韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 22집 제 2호, 2008. 5. 137-164

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 22, No. 2, May. 2008. 137-164

초등학교 4학년 학생들의 대수적 사고 분석

최 지 영 (서울대동초등학교)
방 정 숙 (한국교원대학교)

대수 교육은 전통적으로 중등 교육과정 중심의 기호의 조작 및 방정식의 풀이에 초점이 맞추어져 왔다. 그러나 초등 교육과정 전반에 걸친 수에 관한 광범위한 경험은 대수에서 강조되는 기호 및 구조에 기초가 될 수 있다. 본 연구는 초등학교 4학년을 대상으로 실시한 수업 사례를 바탕으로 학생들이 실제로 대수적 사고를 어떻게 구성해나가는지를 면밀하게 탐색하였다. 분석 결과 학생들은 구체물의 조작이나 그림그리기 등의 활동을 통해 규칙성을 인식하기 시작했고, 주어진 문제 상황을 표현하기 위해 다양한 산술적이고 비형식적인 전략을 사용하였으며, 외형이 다른 두 식의 동치관계를 식의 변형과정이 아닌 주어진 문제 상황과의 관계를 이용하여 이해하는 특징을 보였다. 또한, 문제 상황을 대수식으로 표현하는 과정에서 몇 가지 오류를 범했다. 본 연구는 구체적인 수업 사례를 바탕으로 초등학생들의 대수적 사고를 산술적 사고 및 비형식적 사고와 의미 있게 연결하는 대수 지도 방안에 대한 시사점을 제공한다.

I. 서 론

학교 수학에서 대수는 기호화와 거의 동일시되는 개념으로 통용되어 왔으며 문자 기호와 방정식을 다루는 중등학교 교육과정에 중점을 둔 주제로 인식되어 왔다(김성준, 2004). 그러나 이처럼 문자 기호 사용의 여부로 산술과 대수를 구분하거나 학교 대수를 기호화 측면으로만 해석할 경우, 산술과의 연결성을 잃게 되어 대수 학습을 어렵게 할 우려가 있다(Kaput, 1997). 이와 같은 맥락으로 1990년대 이후의 수학교육연구에서는 산술과 대수 사이의 연결 과정을 '기호화' 측면이 아닌 '대수적 사고'의 측면에서 재검토해야 한다는 주장들이 제기되었다(Amerom, 2002; Boulton-Lewiset et al., 1997; Kieran & Chalouh, 1999; Linchevski, 1995; Lodgolz, 1999).

미국수학교사협의회(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000)의 「학교수학을 위한 원리와 규준」에서는 유아·유치원부터 12학년에 이르기까지의 학생들의 수학교육을 위한 규준으로 10가지를 제시했는데, 이 중 두 번째의 규준에 해당하는 것이 대수이다. 대수는 이제 더 이상 중등학교 교육과정에만 국한된 것이 아니며 초기 학년에서부터 대수적 사고를 가르치는 것은 수학교육과정에서의 바람직한 새로운 요구이다(Wickett, Katharine, & Burns, 2002).

Kaput와 Blanton(2001)은 초기 대수와 관련된 여러 논의를 통하여 초기 대수가 중등과정에서 학습

* ZDM 분류 : C32
* MSC2000 분류 : 97C30
* 주제어 : 대수적 사고, 문제해결, 규칙성, 일반화

하는 문자와 기호에 관한 내용을 단순화해서 옮겨놓는 것이 아니라 대수적 사고의 측면에서 대수와 관련된 사고를 개발하려는 것이라는 것을 분명히 하였다(김성준, 2004, 재인용). 또한, Carpenter, Franke와 Levi(2003)는 모든 학생들은 대수를 배워야 하며, 대수적 사고가 전 학년에 걸쳐 지도되어야 한다고 강조하였고, Steele(2005)은 학생들이 대수적 개념을 의미 있게 이해하기 위해서는 학교 수학의 초기 단계에서부터 계속적으로 대수적 사고를 할 기회가 제공되어야 한다고 주장하였다.

