

사각형 노치에 대한 램파의 다중 모드 반사와 투과 계수 해석

Analysis of Multi-Mode Reflection and Transmission Coefficients of a Lamb Wave Across a Rectangular Notch

김 병 수*, 노 용 래*
Byungsoo Kim*, Yongrae Roh*

*경북대학교 기계공학과

(접수일자: 2007년 12월 20일; 수정일자: 2008년 3월 13일; 채택일자: 2008년 3월 31일)

본 논문의 목적은 탄성판 내에서 진행하는 기본형 램파 모드인 S_0 , A_0 모드가 사각형 노치에 의해 산란되었을 때, 노치의 2차원 형상에 따른 각 파의 반사계수와 투과계수를 구하는데 있다. 먼저 노치가 있는 부분의 평판의 두께 변화에 따라 노치 부위에 발생 가능한 램파 모드의 변화를 고찰하고, 노치 부위의 경계면 형상과 노치 내부에서 진행되는 입사파의 방향에 따라, 노치에 의한 전체 산란 현상을 3가지의 독립된 산란 프로세스로 구분하였다. 그리고 각 프로세스의 경계면에 자유 경계조건과 연속조건을 적용하여 각 프로세스에서 발생된 산란파의 투과 및 반사 계수를 구하였다. 나아가 중첩의 원리를 이용하여 각 프로세스의 산란파를 모드별로 합산하고, 사각형 노치의 폭과 깊이의 변화에 따른 입력파의 에너지 플럭스의 합과 반사 및 투과파의 에너지 플럭스의 합의 차이가 최대 4%에 들도록 하는 정상상태에서의 반사 및 투과계수를 구하고 분석하였다.

핵심용어: 램파, 투과계수, 반사계수, 산란, 탄성파

투고분야: 초음파 및 탄성파 분야 (4.4)

The purpose of the present work is to derive the reflection and transmission coefficients of S_0 and A_0 mode Lamb waves in relation to the geometry of a rectangular notch when the waves propagate across the notch in an elastic plate. Firstly, the excitable modes of the Lamb wave were analyzed with respect to the plate thickness. The scattering phenomena were divided into three independent processes according to the boundary shape of the notch and the direction of the wave propagation. Linear equations for each process were derived with corresponding free or continuous boundary conditions to analyze the scattered waves. By the rule of linear superposition, the waves scattered at each process were summed for each mode. Then the steady-state reflection and transmission coefficients of the scattered waves were determined so that the difference of energy flux between the incident and the scattered waves would remain within 4%.

Keywords: Lamb, Transmission coefficient, Reflection coefficient, Scattering, Elastic Waves.

ASK subject classification: Ultrasonic and Elastic Waves (4.4)

I. 서론

판 내부의 결함을 측정하는데 있어서 흔히 사용되는 초음파 기법은 사용되는 주파수와 판의 두께의 곱이 상대적으로 높은 영역에서 사용되어지는 표면파 (Surface Waves) 검사법과 그 곱이 상대적으로 낮은 램파 (Lamb

Waves) 검사법으로 분류되어질 수 있다. 표면파는 얇은 깊이에서 표면의 균열을 감지하는데 용이하고, 램파는 상대적으로 넓은 범위에서 판의 전 두께 방향으로 손상부를 탐지하는데 이용된다. 이러한 특성 때문에 램파의 손상부에서의 산란에 대한 연구가 많이 진행되어져 왔다 [1-4]. 특히, 판 내부에 있는 2차원 형상의 노치에 의한 램파의 모드변환 현상은 최근 유한요소법 (FEM)에 의한 방법 [5-7]과 경계요소법 (BEM)에 의한 방법[8,9]으로 연구되고 있다. 본 연구에서는 상대적으로 두꺼운 판 내부

를 진행하는 파가 판의 두께가 갑자기 얇아지는 노치의 경계면을 만날 때 발생하는 모드변환을 Nielsen [10], Lakhtakia [11,12] 그리고 Wang [13]에 의해 사용된 모드 매칭 기술을 이용하여 해석하였고, 그 결과로서 사각형 노치의 폭과 깊이의 변화에 따른 투과 계수와 반사 계수를 구함으로써 2차원 형상의 손상부에 의한 램파의 산란 현상을 분석하고자 하였다.

사각형 노치의 경우에 노치의 첫 번째 경계면을 통과하는 투과파는 이후 노치의 양 경계면에서 끊임없는 산란을 일으키며, 판의 양 수평 방향으로 반사파와 투과파를 발생시킨다. 본 논문에서는 이러한 연속적이며 반복적인 산란 프로세스를 노치의 경계면 형상과 그 경계면에 입사되는 파의 방향에 따라 서로 다른 독립적인 3가지의 프로세스로 구분하였다. 각 프로세스의 경계면에 자유조건과 연속조건을 적용해 각 프로세스에 해당하는 선형연립방정식을 구하였고, 표준화 과정을 통하여 각 프로세스의 투과 및 반사계수를 도출하였다. 나아가 중첩의 원리를 이용해 각 프로세스에서 판의 양 수평방향으로 발생하는 반사 및 투과 계수를 파의 진행방향에 따라 분류하고 합산함으로써, 정상상태의 반사 및 투과 계수를 계산하였다. 해석에서는 노치 부위에서의 산란 현상을 단순화하기 위해 주어진 판의 두께에 대해 단지 기본형 대칭, 비대칭 전송파인 S_0 , A_0 모드만을 발생시키는 낮은 주파수를 설정하였다. 해석 예로서 100 kHz의 주파수에서 두께 5 mm인 알루미늄 판에 대해 노치부의 판의 두께를 총 8가지 경우로 0.5 mm 간격으로 분할하였고, 노치의 폭을 총 9가지 경우로 2 mm 간격으로 분할하여 각 경우에 해당하는 램파의 투과 및 반사계수를 도출함으로써, 본 논문에서 연구된 해석 기법의 적용 가능성을 확인하였다.

II. 판의 두께변화에 따른 램파 모드의 변화

양면이 자유면이고 두께가 얇은 균질한 탄성판에 있어서, 발생 가능한 모드는 아래의 Rayleigh-Lamb식에 의해 구할 수 있다 [13].

$$\frac{\tan(\alpha_n h/2)}{\tan(\beta_n h/2)} = - \left(\frac{(k_n^2 - \beta_n^2)^2}{4k_n^2 \alpha_n \beta_n} \right)^{\pm 1}$$

$$\alpha_n = \sqrt{(\omega/c_l)^2 - k_n^2}$$

$$\beta_n = \sqrt{(\omega/c_t)^2 - k_n^2}$$
(1)

여기서 ω 는 $2\pi f$, f 는 주파수, k_n 는 파수, c_l 는 종파의 속도, c_t 는 횡파의 속도, h 는 판의 두께를 나타내고, n 은 자연수로서 발생가능한 모든 파수들의 순번을 나타내며, 지수 +1과 -1은 각각 대칭모드와 비대칭모드를 의미한다. 파수의 형태는 실수, 허수 그리고 복소수일 수 있다. 허수와 복소 모드는 실제로 에너지를 전송하지는 못하며, 산란이 발생하는 경계면 부근에서만 존재하고 거리가 증가할수록 급격히 감소하는데, 이러한 모드를 비전파 모드라 한다 [14]. 이러한 비전파 모드는 에너지를 전송할 수는 없지만, 램파의 산란현상 해석에서 경계조건을 만족시키기 위해서 반드시 고려해 주어야 한다 [2]. 파수가 오직 실수만을 가지는 모드는 전파 모드라 하고 에너지를 전파하며 S_0 와 A_0 가 이에 속한다.

