정을 보여준다.

이제 수학교육적 관점에서 접근해보자. 기성 수학과 아울러 실행 수학이라는 양면적 특성으로 인한 수학 인식론의 변화는 수학교육에서 수학사의 역할 및 중요성에 대해 적극적인 입장을 취하도록 한다. 심지어 Stowasser([29, p.494])는 수학교육의 새로운 접근이 필요함을 역설하면서 심리적 관점에서는 별로 기대할 것이 없고 인식론적 관점 및 역사적 자료가 훨씬 기대할만하다고 주장하기까지 하였다. 수학사는 교육과정의 내용을 의미 있는 방식으로 조직하기 위해 간단하지만 강력한 아이디어의 훌륭한 예로 충만하다는 것이 그 이유다. 이러한 극단적 주장은 지나치다 할지라도 적어도 학교 수학의 여러 주제에 대한 인식론적인 접근으로서 수학사적 관점에서 분석하고 교수학적 함의점을 도출하는 것은 수학교육학에서 매우 중요한 연구 분야로 가치가 있다고 생각한다.

본 연구에서 관심 있는 학교 수학의 주제는 구의 부피이다. Chang([16])은 국내외 16개국의 54종 교과서를 분석, 비교함으로써 구의 부피에 접근하는 방식을 크게 일곱 가지로 분류하였다: 실험, 카발리에리 원리의 적용, 소박한 미적분, 근사, 겉넓이에 기초한 극한, 수학사에 기초한 진술, 정당화 없는 진술. 이 중 가장 많이 채택된[16], 특히 우리나라 제7차 교육과정에 따른 수학 7-나의 16종 교과서 중에서도 역시 빈도수가 가장 높은 방법은 실험적 접근이다([6])[17]. 실험 접근은 수학적 타당성을 보장할 수는 없지만 학교 수학에서는 타당화의 차원에서도 의미를 지닐 수 있다. 또한 원기둥 또는 원뿔의 부피에 대한 지식과 측정 능력만을 요구하므로 쉽고 따라서 이른 시기에 학습 가능하다는 이점을 지닌다. 그러나 실험 접근은 오늘날 수학교육이 취하는 시각에 의해 지지된다는 사실에도 불구하고 시행과 관련한 문제점을 안고 있다. 교과서에 제시된 실험이 교육 현장에서는 실제로 시행되지 않는다는 점이다. 교육 현장에서 수학 실험으로 인한 번거로움을 감수할 만큼 실험 효과에 대한 인식 부족이 한 가지 이유가 될 수 있다. 일부 교과서 저자도 이 점을 의식한 듯, 탐구 활동이나 문제 활동을 통해 전개되는 실험 상황에서 활동 전개가 의문 또는 청유형으로 제시된 것이 있는

16) 54종 교과서의 유형별 빈도수는 다음과 같다(괄호안의 수가 그 방법을 채택한 교과서의 수이다. 한 교과서가 2종 이상의 방법을 사용한 경우, 중복하여 세어지므로 그 합은 54를 넘는다): 실험(31), 카발리에리(12), 소박한 미적분(2), 근사(1), 겉넓이에 기초한 극한(6), 수학사에 기초한 진술(4), 정당화 없는 진술(5).

17) 실험 접근은 어느 도형으로, 어느 부분을 측정하는가에 따라 다시 다섯 종류로 구분될 수 있다([16]).

반면, '‥로 알려져 있다'나 '‥이다'와 같은 표현을 써서 간접 실험 또는 대체 실험을 의도한 것도 있다. 수학적 타당성을 결여한 실험이 학교 수학에서 위상을 차지하기 위해서는 단순한 절차의 진술 또는 생략이 아니라 실제로 시행되어야 하며 따라서 교과서에는 실험 절차에 대한 상술이 포함되어야 한다. 그리고 그 과정에서 가능한 정확하게 측정함으로써만 구하는 결과를 얻을 수 있음이 강조되어야 하는 것이다. 즉 정확한 실험 절차의 단순 소개가 아니라 실험 시행에 근거한 근사값으로부터 정확한 값으로의 추론을 통한 학습이 되어야 하는 것이다. 이와 같은 교수 실제상의 문제점을 지닌 실험 접근에 대한 대안으로서 수학사에 근거하여 구의 부피 계산에 접근하는 방식을 생각해보자.