초기 대수 교육은 기호조작이 아닌 대수적 사고를 개발하는 것에 초점을 두며, 의미 있는 대수 교육은 초등 단계에서부터 계속적이고 점진적으로 대수적 사고를 개발하는 것으로 볼 때, 대수적 사고의 정의를 명확히 하는 것은 매우 중요하다. 이에 김성준(2004)은 이론적인 근거를 토대로 대수적 사고의 본질을 분명히 밝히고자 하였는데, 이를 위해 대수적 사고를 역사-발생적 관점, 인식론적 관점, 기호-언어학적 관점에서 분석하였다. 그리고 이러한 대수적 사고의 본질에 대한 논의를 바탕으로 학교 대수와 관련된 대수적 사고 요소를 추출한 후, 초등학교와 중학교 교과서에 반영된 대수적 사고 요소와 중학교 1학년 학생을 대상으로 대수적 사고 요소의 학습 실태를 분석하여 대수적 사고 요소의 학습 지도 방향을 제시하였다.

그러나 학생들의 선행 학습 실태나 사고 수준 및 특성에 알맞게 초등학생들의 대수적 사고를 개발하기 위해서는 초등학생들이 이미 획득한 산술적 사고 수준이나 비형식적인 대수적 사고와 자연스럽게 연결을 시도해야 한다는 측면에서 학생들의 대수적 사고에 대한 경험적이고 실제적인 연구는 여전히 부족한 상황이다. 또한 현행 교육과정에서 표면적으로 드러나 있지 않은 대수적 사고 요소가 실제로 초등학교 교실의 교수-학습 과정에서 의미 있게 다루어지기 위해서는 좀 더 명확하고 체계적인 지도 방안이 제시되어야 한다는 측면에서 지금까지의 연구에는 제한점이 있다.

이런 관점에서 볼 때, 기존의 산술적이고 비형식적인 사고 특성을 바탕으로 초등학생들이 대수적 사고를 어떻게 구성해 나가는지에 대한 구체적이고 실질적인 연구가 필요하다. 본 연구는 초등학교 4학년을 대상으로 실시한 수업 사례 연구로, 초등학생들이 대수적 사고를 개발하기에 적절한 과제를 학습 주제로 선정하고 수업을 통해 초등학생들이 대수적 사고를 어떻게 구성해 나가는지를 면밀하게 분석하여 초등학생들의 수준과 특성에 알맞게 대수적 사고를 개발하기 위한 교수-학습 지도 방안에 대한 시사점을 탐색하는데 주요 목적이 있다.

이를 위해 규칙성 및 두 양 사이의 관계를 탐구하고 일반화하는 과정에서 초등학생들이 규칙성을 인식하는 방법의 특징, 문제 상황을 수학적 모델 및 대수식을 사용하여 표현하는 방법의 특징, 외형이 다른 두 식 사이의 동치관계를 인식하는 방법의 특징 등을 분석하였다. 또한 학생들이 대수 기호를 사용하여 규칙을 일반화하는 과정에서 학생들이 범하는 오류 및 인지적 장애를 분석하였다. 구체적인 연구문제는 다음과 같다.

- 학생들의 산술적, 비형식적 사고 중 규칙성을 일반화하는 과정에 기초가 되는 사고는 무엇인가?
- 규칙성을 일반화하는 과정에서 학생들의 대수적 사고의 특징은 무엇인가?

• 학생들의 산술적, 비형식적 사고 중 두 양 사이의 관계를 일반화하는 과정에 기초가 되는 사고는 무엇인가?

• 두 양 사이의 관계를 일반화하는 과정에서 학생들의 대수적 사고의 특징은 무엇인가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 대수적 사고

대수적 사고에 대한 정의는 연구자에 따라 조금씩 다르게 나타난다. Kieran(1996)은 대수적 사고를 다양한 표현을 사용하여 상호관련성 있는 양적인 상황을 처리하는 것이라고 정의하였고, Smith(2003)는 규칙성을 탐구하여 그 규칙성 안에 있는 변수들 사이의 관계 즉, 규칙이 어떻게 변화되는가를 찾아내어 확장하는 능력으로 규정하였으며(Steele, 2005, 재인용), Kaput과 Blanton(2005)은 대수적 사고를 몇 개의 구체적인 사례들로부터 수학적 아이디어를 일반화하고 그 일반화를 형식적으로 표현하는 과정이라고 정의하였다. 본 연구에서는 대수적 사고를 양들 사이에서 규칙성 및 관계를 찾아 일반화하고 이를 수학적인 모델이나 식 등으로 표현하는 과정이라고 정의한다.