램파의 모드는 재료의 물성치가 고정되면 주파수와 판 두께의 함수로 표현되며, 주파수를 고정시킬 경우 발생가능한 램파 모드는 판의 두께 변화에 의해 결정된다. 일례로서, 알루미늄 판에 대하여 대칭파와 비대칭파 두 가지 경우로 나누어 판의 두께에 따라 발생가능한 파수를 식 (1)에 의해 구하여 그림으로 나타내면 그림 1과 같다. 그림 1은 주파수를 100 kHz에 고정시켰을 때 판의 두께가 1 mm, 1.5 mm, 2 mm인 세 가지의 경우에 대하여 알루미늄 판 내부에서 발생가능한 대칭과 비대칭모드를 나타낸 것이다. 주파수가 100 kHz 일 때 대칭모드와 비대칭모드는 모두 하나의 양의 실수 근과 무한개의 복소수 근을 가지지만, 허수근은 오직 비대칭모드에서만 존재하고 판의 두께에 따라 각각 양과 음의 근을 하나의 쌍으로 가지는 특징을 보인다. 판의 두께가 감소함에 따라 대칭모드의 실수근의 크기는 작아지고, 비대칭모드의 실수근의 크기는 커진다. 그리고 비대칭모드의 허수근의 크기는 판의 두께 감소에 따라서 커진다. 그림 1의 (a)와 (b)를 보면, 대칭 및 비대칭모드의 복소 파수는 판의 두께 감소에 따라 인접한 복소 파수들 사이의 간격이 커지는 현상을 볼 수 있다. 그리고 허수부를 갖는 파수는 허수부의 부호와 파의 진행방향의 부호의 곱에 따라 파의 진폭의 크기를 발산 또는 수렴하게 하는데, 물리적 의미를 갖는 것은 수렴하는 경우이므로 산란 해석 시 파의 진행 방향에 따라서 진폭이 수렴하도록 파수의 허수부분의 부호를 신중히 선택해야 한다.

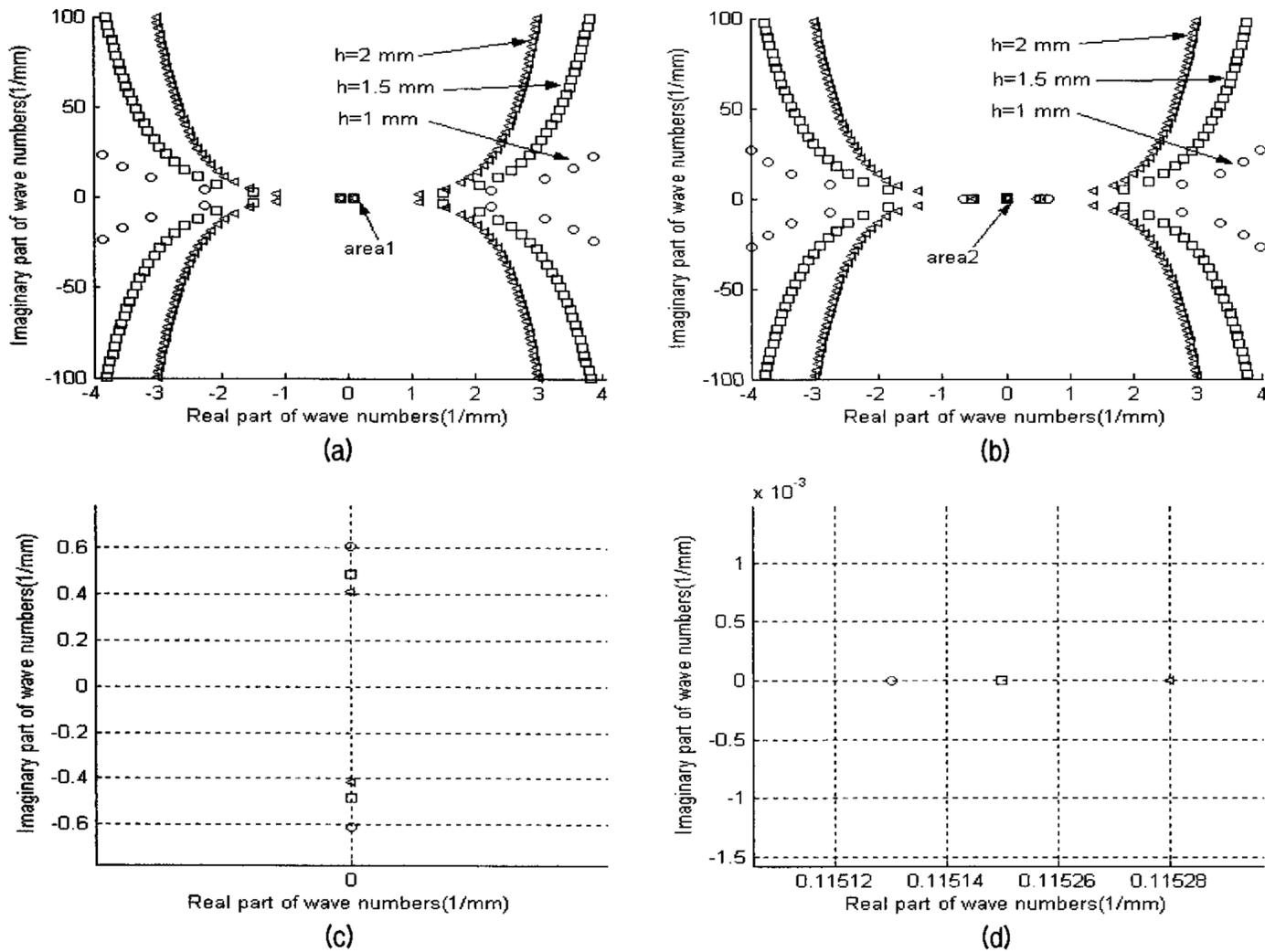


그림 1. 판의 두께변화에 따른 파수의 변화: ○ $h=1$ mm, □ $h=1.5$ mm, △ $h=2$ mm, $f=100$ kHz, $c_l=6400$ m/s, $c_t=3170$ m/s
 (a) 대칭모드의 파수 (b) 비대칭모드 파수 (c) area 1의 확대 (d) area 2의 확대

Fig. 1. Variation of the wave number with the plate thickness (h): ○ $h=1$ mm, □ $h=1.5$ mm, △ $h=2$ mm, $f=100$ kHz, $c_l=6400$ m/s, $c_t=3170$ m/s (a) symmetric mode (b) anti-symmetric mode (c) enlargement of area 1 (d) enlargement of area 2.

III. 산란 미케니즘

두께가 H 인 판에서 폭 g , 깊이가 d 인 사각형 노치에 의한 입사의 입사파 (W_i)의 산란을 그림 2를 이용해 개략적으로 설명하면 다음과 같다. 입사파 (W_i)가 R_1 영역에서 $+x$ 방향으로 진행하다가 I_1, I_2 경계를 만나면 산란되고, 일부 에너지는 $-x$ 방향으로 반사되어 첫 번째 반사파를 만든다. 일부는 R_2 영역을 지나 I_3, I_4 경계에서 산란되

어 일부 에너지는 첫 번째 투과파가 되고, 나머지 에너지는 반사파가 되어 다시 R_2 영역을 지나 I_1, I_2 경계에서 산란된다. 산란파 에너지의 일부는 다시 투과되어 두 번째 반사파가 되고 나머지 에너지는 반사되어 위와 같은 일련의 과정을 되풀이함으로써, 최종적으로 R_2 영역 내에서 끊임없이 에너지를 양쪽 경계면을 통하여 전달한다.

이러한 산란 과정은 경계면의 형상에 따라 입력파 (W_i)에 의해 투과파 (W_t)와 반사파 (W_r)를 만들어내는

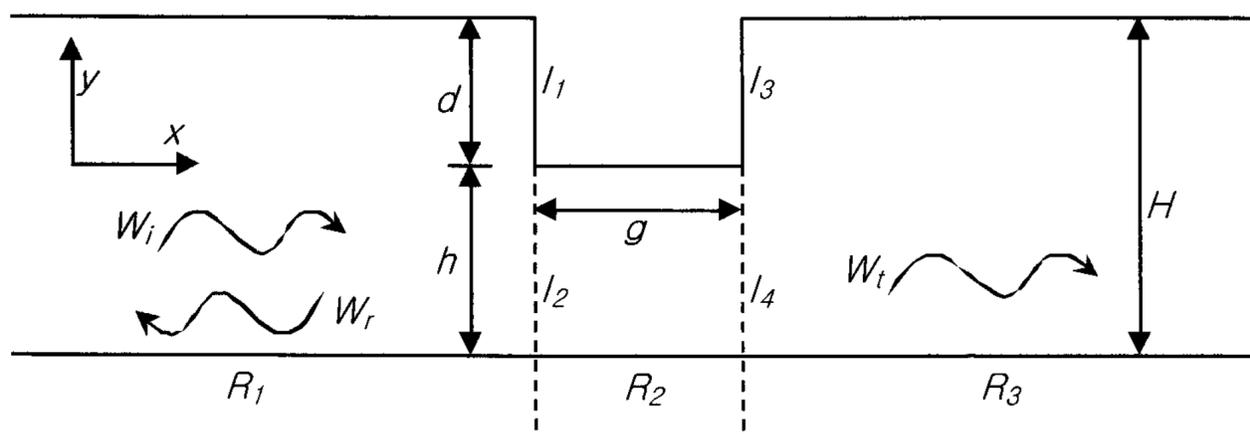


그림 2. 판 내부의 사각형 노치의 형상: $H=5$ mm
 Fig. 2. The geometry of a rectangular notch in a plate: $H=5$ mm.