본 고의 고찰에 기초하여 수학사적 사실에 근거한 교과서를 구성한다면 아르키메데스의 평형법, 카발리에리 또는 유-조의 원리에 기초한 접근, 모합방개 모형을 이용한 접근, 케플러식 접근 등을 생각해볼 수 있다. 케플러의 방식은 역사발생적 원리에 입각한 기하 교재를 집필하며 Clairaut([17])가 이용한 방법이고, 구의 부피로부터 겉넓이를 구할 때 우리나라 현행 교과서에서도 종종 사용되고 있다.

이 중 구의 부피 지도에 대한 대안을 마련하기 위해 카발리에리 또는 유-조의 원리를 선택하고자 한다. 이 원리는 동서양 수학사를 막론하고 구의 부피 계산의 모태가 되는 공통 아이디어이자 입체도형의 부피에 관한 한 일반적으로 적용 가능한 기하 영역의 기본 아이디어라 할 수 있으며, 훗날 다루어질 미적분학과도 연계되어 수학적 전개 및 연결성을 보여준다는 의미에서 강력한 아이디어라 할 수 있다.

이 원리에 근거한 교재 및 수업 구성을 가정한다면 시기적으로는 현재의 7단계보다 더 높은 단계가 되어야 할 것이다. 피타고라스의 정리, 닮음, 근호 등이 선수 지식으로 이용되기 때문이다. 그리고 한국교육과정평가원([10])의 연구 보고에서도 드러나듯이 동일 내용에 대해 외국 교과서가 우리나라보다 더 늦은 단계에서 도입되는 경향을 감안할 때 접근 방법이 더 어렵다고 판단되는 대안 채택시 당연한 고려일 것이다.

첫 단계로서 차시 도입부에 아르키메데스의 평형법 그림과 모합방개 모형 등을 소개하여 수학사 속에서 구의 부피가 다양하게 다루어졌음을 소개하고 동기 유발한다. 오늘날의 공식을 얻기까지 다양한 생각과 모델이 창출되었음을 아는 것은 그 모델로 인한 정확한 계산법은 생략되더라도 충분한 가치가 있다.

둘째 단계에서 카발리에리 또는 유-조의 원리를 직관적으로 도입한다. '직관적'이라 함은 증명을 생략한 채 계산에 이용할 수 있을 정도의 이해를 의도한 것이다. 실물이나 사진 자료(그림 7)를 이용하여 두께를 무시할 정도의 얇은 조각판을 쌓을 때 입체의 모양은 다양하게 변해도 부피는 일정하다는 사실을 파악하도록 하는 것이다.

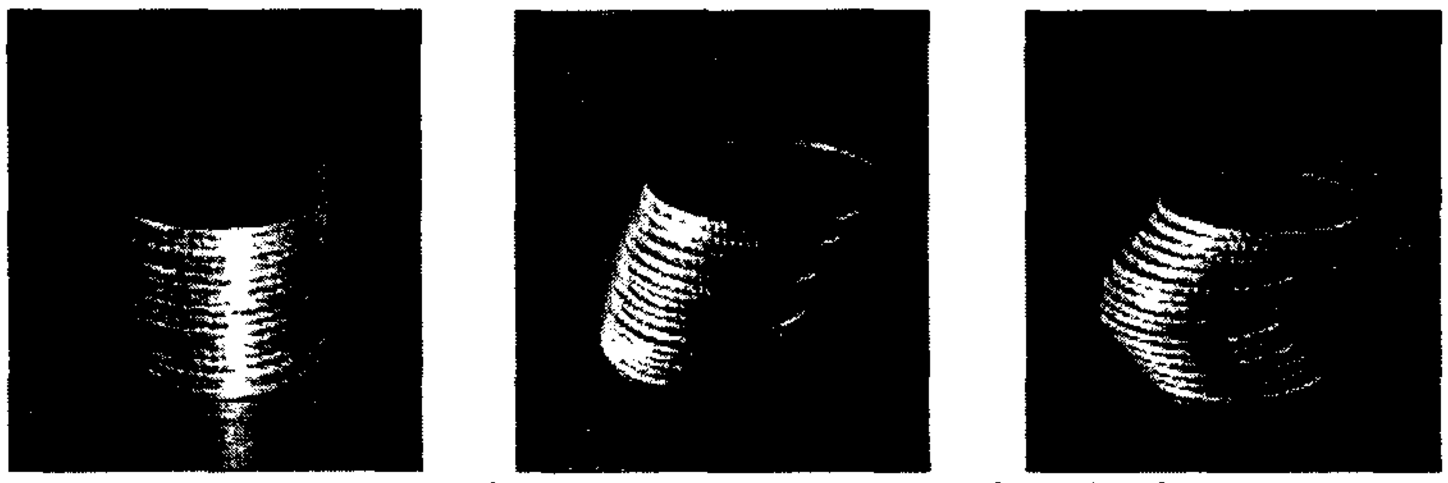
이러한 직관적 이해를 바탕으로 다음의 정리를 제안한다.