학교 수학과 관련된 대수적 사고 요소에 대한 선행연구를 살펴보면, 김성준(2004)은 이론적인 근거를 토대로 대수적 사고의 본질을 분명히 밝히고자 하였는데, 이를 위해 대수적 사고를 세 가지 측면에서 분석하였다. 첫째, 역사-발생적 관점에서의 분석을 통해 대수를 형성하고 있는 사고의 기원을 탐구하였고, 둘째, 인식론적 관점에서의 분석을 통해 대수적 지식을 이해하기 위해 요구되는 사고의 본질을 밝혔으며, 셋째, 기호-언어학적 관점에서의 분석을 통해 대수에서 문자사용의 바탕에 놓여 있는 사고의 본질을 밝혔다. 그리고 이러한 대수적 사고의 본질에 대한 논의를 바탕으로 학교대수와 관련한 대수적 사고 요소를 분석하였다. 그는 대수의 도입과 관련된 학교 대수 영역을 문자와 식 및 방정식으로 제한하고, 대수적 사고 요소로 대수적인 원리, 변수 개념, 양적인 추론, 대수적인 해석-식 세우기, 변환 추론-식의 변형, 연산 감각-식의 조작, 대입, 관점의 전환, 문제 해결 도구로 인식하기, 등호 해석과 동치 개념, 미지수 개념, 비례적 사고, 분석적 사고, 관계를 파악하는 능력, 가역적 사고를 제시하였다. 각각의 대수적 사고 요소를 정리하면 다음과 같다.

• 대수적인 원리: Freudenthal(1983)이 대수적 사고에서 형식불역의 원리의 중요성을 강조하여 붙인 이름으로 기존의 수 체계에서 인정된 성질이 유지되도록 수와 연산 및 관계를 확장하는 것을 말한다. 학교수학에서 처음 문자를 도입할 때, 수를 다룰 때 성립하는 성질이 문자의 경우에서도 유지된다는 원리를 바탕으로 도입되는데, 이러한 대수적인 원리는 문자와 식의 학습에서 산술과의 관계를 분명하게 보여주며, '일반화' 전략의 바탕이 되는 기본적인 대수적 사고 요소이다.

• 변수 개념: 중학교 이후의 학교수학에서 대수를 비롯하여 학교 수학 전반을 이해하는 바탕이 되

며, 수학학습의 성공 여부를 결정짓는 중요한 역할을 하는 대수적 사고 요소이다.

• 양적인 추론: 문제 상황에 주어진 양들 사이의 관계를 파악하는 것으로, 주어진 문제에서 주어진 자료와 조건 사이의 관계를 해석하는 능력은 문제 해결은 물론, 식을 하나의 대상으로 다루도록 하는데 도움이 된다.

• 대수적인 해석: 문제 상황에서 적합한 문자를 선택하여 주어진 상황을 식으로 표현하는 것으로 초등학교 수준에서는 문제 상황을 수식으로 표현하거나 □, △와 같은 기호를 사용해 식으로 표현하는 데에 반영되어 있다.

• 변환 추론: 식의 변형을 통해 동치인 식을 만드는 과정에 필요한 사고로, 주어진 대수식의 동치 변형에서 결정적인 역할을 한다. 대수적인 해석이 문제 상황을 문자와 식으로 나타내는 데 초점을 둔다면, 변환 추론은 식을 변형하는 과정에 초점을 둔다.

• 연산 감각: 식의 조작에서 사칙 연산과 교환, 결합, 분배 법칙 등 연산 법칙을 사용하는 데 필요한 사고 요소로서, 서로 다른 상황을 표현한 대수식을 하나의 대상으로 보고, 서로 다른 상황을 결합하고자 할 때 요구된다. 예를 들어, 대수식의 연산에서 5a+3b와 4a+2b의 합을 구하기 위해서는 동류항 개념과 교환법칙, 분배법칙에 대한 내용을 이해하고 있어야 한다.

• 대입: 주어진 수나 변수를 다른 것으로 대치하는 것과 관련된 사고 요소로, 수를 변수로 대치하면 일반화가 되고, 변수에 수를 대입하면 특수화가 된다. 대입은 대수와 산술의 관계를 보여 주면서, 일반화와 특수화 사이의 관계를 확인하는 데 중요하다.

• 관점의 전환: 자료를 미지의 것으로 생각하거나 미지인 것을 자료로 생각하는 것과 같이 시각을 달리하여 해석하는 것을 말한다. 문제에서 제시되는 조건을 서로 연결해서 보는 능력은 문제를 이해하고 해결하는 출발점이 되며, 조건 사이의 관계를 전체적으로 관련지어 이해할 수 있을 때 관점의 전환이 일어나게 된다.