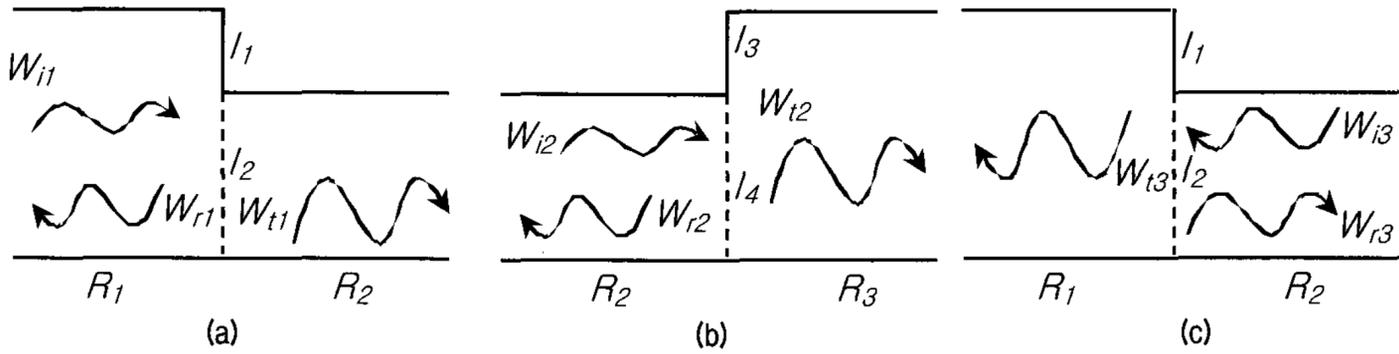


그림 3. 산란 미케니즘: (a) 프로세스 1, (b) 프로세스 2, (c) 프로세스 3
 Fig. 3. The scattering mechanism: (a) process 1, (b) process 2, (c) process 3.

그림 3의 세 가지 독립된 프로세스로 구분되어질 수 있다. 그림에서 W 의 두 번째 아래첨자는 각 프로세스를 나타내는데, 프로세스 1은 W_{i1} 이 경계면 I_1, I_2 로 $+x$ 방향으로 입사되는 경우이고, 프로세스 2는 W_{i2} 가 $+x$ 방향으로 I_3, I_4 경계면에 입사되는 경우이며, 프로세스 3은 W_{i3} 가 경계면 I_1, I_2 에 $-x$ 방향으로 입사되는 경우이다. 한 사이클을 R_1 영역과 R_3 영역에서 반사파와 투과파를 각각 한번씩 생성하는 것으로 정의하면, 첫번째 사이클은 프로세스 1에서 프로세스 2로 구성되고, 그 이후의 사이클은 프로세스 3에서 프로세스 2로 구성된다.

IV. 각 프로세스에 대한 선형연립방정식

4.1. 램파의 표준화

두께가 같은 R_1 영역과 R_3 영역에서 입사파에 대한 산란파의 투과계수와 반사계수를 계산하기 위해서는 각 영역을 전파하는 램파를 표준화하는 작업이 필요하다 [13]. 우선 판 내에서 발생 가능한 전파 및 비전파 모드 중 n 번째 램파 모드인 W_n 의 수평 (u^n), 수직 (v^n) 방향의 변위와 수평 (σ^n), 수직 (τ^n) 방향의 응력은 각각 아래와 같이 표현될 수 있다 [15].

$$\begin{aligned} u^n &= U_n(k_n, y)e^{i(k_n x - \omega t)} \\ v^n &= V_n(k_n, y)e^{i(k_n x - \omega t)} \\ \sigma^n &= S_n(k_n, y)e^{i(k_n x - \omega t)} \\ \tau^n &= T_n(k_n, y)e^{i(k_n x - \omega t)} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, $U_n(k_n, y), V_n(k_n, y), S_n(k_n, y), T_n(k_n, y)$ 은 각각 수평, 수직 방향의 변위와 응력의 모달함수(modal function)를 나타낸다. 이러한 모달함수들을 표준화하기 위해 W_n 의 파워를 의미하는 C_n^2 을 소개하면 식 (3)과 같

다 [15,16].

$$\begin{aligned} C_n^2 &= \frac{i\omega}{4} \int_{-h/2}^{h/2} [U_n(k_n, y)S_n^*(k_n^*, y) + V_n(k_n, y)T_n^*(k_n^*, y)] \\ &\quad - [S_n(k_n, y)U_n^*(k_n^*, y) + T_n(k_n, y)V_n^*(k_n^*, y)] dy \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 위 첨자 별표는 켈레 복소수를 의미하고, k_n 의 허수부가 존재하는 비전파 모드는 k_n^* 을 가지는 파와 함께 진행하면 비록 비전파 모드이지만 에너지를 전파할 수 있다. 그러나 파수 k_n 과 k_n^* 의 허수부는 서로 반대 방향이므로 두 파수에 해당되는 파 중 하나는 거리의 증가에 따라 발산하게 된다. 하지만 물리적으로 발산되는 파는 있을 수 없으므로, 허수부를 가지는 파수 k_n 은 에너지를 전파할 수는 없지만 단지 비전파 모드의 투과 및 반사 계수를 계산하기 위해 k_n^* 을 고려해준다면 C_n^2 의 의미는 비록 현실적으로는 불가능하지만 파수 k_n 과 k_n^* 을 각각 가지는 2개의 파들이 함께 진행할 때의 가상의 파워를 의미한다. 그러나 k_n 이 허수부를 가지지 않을 때의 C_n^2 의 물리적 의미는 W_n 의 실제 파워를 의미한다 [16].

C_n 으로 W_n 을 나누어주면 표준화된 램파인 \overline{W}_n 을 구할 수 있고, \overline{W}_n 의 각각의 변위, 응력 그리고 표준 모달함수는 식 (4)와 같다.

$$\begin{aligned} \overline{u}^n &= \overline{U}_n(k_n, y)e^{i(k_n x - \omega t)}, \quad \overline{U}_n(k_n, y) = U_n(k_n, y)/C_n \\ \overline{v}^n &= \overline{V}_n(k_n, y)e^{i(k_n x - \omega t)}, \quad \overline{V}_n(k_n, y) = V_n(k_n, y)/C_n \\ \overline{\sigma}^n &= \overline{S}_n(k_n, y)e^{i(k_n x - \omega t)}, \quad \overline{S}_n(k_n, y) = S_n(k_n, y)/C_n \\ \overline{\tau}^n &= \overline{T}_n(k_n, y)e^{i(k_n x - \omega t)}, \quad \overline{T}_n(k_n, y) = T_n(k_n, y)/C_n \end{aligned} \quad (4)$$

n 번째 램파 모드를 식 (4)에서 구한 표준 모달함수로 나타내면 W_n 의 진폭인 D_n 과 표준 모달함수의 곱으로 표현되어 식 (5)와 같이 된다 [13].

$$\begin{aligned} \widehat{u}^n &= D_n \overline{U}_n(k_n, y) e^{i(k_n x - \omega t)} \\ \widehat{v}^n &= D_n \overline{V}_n(k_n, y) e^{i(k_n x - \omega t)} \\ \widehat{\sigma}^n &= D_n \overline{S}_n(k_n, y) e^{i(k_n x - \omega t)} \\ \widehat{\tau}^n &= D_n \overline{T}_n(k_n, y) e^{i(k_n x - \omega t)} \end{aligned} \quad (5)$$

식 (5)에서 W_n 의 파워는 D_n^2 이 된다. 그러므로 투과계수와 반사계수는 단순히 입사파와 산란파의 진폭비로 표현되어질 수 있으며, 만약 단위 파워 플럭스를 가지는 전파모드의 입력파가 노치에 의해 산란될 경우, 그에 의한 산란파의 투과계수와 반사계수는 각 산란파의 진폭과 일치하게 된다.