정리 : 두 입체가 다음 성질을 갖는다면 두 입체의 부피는 같다.

1) 밑면의 넓이가 같다

2) 높이가 같다

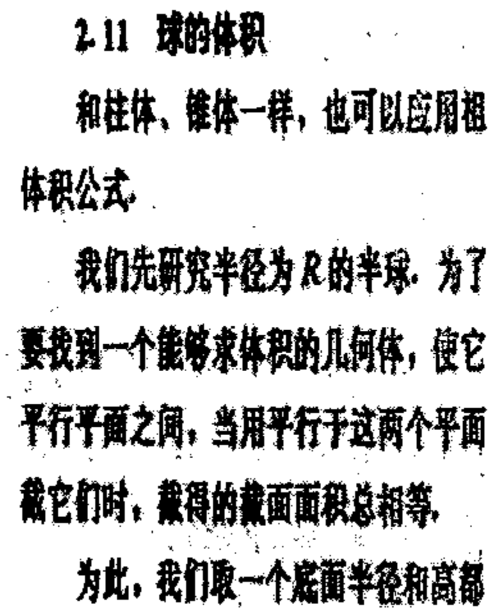
3) 밑면에 평행이고 같은 거리에 있는 단면의 넓이가 같다.



[그림 7] 카발리에리 원리에 대한 직관적 파악

셋째는 부피를 이미 알고 있는 입체도형과 관련지어 어림해보는 단계이다. 이때 이용할 입체는 반구와 외접원기둥 및 내접원뿔이다. 이 그림을 통해 반구의 부피가 원기둥과 원뿔의 사이임을 직관적으로 알 수 있다. 따라서 반구의 부피는 $\frac{1}{3}\pi r^3$과 πr^3 사이의 어떤 값으로 대략적인 어림이 가능하다. 가장 쉽게 떠오르는 어림이 가운데 값인데, 그것이 결국 참값인 것을 다음 단계에서 확인할 것이다. 이러한 어림은 구의 측도에 대한 양감을 경험함으로써 계수의 단순 암기를 지양하고자 함이다.

넷째 단계에서는 둘째 단계에서 도입한 원리를 적절한 입체도형에 적용하여 구의 부피를 계산한다. 구체적으로 이용할 그림으로 외국 교과서의 사례를 참조할만하다. [그림 8]의 왼쪽은 반구와 (그 외접원기둥-원뿔)을 고려한 반면, 오른쪽은 구와 (그 외접원기둥-두 개의 원뿔)을 고려하였다. 어느 경우든 중심 O로부터의 높이 h인 지점에서의 단면을 생각한다. 한 입체의 단면은 원이고 다른 입체의 단면은 환형인데, 원기둥의 단면에서 원뿔의 단면을 뺀 것이다.



2.11 球的体积

和柱体、锥体一样，也可以应用祖

体积公式.