4.2 각 프로세스에 대한 선형 연립방정식과 투과 및 반사계수

각 프로세스의 입사파 (W_i)와 반사파 (W_r), 투과파 (W_t)에 대한 선형연립방정식은 경계면 I_1, I_3 에 자유 경계조건을 적용하고, 경계면 I_2, I_4 에 변위와 응력에 대한 연속조건을 적용하여 구할 수 있다. 순번이 n 인 램파의 대칭모드의 수평 및 수직 방향의 변위와 응력을 $u_s^n, v_s^n, \sigma_s^n, \tau_s^n$ 으로 표기하고, 비대칭모드의 수평 및 수직 방향의 변위와 응력을 각각 $u_a^n, v_a^n, \sigma_a^n, \tau_a^n$ 와 같이 표기하면, 판에서 진행하는 임의의 램파는 중첩의 원리에 의해 모든 전파 및 비전파 모드의 합으로 식 (6)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} u_t &= \sum_{n=0}^{\infty} u_s^n + \sum_{n=0}^{\infty} u_a^n \\ v_t &= \sum_{n=0}^{\infty} v_s^n + \sum_{n=0}^{\infty} v_a^n \\ \sigma_t &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_s^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_a^n \\ \tau_t &= \sum_{n=0}^{\infty} \tau_s^n + \sum_{n=0}^{\infty} \tau_a^n \end{aligned} \quad (6)$$

3절의 각 프로세스에 대하여 식 (6)에 나타난 변위 및 응력에 자유 및 연속 경계조건을 적용하면 다음과 같다.

프로세스 1:

$$(x, y) \in I_1 \begin{cases} (\sigma_t)_{W_i} + (\sigma_t)_{W_{r1}} = 0 \\ (\tau_t)_{W_i} + (\tau_t)_{W_{r1}} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$(x, y) \in I_2 \begin{cases} (\sigma_t)_{W_{i1}} + (\sigma_t)_{W_{r1}} = (\sigma_t)_{W_{t1}} \\ (\tau_t)_{W_{i1}} + (\tau_t)_{W_{r1}} = (\tau_t)_{W_{t1}} \\ (u_t)_{W_{i1}} + (u_t)_{W_{r1}} = (u_t)_{W_{t1}} \\ (v_t)_{W_{i1}} + (v_t)_{W_{r1}} = (v_t)_{W_{t1}} \end{cases} \quad (8)$$

프로세스 2:

$$(x, y) \in I_3 \begin{cases} (\sigma_t)_{W_{i2}} = 0 \\ (\tau_t)_{W_{i2}} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$(x, y) \in I_4 \begin{cases} (\sigma_t)_{W_{i2}} + (\sigma_t)_{W_{r2}} = (\sigma_t)_{W_{t2}} \\ (\tau_t)_{W_{i2}} + (\tau_t)_{W_{r2}} = (\tau_t)_{W_{t2}} \\ (u_t)_{W_{i2}} + (u_t)_{W_{r2}} = (u_t)_{W_{t2}} \\ (v_t)_{W_{i2}} + (v_t)_{W_{r2}} = (v_t)_{W_{t2}} \end{cases} \quad (10)$$

프로세스 3:

$$(x, y) \in I_1 \begin{cases} (\sigma_t)_{W_{i3}} = 0 \\ (\tau_t)_{W_{i3}} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$(x, y) \in I_2 \begin{cases} (\sigma_t)_{W_{i3}} + (\sigma_t)_{W_{r3}} = (\sigma_t)_{W_{t3}} \\ (\tau_t)_{W_{i3}} + (\tau_t)_{W_{r3}} = (\tau_t)_{W_{t3}} \\ (u_t)_{W_{i3}} + (u_t)_{W_{r3}} = (u_t)_{W_{t3}} \\ (v_t)_{W_{i3}} + (v_t)_{W_{r3}} = (v_t)_{W_{t3}} \end{cases} \quad (12)$$

위의 세 가지 프로세스의 선형연립방정식들에서 투과 및 반사에 해당되는 램파 모드를 식 (5)와 같이 표준모달 함수와 진폭 D_n 의 곱으로 표현하고, 진폭 D_n 을 매트릭스 $[D]$ 로 분리시키면 각 프로세스를 하나의 식으로 식 (13)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} [\overline{W}]_{(2p+4q) \times (2ns+2na)} \times [D]_{(2ns+2na) \times 1} &= -[W_i]_{(2p+4q) \times 1} \\ [D]_{(2ns+2na) \times 1} &= \begin{bmatrix} [RS]_{ns \times 1} \\ [RA]_{na \times 1} \\ [TS]_{ns \times 1} \\ [TA]_{na \times 1} \end{bmatrix} \\ [W_i]_{(2p+4q) \times 1} &= \begin{bmatrix} [(\sigma_t)_{W_i}]_{p \times 1} \\ [(\tau_t)_{W_i}]_{p \times 1} \\ [(\sigma_t)_{W_i}]_{q \times 1} \\ [(\tau_t)_{W_i}]_{q \times 1} \\ [(u_t)_{W_i}]_{q \times 1} \\ [(v_t)_{W_i}]_{q \times 1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 매트릭스 $[RS]$ 와 $[RA]$ 는 단위 진폭의 표준화된 입사파 (W_i)가 입사할 때 반사된 대칭 및 비대칭 모드에 대한 전파 및 비전파 모드들의 반사계수를 나타내며, 매트릭스 $[TS]$ 와 $[TA]$ 는 투과되는 대칭 및 비대칭모드들에 대한 전파 모드와 비전파 모드들의 투과계수를 나타낸

다. q 는 식 (8), (10), (12)에서 연속경계조건이 적용된 경계면을 분할한 점들의 개수이며, p 는 식 (7), (9), (11)에서 자유 경계조건이 적용된 경계면을 분할한 점들의 개수이다. ns 및 na 는 계산 시 고려된 대칭 및 비대칭모드에 대한 전파모드와 비전파 모드의 개수의 합을 나타내며, $[D]$ 의 크기는 계산시 고려되는 대칭 및 비대칭모드의 개수에 따라 결정된다. $[\overline{W}]$ 는 노치의 경계면의 형상과 각 모드에 의해서 결정되는 표준화된 매트릭스로서, 반사파와 투과파에 해당되는 표준 모달함수와 $e^{i(k_n x - \omega t)}$ 의 곱의 항들로 구성되어있다. $[\overline{W}]$ 의 행의 개수는 자유 경계조건이 적용되는 면에 대하여 $2p$ 가 되고, 연속조건이 적용되는 면에 대하여는 $4q$ 가 되므로 총 행의 개수는 $2p+4q$ 가 되며, 열의 개수는 $[D]$ 의 행의 개수와 일치한다.

$[W_i]$ 는 입사파에 의해 자유 경계조건이나 연속조건이 적용되는 경계면들에 작용하는 응력과 변위를 나타내는 매트릭스로서, 입사파와 경계면의 형상을 알면 구할 수 있다. 나아가 $[\overline{W}]$ 는 각 프로세스에 대하여 고려되는 경계면 위의 점과 파수를 식 (2)에 대입시키고 식 (4)와 같이 표준화함으로써 구할 수 있으므로, 식 (13)의 양변을 $e^{-i\omega t}$ 으로 나누어 주면 결론적으로 각 프로세스의 $[RS]$, $[RA]$, $[TS]$, $[TA]$ 는 식 (13)을 통하여 구할 수 있다. 그러나 식 (13)의 계산과정에서 노치의 경계면을 조밀하게 분할하면 $[\overline{W}]$ 의 크기가 매우 커지면서 수치적으로 singular

에 급격하게 가까워지기 때문에, 본 논문에서는 Singular Value Decomposition (SVD) [17]방법을 사용하여 $[D]$ 를 식 (13)으로부터 계산했다.

V. 정상상태의 반사 및 투과계수의 일반식

탄성판 내부의 사각형 노치에 의한 임의의 입력파에 대한 산란현상은 과도상태 (transient state)의 산란과 정상상태 (steady state)의 산란으로 구분되어 질 수 있다. 과도상태에서는 산란파들이 판의 R_2 영역에서 프로세스 2와 프로세스 3을 반복하여 R_1 영역과 R_3 영역으로 반사파와 투과파를 지속적으로 생성해낸다. R_2 영역에서 진행되는 램파는 크게 전파모드와 비전파 모드로 구분되는데, 이들은 각각 다른 위상속도를 가지고 있다. 일례로 먼저 전파모드의 S_0 모드와 A_0 모드는 낮은 주파수에서 S_0 모드가 A_0 모드보다 속도가 빠르기 때문에 R_2 영역의 경계면, I_2, I_4 에 S_0 모드와 A_0 모드가 도달하는데 시간차가 발생된다. 이러한 S_0 와 A_0 간의 속도차는 사이클이 반복되면서 R_2 영역 내에서 산란을 되풀이함에 따라 더욱 해석을 복잡하게 만든다. 이러한 관계를 그림으로 나타내면 그림 4와 표 1과 같다.

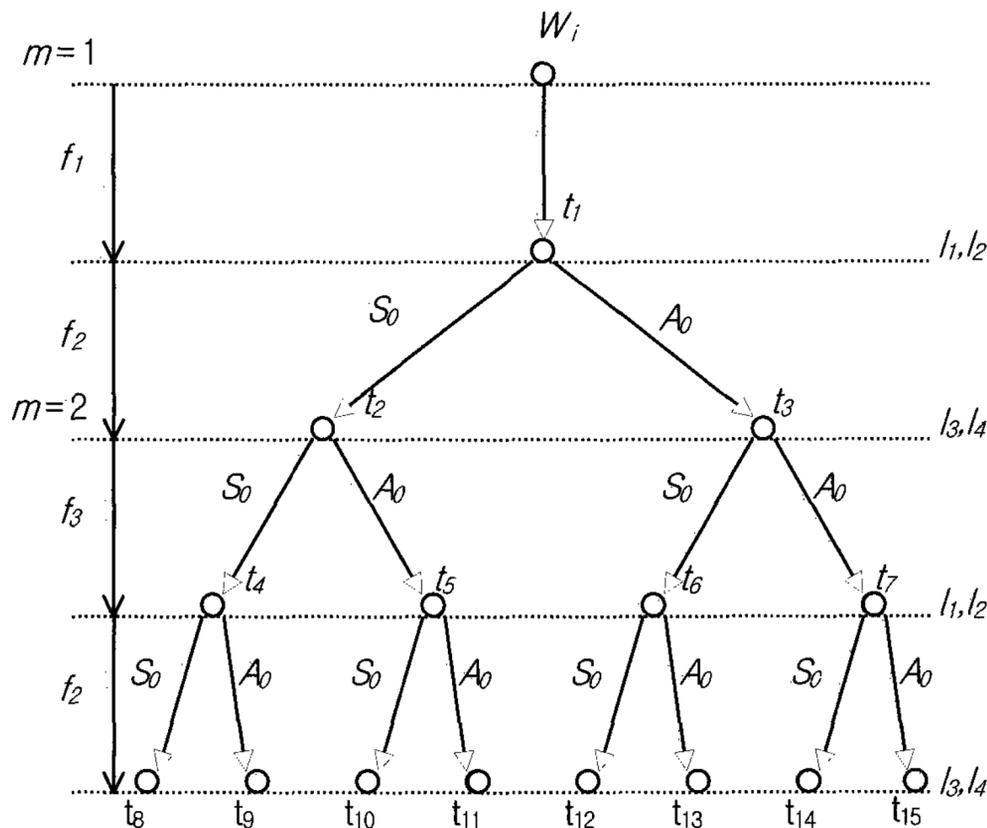


그림 4. S_0 와 A_0 의 과도응답 중 산란 프로세스: f_1, f_2, f_3 은 각각 프로세스 1, 프로세스 2, 프로세스 3을 나타내고, m 은 산란 사이클의 반복계수

Fig. 4. Scattering processes in the transient response with respect to S_0, A_0 modes; f_1, f_2 and f_3 represent process 1, 2 and 3, respectively, and m is the iteration number of the scattering cycle.

표 1. 경과시간 t_s, t_a 는 각각 S_0 및 A_0 모드가 R_2 영역의 I_2 에서 I_4 로 진행하는데 걸리는 시간

Table 1. Elapsed time: t_s and t_a are the time taken for S_0 and A_0 modes to travel from I_2 to I_4 in R_2 , respectively.

	Elapsed time (s)		Elapsed time (s)		Elapsed time (s)
t_1	0	t_6	t_s+t_a	t_{11}	t_s+2t_a
t_2	t_s	t_7	$2t_a$	t_{12}	$2t_s+t_a$
t_3	t_a	t_8	$3t_s$	t_{13}	t_s+2t_a
t_4	$2t_s$	t_9	$2t_s+t_a$	t_{14}	t_s+2t_a
t_5	t_s+t_a	t_{10}	$2t_s+t_a$	t_{15}	$3t_a$

R_2 영역에서의 산란프로세스의 한 예로서 그림 4와 표 1에서 R_2 영역의 경계면 I_2 에서 I_4 까지 S_0, A_0 모드가 도달하는 시간을 각각 t_s, t_a 라 하고 $t_s < t_a < 2t_s$ 이면, 시간이 $2t_s$ 일 때 초기 입력파 (W_i)에 대하여 반사파와 투과파는 t_1, t_2 그리고 t_3 등의 시점에서 발생한다. 이러한 관계는 시간이 지날수록 반사파나 투과파를 발생시키는 시점이 증가하게 되고, 관찰 시간이 길어지면 거의 모든 시점에서 투과파나 혹은 반사파를 발생시킨다.

입사파 W_i 가 처음으로 경계면 I_1, I_2 를 만나 반사파를 생성시킨 t_1 시점부터 시간이 충분히 흘러 나머지 모든 시점에서 반사파와 투과파를 발생시킨다고 가정하고, f 가 프로세스 1, 2, 3 중 임의의 하나를 나타낸다고 할 때,

R_2 영역을 지나는 S_0 와 A_0 파에 대하여 중첩의 원리를 적용하면 아래와 같이 나타내어질 수 있다.

$$f(S_0) + f(A_0) = f(S_0 + A_0) \quad (14)$$

위의 식을 이용하면 사이클이 $m=1$ 일 때, 프로세스 2에 의한 S_0 와 A_0 의 가지들이 S_0+A_0 의 하나의 가지로 표현되어지며, 이후의 모든 프로세스들이 하나의 가지로 표현된다. 그러나 노치에 의한 전파모드의 산란은 비전파 모드의 영향을 받기 때문에, 정상상태의 전파모드의 투과 및 반사계수를 구하기 위해 전파모드 뿐만 아니라 발생하는 모든 비전파 모드에 대하여 중첩의 원리를 함께 적용하면, 그림 5와 같이 정상상태의 산란과정을 나타낼 수 있다.

정상상태에서 R_1 영역으로 반사되는 램파 중에 전파모드의 반사계수를 대칭모드와 비대칭 모드에 대해 각각 매트릭스 CRS 와 CRA 로 나타내고, R_3 영역으로 투과되는 전파모드의 투과계수를 대칭모드와 비대칭모드에 대해 매트릭스 CTS, CTA 로 나타낸다. 그러면 식 (15)와 같이 정상상태의 투과 및 반사 계수는 기본 램파 모드인 S_0 및 A_0 만 발생하는 낮은 주파수에서 각 프로세스의 S_0 및 A_0 의 투과 및 반사 계수의 합으로 나타낼 수 있다. 본 논문에서는 실제로 에너지를 전파할 수 있는 전파모드