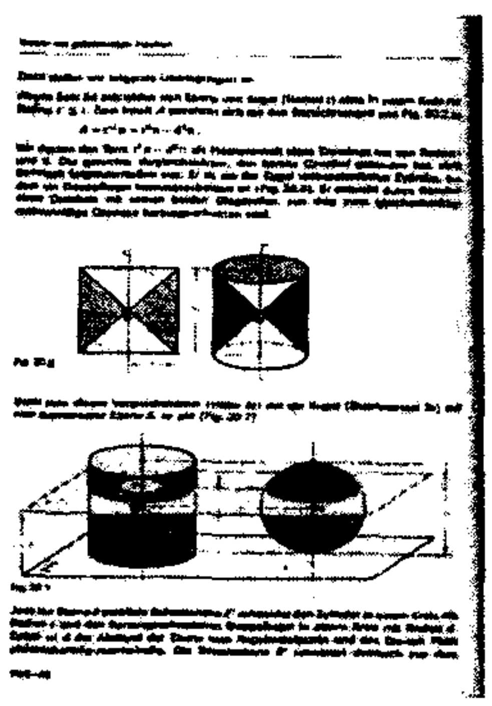
我们先研究半径为R的半球. 为了

要找到一个能够求体积的几何体，使它

平行平面之间，当用平行于这两个平面

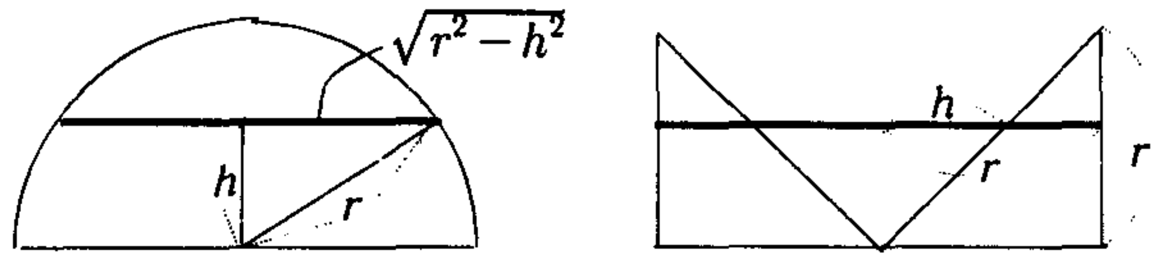
截它们时，截得的截面面积总相等.

为此，我们取一个底面半径和高都



[그림 8] 중국([14])과 독일([18])의 교과서 사례

이제 각 단면의 넓이를 구해야 하는데 수직 단면의 그림(그림 9)을 제시함으로써 필요한 길이를 파악하는 데 도움을 준다. 이 때 피타고라스의 정리 및 닮은 삼각형의 성질 등을 이용한 설명이 부가되어야 한다.



[그림 9] 두 입체의 수직 단면

길이를 파악하고 나면, 각 단면의 넓이는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$S_{원}=\pi(r^2-h^2), \qquad S_{환형}=\pi r^2-\pi h^2$$

여기서 양쪽 입체의 단면의 넓이가 같고 h는 임의의 높이이므로 카발리에리 또는 유-조의 원리에 의해 두 입체의 부피는 같음을 발견한다. 따라서 이용한 그림에 따라 다음과 같은 두 가지 경우 중 한 방법에 의해 구의 부피를 얻는다.

$$\frac{V_{구}}{2}=V_{원기둥}-V_{원뿔}=\pi r^3-\frac{1}{3}\pi r^3=\frac{2}{3}\pi r^3\text{이므로 } V_{구}=\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V_{구}=V_{원기둥}-2V_{원뿔}=2\pi r^3-2\cdot\frac{1}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi r^3$$

끝으로, 구한 공식은 π를 3으로 본다면 조긍이 구한 측도인 $\frac{(2r)^3}{2}$이 되어 대략적으로 구의 지름을 한 모서리로 하는 외접정육면체의 부피의 반에 해당함을 설명함으로써 구의 부피에 대한 양감을 재확인하도록 한다.

이상에서 대략적으로 묘사한 카발리에리 또는 유-조 원리에 기초한 접근의 이점은 도형의 성질 및 정리를 이용한 순수 기하적 접근이 지닌 명료함이며 그 외에 일반성을 들 수 있다. 구체적으로 교육과정에서 다루는 기둥이나 뿔 등의 입체도형은 말할 것도 없고, 교육과정에서 다루지 않는 입체도형인 빗원뿔이나 빗각뿔, 빗원기둥이나 빗각기둥에 대해서도 같은 것을 말할 수 있기 때문이다. 서양 중심의 전개에 기인한 카발리에리 원리, 중국 교과서에 있듯이 조긍의 원리, Shen([26])이 부르듯 유-조의 원리 등 이름을 선택하는 것은 그 다음 일일 것이다.

참고 문헌

1. ?(?). ***東算抄***. 한국과학기술사자료대계 수학편 8. 여강출판사.
2. 경선징, ***默思集筭法***. 유인영, 허민 역(2006). 묵사집산법 (천). 교우사. 17c.
3. 남병길, ***九章術解***. 한국과학기술사자료대계 수학편 6. 여강출판사. 19c.
4. 남병길, ***算學正義***. 한국과학기술사자료대계 수학편 7. 여강출판사. 19c.
5. 서성보, 아르키메데스의 求積에 관하여. 과학교육연구 15. 1990.