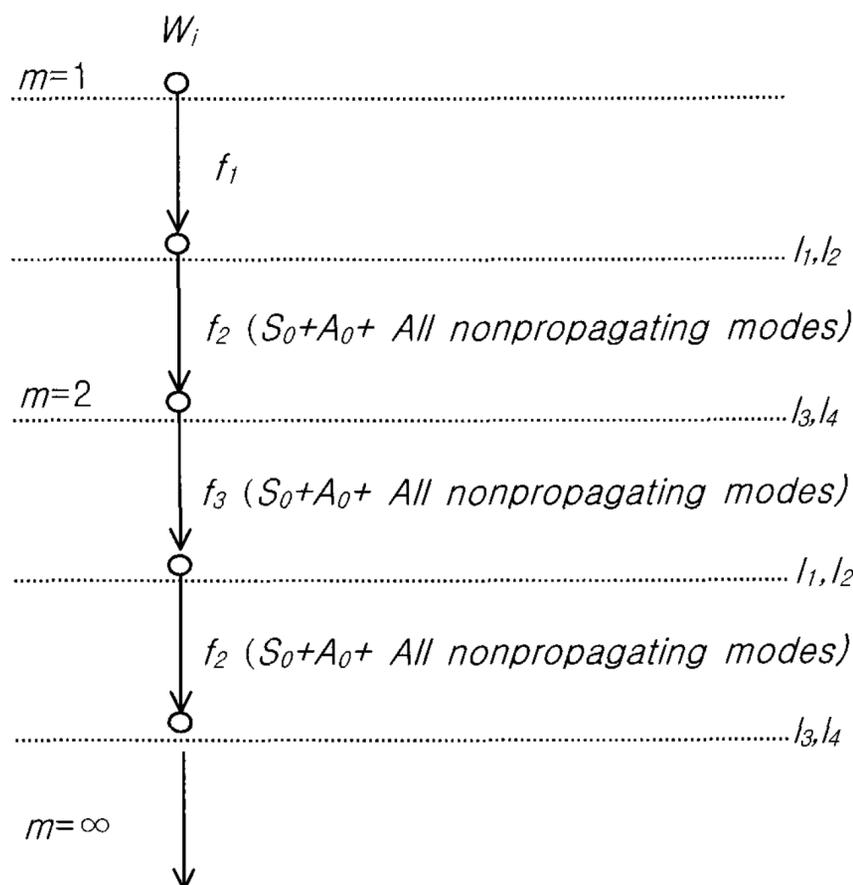


그림 5. 정상상태의 산란 프로세스
Fig. 5. Scattering processes in the steady-state response.

의 램파에 대한 투과 및 반사 계수만을 고려하므로, 에너지를 전파할 수 없는 비전파 모드에 대한 해석은 고려하지 않았다.

$$\begin{aligned}
 CRS_j &= RS1_1 + \sum_{m=2}^j TS3_m \\
 CRA_j &= RA1_1 + \sum_{m=2}^j TA3_m \\
 CTS_j &= \sum_{m=1}^j TS2_m \\
 CTA_j &= \sum_{m=1}^j TA2_m
 \end{aligned} \tag{15}$$

여기서 j 는 임의의 사이클의 반복계수를 나타내고, j 는 m 보다 크거나 같으며, 매트릭스 $RS1$, $RA1$, $TS1$, $TA1$ 은 프로세스 1의, 매트릭스 $RS2$, $RA2$, $TS2$, $TA2$ 은 프로세스 2의, 그리고 매트릭스 $RS3$, $RA3$, $TS3$, $TA3$ 은 프로세스 3의 S_0 및 A_0 모드의 반사 및 투과계수를 각각 나타낸다.

VI. 노치를 포함한 알루미늄 판에서 램파의 반사, 투과 특성 해석

이상의 해석원리를 이용하여 노치를 포함하는 알루미늄 판에서의 램파의 반사, 투과 특성을 다음과 같이 분석하였다. 분석에서 초기 입사파의 주파수는 100 kHz이고, 분석 대상으로 영율은 72.6 GPa, 포아송 비는 0.34이고 두께는 5mm인 알루미늄 판을 사용하였다. 판 내의 노치의 깊이 (d)는 0.5 mm 에서 4 mm 로 0.5 mm 씩 증가시켰고, 노치의 폭 (g)은 0에서 16 mm 로 2 mm 씩 증가시켰다. 그리고 노치의 경계면 상의 점의 개수로는 각 경계면을 0.005 mm간격으로 분할하여 p 와 q 를 계산했다.

계산의 정확성은 각 판의 두께에서 발생 가능한 램파 모드를 많이 고려해주고, 각 프로세스의 경계면을 조밀하게 나눌수록, 그리고 사이클의 반복횟수를 증가시킬수록 증가한다. 그러나 주어진 경계면의 분할간격에 비해 너무 많은 램파 모드를 고려하면, 선형연립방정식의 개수는 일정한 반면 미지수의 개수는 증가하여, 각 프로세스의 계산결과가 정확하지 않게 되고, 결과적으로 사이클이 증가함에 따라 계산 결과가 발산하게 된다. 이러한 문제 때문에 본 논문에서는 대칭 및 비대칭 모드 각각에 대하여 60개의 복소 모드를 고려하였다. 여기서 주의할

점은 계산에서 고려할 비전파 램파 모드의 파수를 선택할 때 그 파수의 실수부의 부호를 양인 경우와 음인 경우가 한 쌍이 되도록 해야 하는데, 그 이유는 Rayleigh-Lamb 식에서 파수가 제곱의 형태로 표현되어 있기 때문이다 [13]. 본 논문에서는 판의 두께 변화에 따라 61개의 대칭 모드와 62개의 비대칭모드를 고려하였다. 이러한 차이를 둔 이유는 낮은 주파수 영역에서 각 판의 두께에 따라서 대칭, 비대칭 램파에 대하여 실수 파수가 각각 하나씩 있고, 복소수 파수의 실수 부분이 부호가 다른 쌍으로 각각 존재하지만, 대칭모드에서는 없는 허수만을 가지는 파수가 비대칭모드에서 한 개 있기 때문이다.

정상상태의 산란프로세스의 첫 사이클은 프로세스 1, 프로세스 2로 구성되며, 두 번째 사이클 이후로는 프로세스 3과 프로세스 2로 구성된다. 그리고 연속적인 반복계산을 각 사이클 마다 되풀이 하면서 판의 양 수평방향으로 반사되거나 투과되는 파의 반사 및 투과계수를 중첩의 원리에 의해 식 (15)와 같이 다 더함으로써 정상상태에서의 응답을 계산해 낸다. 이렇게 더해진 반사계수와 투과계수는 사이클이 반복됨에 따라 실제 정상상태의 응답과 가까워진다.

계산오차는 에너지 보존의 법칙에 의거해 입력파의 전파모드의 에너지 플럭스의 합과 반사 혹은 투과되는 전파모드의 에너지 플럭스의 합의 차를 통해 계산되는데, 본 논문에서는 S_0 와 A_0 만 발생시키는 낮은 주파수를 고려하므로 전파모드는 대칭 및 비대칭 램파에 있어서 각각 하나씩 있다. 그러므로 계산오차는 식 (16)을 통해 계산하였고, 반복계산 도중 더 이상 오차 값이 바뀌지 않는 신뢰할 만한 결과를 얻기 위해서 각 사이클의 계산된 오차값 δ_j 를 바로 이전 사이클에서 계산된 δ_{j-1} 로 뺀 값인 식 (17)이 0.1% 이내에 들어올 때까지 사이클의 반복계산을 수행하였다.

$$\delta_j = 1 - |CRS_j|^2 - |CRA_j|^2 - |CTS_j|^2 - |CTA_j|^2 \tag{16}$$

$$\Delta\delta_j = \delta_j - \delta_{j-1} \tag{17}$$

노치의 깊이와 폭에 대하여 4절에서 유도된 식 (15)로 반사계수와 투과계수를 계산한 결과로서 입사파가 대칭 파일 경우는 그림 6에, 입사파가 비대칭 파일 경우에는 그림 7에, 그리고 계산오차는 그림 8에 각각 나타내었다.

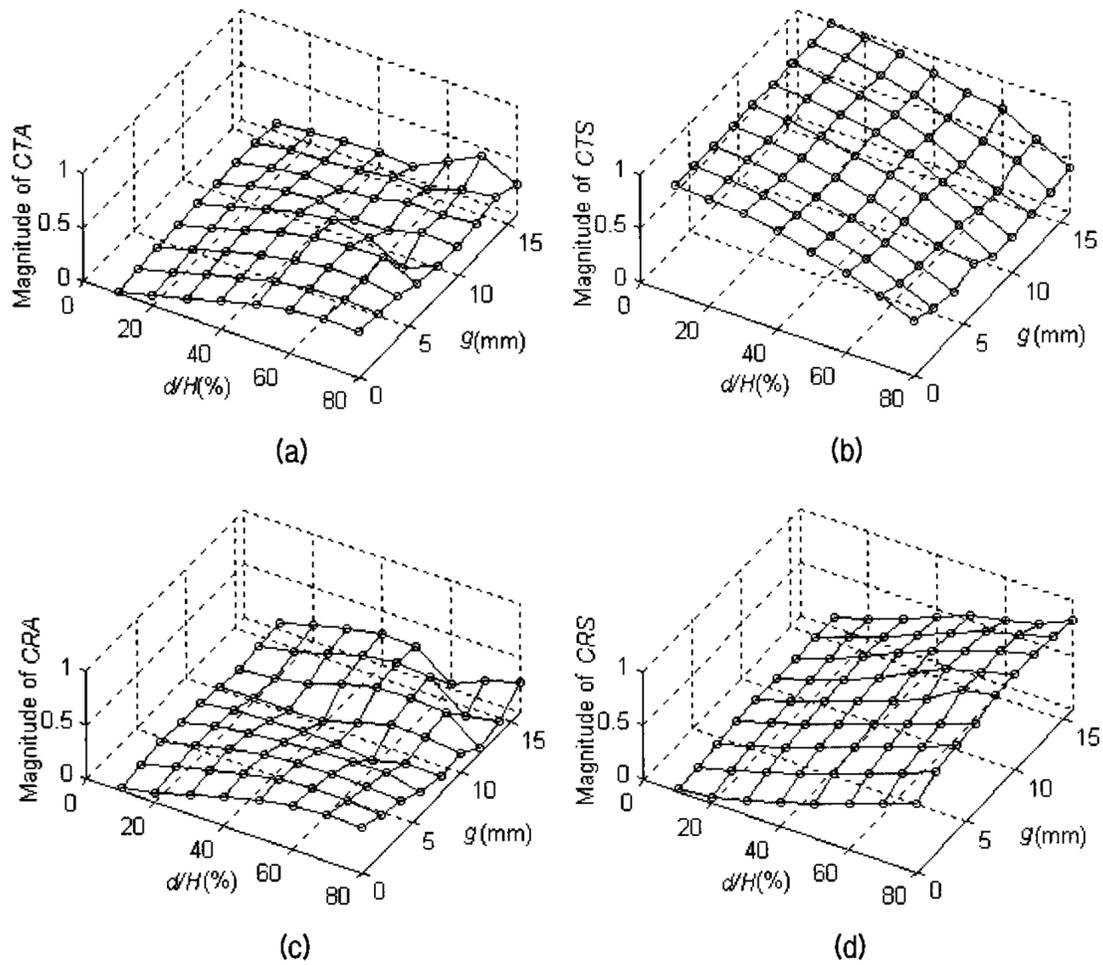


그림 6. 입사파가 S_0 일 때의 투과계수와 반사계수: d/H (%)는 노치의 높이/판의 두께, g (mm)는 노치의 폭, (a) A_0 의 투과계수의 크기, (b) S_0 의 투과계수의 크기, (c) A_0 의 반사계수의 크기, (d) S_0 의 반사계수의 크기
 Fig. 6. Reflection and transmission coefficients when the S_0 mode wave is incident: d/H (%) is the ratio of notch height/plate thickness, g (mm) is the width of the notch, (a) transmission coefficient of A_0 , (b) transmission coefficient of S_0 , (c) reflection coefficient of A_0 , (d) reflection coefficient of S_0 .

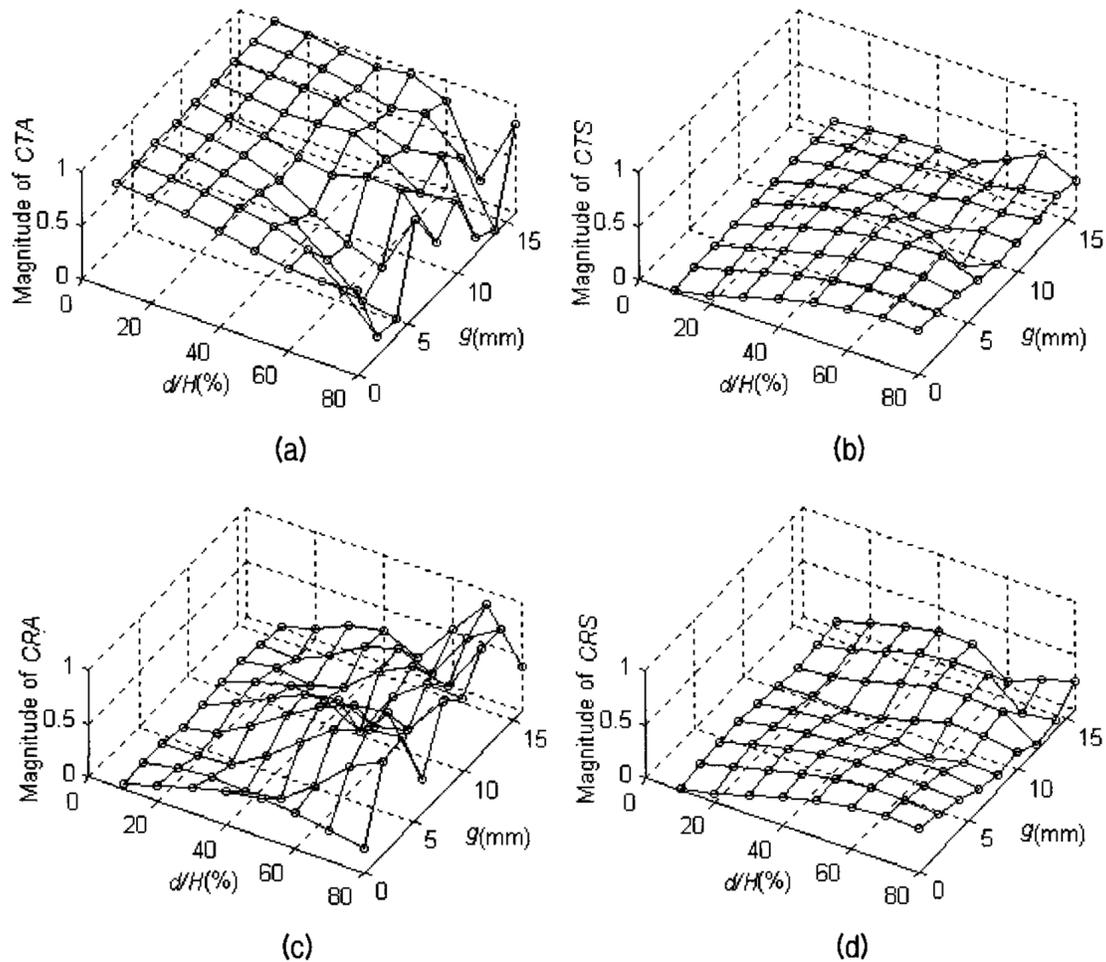


그림 7. 입사파가 A_0 일 때의 투과계수와 반사계수: (a) A_0 의 투과계수의 크기, (b) S_0 의 투과계수의 크기, (c) A_0 의 반사계수의 크기, (d) S_0 의 반사계수의 크기
 Fig 7. Reflection and transmission coefficients when A_0 mode wave is incident: (a) transmission coefficient of A_0 , (b) transmission coefficient of S_0 , (c) reflection coefficient of A_0 , (d) reflection coefficient of S_0 .