6. 이민규, 제7차 교육과정에 의한 중학교 수학 교과서의 참신성과 독창성에 대한 비판적 고찰 : 입체도형의 부피와 겉넓이를 중심으로, 단국대학교 교육대학원 석사학위논문, 2003.
7. 이정연, 조각원리와 카발리에리의 원리를 이용한 넓이와 부피에 대한 연구. 성균관대학교 교육대학원 석사학위논문, 2003.
8. 장혜원, 중국 및 조선시대 산학서에 나타난 원주율과 원의 넓이에 대한 고찰. 한국수학사학회지 16(1) (2003). 9-16.
9. 조정수, 아르키메데스의 <구와 원기둥에 관하여>에 대한 고찰. 한국수학사학회지 19(3) (2006). 95-112.
10. 한국교육과정평가원, 수학과 교육내용적정성 분석 및 평가. 연구보고 RRC 2004-1-5(2004).
11. 홍대용, ***籌解需用***. 한국과학기술사자료대계 수학편 3. 여강출판사. 18c.
12. 홍정하, ***九一集***. 강신원, 장혜원 역(2006). 구일집(천), 구일집(지). 교우사. 17c.
13. 황윤석, ***算學本源***. 강신원, 장혜원 역(2006). 산학본원. 교우사, 1774.
14. 人民敎育出版社數學室, ***立体几何*** 全一冊(必修), 2001.
15. 郭書春, ***九章算術***. 遼寧敎育出版社, 1990.
16. Chang, H. W., ***The volume of a sphere in school mathematics***. Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol.1(2007).
17. Clairaut, A., ***Element de geometrie***. 1746. 장혜원 역. 클레로의 기하학 원론. 경문사. 2005.
18. Feuerlein, R., Kratz, J., Schweiger, K., Titze, H., Walter, H., ***Mathematik 10*** *Schuljahr*. BSV. 1987.
19. Fu, D., ***Why did Liu Hui fail to derive the volume of a sphere?***, Historia Mathematica 18(1991). 212-238.
20. Grande, J. D. ***The method of Archimedes***. The Mathematics Teacher, 86(3). (1993). 240-243.
21. Heath, T. L., ***The Works of Archimedes***. Dover Publications. 2002.
22. Kiang, T., ***An old chinese way on finding the volume of a sphere***. The Mathematical gazette. 56(2) (1972).
23. Man, Y.K., Lo Y.K., ***On Computing The Volume of Sphere in The East and West***: A Comparative Study from The Educational Perspectives. Hiroshima Journal of Mathematics Education 10(2002), 1-9.
24. NCTM, ***Historical Topics for the Mathematics Classroom***. NCTM. 1989.
25. Polya, G., ***Mathematics and Plausible Reasoning***. vol.1. Princeton University Press. 1990. 이만근 외 역. 수학과 개연추론. 교우사. 2002.

26. Shen, K., Crossley J. N., Lun A.W.C., ***The Nine Chapters on the Mathematical Art.*** Oxford university press. 1999.
27. Smith, D. E., ***History of Mathematics,*** Vol.2. Dover. 1923.
28. Stein, S., *Archimedes*: ***What Did He Do Besides Cry Eureka?***, Mathematical Association of America. 1999.
29. Stowasser, R.J.K. ***Organizing for the Classroom Ideas Drawn from the History of Mathematics***. In Wirszup, I., Streit, R.(ed), Developments in School Mathematics Education around the World, NCTM. 1985.
30. Swetz, F. ***The Method of Archimedes. From Five Fingers to Infinity***. 180-181. Open Court. 1994.
31. Swetz, F.. ***The Volume of a Sphere***: a chinese derivation. The Mathematics teacher. vol.88 no.2. NCTM. 1995.
32. http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookXII/bookXII.html

Study on the Volume of a Sphere in the Historical Perspective and its Didactical Implications

Dept. of Math. Education, Chinju National University of Education **Hye-won Chang**

This study aims to investigate the evolution of calculating the volume of a sphere in eastern and western mathematical history. In western case, Archimedes', Cavalieri's and Kepler's approaches, and in eastern case, Nine Chapters', Liu Hui's and Zus' approaches are worthy of noting. The common idea of most of these approaches is the infinitesimal concept corresponding to Cavalieri's or Liu-Zu's principle which would developed to the basic idea of Calculus.

So this study proposes an alternative to organization of math-textbooks or instructional procedures for teaching the volume of a sphere based on the principle.

Key words : volume, sphere, Archimedes, Cavalieri, Kepler, mouhefanggai(joined umbrellas), Liu Hui, Zu Chongzhi, Zu Geng, Chosun

2000 Mathematical Subject Classification : 01A13, 01A20, 01A25, 51M25, 97-03, 97C90

접수일 : 2008년 3월 25일 수정일 : 2008년 4월 25일 게재확정일 : 2008년 5월 6일