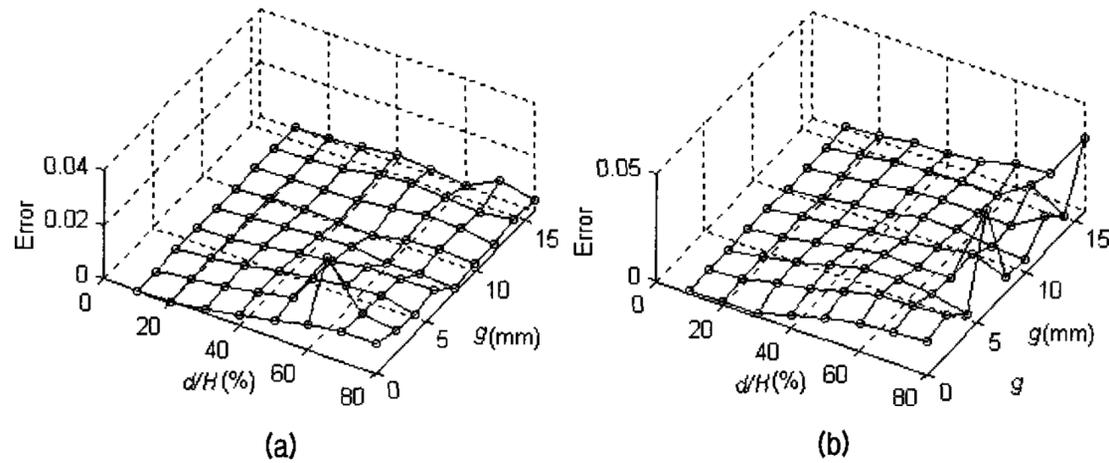


그림 8. 노치 형상의 변화에 따른 계산 오차: (a) 입사파가 A_0 일 때, (b) 입사파가 S_0 일 때
 Fig. 8. Errors with respect to the notch geometry: (a) when A_0 mode wave is incident, (b) when S_0 mode wave is incident.

그림 6의 (b)와 (d)를 보면 S_0 모드 입사파에 대한 S_0 모드의 투과 계수의 크기는 노치의 깊이가 깊어질수록 지속적으로 작아지고, S_0 모드의 반사계수는 반대로 커지는 뚜렷한 경향이 있었지만, 노치 폭의 증가에 대해서는 상대적으로 그리 큰 영향을 받지 않았다. 입사파가 A_0 모드 일 때의 A_0 의 투과계수 및 반사계수의 크기는 그림 7의 (a)와 (c)에 나타난 바와 같이, 입사파가 S_0 모드일 때보다 노치의 폭의 변화에 따라 민감하게 변화하였다. 즉, 노치의 깊이가 증가하면 특정한 패턴을 따라 A_0 모드의 투과 계수는 감소하다 다시 증가하며, A_0 모드의 반사계수는 증가하다 다시 감소하는 특성을 보였다.

그림 6의 (a)와 (c), 그리고 그림 7의 (b)와 (d)는 각각 입사파가 S_0 모드일 때의 A_0 모드의 투과 및 반사계수의 크기, 입사파가 A_0 모드일 때의 S_0 모드의 투과 및 반사계수의 크기를 나타내며, 노치에 의해 S_0 에서 A_0 로, A_0 에서 S_0 로 모드변환이 발생한 경우이다. 그림 6의 (a)와 그림 7의 (b)를 보면, S_0 에서 A_0 로, A_0 에서 S_0 로 모드변환이 발생했을 때의 노치형상의 변화에 따른 투과계수의 크기의 변화가 서로 일치하며, 이러한 특징은 각 모드변환으로 인한 반사계수의 크기 변화를 나타내는 그림 6의 (c)와 그림 7의 (d)에서도 잘 나타난다. 이러한 결과는 폭이 '0'인 노치의 형상 변화에 따른 모드변환에 관한 Flores-López 등 [1]의 해석결과와 일치한다.

그림 8에서 크랙의 깊이에 따른 계산오차의 변화를 보면, 노치의 깊이가 깊어질수록 계산오차가 점차 커지는 경향이 있음을 알 수 있다. 이는 계산시 고려한 램파의 대칭파의 개수 61개 및 비대칭 파의 개수 62개와 노치의 경계면 분할 간격 0.005 mm가 노치의 깊이가 얇을 때에는 충분히 신뢰성 있는 결과를 도출하기에 적합한 개수지만, 노치의 깊이가 깊어질수록 고려한 램파 이외의 복소수 램파 모드가 노치의 경계면에 많이 발생하기 때문이다.

VII. 결론

본 논문에서는 판의 내부에 하나의 사각형 노치가 존재할 때, 입사파가 S_0 혹은 A_0 인 램파에 대하여 정상상태의 반사 및 투과 계수를 구하고, 그 기법을 알루미늄 판에 적용하여 해석하여 보았다. 계산결과에 의하면 노치의 깊이와 폭이 변함에 따라 정상상태 응답의 전파모드 램파의 진폭이 변화하였고, 입사파가 대칭 램파일 때보다 비대칭 램파일 때 이러한 특성이 두드러졌다. 본 논문에서 연구한 기법은 노치의 형상에 따른 램파의 투과, 반사계수를 도출함으로써, 구조물 내의 결함에 의한 파의 특성 변화를 정량적으로 분석할 수 있도록 하였다. 이러한 결과는 구조물의 건전성을 평가할 수 있는 초음파 비파괴 진단의 해석도구로 활용될 수 있을 것이다.

참고 문헌

1. M. A. Flores-López and R. D. Gregory, "Scattering of Rayleigh-Lamb waves by a surface breaking crack in an elastic plate," *J. Acoust. Soc. Am.*, 119, 2041-2049, 2006.
2. B. Morvan, N. W. Chancellier, H. Duflo, A. Tinel, and J. Duclos, "Lamb wave reflection at the free edge of a plate," *J. Acoust. Soc. Am.*, 113, 1417-1425, 2003.
3. M. Castaings, E. L. Clezio, and B. Hosten, "Modal decomposition method for modeling the interaction of Lamb wave cracks," *J. Acoust. Soc. Am.*, 112, 2567-2582, 2002.
4. P. J. Torvik, "Reflection of Wave Trains in Semi-Infinite Plates," *J. Acoust. Soc. Am.*, 41, 346-353, 1967.
5. M. J. S. Lowe and O. Diligent, "Low-frequency reflection characteristics of the S_0 Lamb wave from a rectangular notch in a plate," *J. Acoust. Soc. Am.*, 111, 64-74, 2002.
6. M. Lowe, P. Cawley, J. Kao, and O. Diligent, "The low frequency reflection characteristics of the fundamental anti-symmetric Lamb wave A_0 from a rectangular notch in a plate," *J. Acoust. Soc. Am.*, 112, 2612-2622, 2002.

7. B. Hosten, L. Moreau, and M. Castaings, "Reflection and transmission coefficients for guided waves reflected by defects in viscoelastic material plates," *J. Acoust. Soc. Am.*, **121**, 3409-3417, 2007.
8. Y. Cho and J. L. Rose, "An elastodynamic hybrid boundary element study for elastic guided wave interactions with a surface breaking defect," *Int. J. Solid and Structures* **37**, 4103-4124, 2000.
9. J. L. Rose, W. Zhu, and Y. Cho, "Boundary element modeling for guided wave reflection and transmission factor analyses in defect classification," *Proc. IFFF Ultrason. Symp.*, **1**, 885-888, 1998.
10. E. D. Nielsen, "Scattering by a cylindrical post of complex permittivity in a waveguide," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, **MTT-17**, 148-153, 1969.
11. A. Lakhtakia, V. V. Varadan, and V. K. Varadan, "Reflection characteristics of an elastic slab containing a periodic array of cylinders: SH wave analysis," *J. Acoust. Soc. Am.*, **80**, 311-316, 1986.
12. A. Lakhtakia, V. V. Varadan, and V. K. Varadan, "Reflection characteristics of an elastic slab containing a periodic array of cylinders: P and SV wave analysis," *J. Acoust. Soc. Am.*, **83**, 1267-1276, 1988.
13. X. M. Wang, "Scattering of Lamb waves by a circular cylinder," *J. Acoust. Soc. Am.*, **110**, 1752-1763, 2001.
14. F. Simonetti and M. J. S. Lowe, "On the meaning of Lamb mode nonpropagating branches," *J. Acoust. Soc. Am.*, **118**, 186-192, 2005.
15. B. Auld, *Acoustic Fields and Waves in Solids*, (Krieger, Malabar, 1990), Vol. 2.
16. A. Gunawan and S. Hirose, "Mode-exciting method for Lamb wave scattering analysis," *J. Acoust. Soc. Am.*, **115**, 996-1005, 2003.
17. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, (Cambridge U.P., Cambridge, 1997).

저자 약력

• **김 병 수 (Byungsoo Kim)**



2004년 2월 경북대학교 기계공학과 졸업 (공학사)
 2007년 3월 현재 경북대학교 기계공학과 석사 과정

• **노 용 래 (Yongrae Roh)**

한국음향학회지 제26권 제2호 실소