2. 초등교육과정에서의 대수적 사고

가. NCTM 규준에서 강조하는 내용

「학교수학을 위한 원리와 규준」에서는 "모든 학생들은 대수를 배워야 한다."는 표어를 내걸고, 다음과 같은 4가지 대수 규준을 밝히고 있다(NCTM, 2000).

교수 프로그램은 유아·유치원부터 12학년에 이르기까지의 모든 학생들이 다음을 할 수 있도록 해야 한다.

- 규칙성, 관계, 그리고 함수를 이해한다.
- 대수 기호를 이용하여 수학적 상황과 구조를 표현하고 분석한다.
- 양적인 관계를 표현하고 이해하기 위하여 수학적 모델을 이용한다.
- 다양한 맥락에서 변화를 분석한다.

위에 제시된 규준을 살펴보면, 규칙성, 관계 및 함수에 대한 이해를 첫 번째 항목으로 제시하고 있는데, 이것은 일반적으로 변수, 대수식, 방정식을 강조하는 것과는 다르다. 또한 규칙성, 관계, 함수에 대한 경험을 유아·유치원에서부터 12학년에 이르기까지 지속적으로 지도하게 함으로써, 산술에서 대수로의 이행 과정에서의 어려움을 줄이고 중· 고등학교 과정에서 보다 강력한 기반을 갖도록 한다. 그리고 두 번째 규준인 수학적 상황과 구조에 맞는 대수 기호 표현은 학년 수준에 맞게 수학적인 형식화 및 기호화와 관련된 것으로 규칙성, 관계 및 함수에 대한 이해에 이어서 강조되고 있다. 그리고 세 번째 규준에서의 모델링을 이용하여 양적 관계 표현하기는 학생이 양적 관계에 대한 자신의 아이디어를 표현하기 위해 형식적인 식 이외에 사고와 표현의 도구로서 수학적 모델링을 개발하고 사용할 것을 강조한 것으로 볼 수 있다. 네 번째 규준인 다양한 맥락에서 변화를 분석하는 것은 함수와 관련해서 생각해 볼 수 있을 것이다. 이와 같은 교육과정은 규칙성에 기초하여 대수를 도입하는 방법을 제시함으로써 전통적인 대수 도입 방식과는 차이를 보이고 있다.

한편, 본 연구대상 학년을 고려하여 3학년부터 5학년을 위한 대수 규준을 살펴보면, 다음과 같은 활동을 통하여 학생들의 대수적 사고가 발현되고 탐구되어야 함을 명시하고 있다(NCTM, 2000).

- 수 및 기하적인 규칙성을 확인하거나 만든다.
- 규칙을 언어로 설명하고, 표나 기호로 표현한다.
- 변하는 양들 사이의 관계를 찾고, 예측하는데 사용한다.
- 특정한 상황에서 항상 적용되는 것으로써 일반화를 만들고 설명한다.
- 규칙을 설명하기 위해 그래프를 사용하고 예상을 한다.
- 수의 성질을 탐구한다.
- 고안된 기호, 표준 기호, 변수를 사용하여 규칙과 일반화, 상황을 표현한다.

3학년에서 5학년 학생들을 위한 대수 규준에서는 규칙성을 이해하고 설명하는 것뿐만 아니라 규칙성을 예측하고 적용하며 더 나아가 일반화하는 과정까지도 포함하는 것을 볼 수 있다. 그리고 규칙을 설명하거나 표현하는 방법으로 언어, 표, 기호, 그래프, 변수 등의 사용이 권장됨을 알 수 있다. 여섯 번째 규준인 수의 성질 탐구는 전통적으로 대수 영역이 형식적인 기호 사용에 국한되었던 것에서 수의 성질과 관련한 경험과 탐구 내용을 포괄하는 영역으로 확대되었음을 알 수 있다.

나. 우리나라 교육과정에서의 대수 교육

초등학교 교육과정 해설서에서는 다음과 같이 수학과의 성격으로 규칙성과 관계에 대한 내용을 언급하고 있다(교육인적자원부, 1999, p. 16).

> 수학은 규칙성과 관계에 대한 내용을 다루는 교과로, 아동은 이러한 수학을 학습함으로써 자연과 사회 속에서 생활을 통하여 경험하게 되는 사상들로부터 그 안에 내재되어 있는 질서나 원리인 수학적 규칙성과 관계를 파악하게 되고, 따라서 이를 통하여 보다 바람직한 생활을 영위할 수 있는 정신적 능력을 얻게 된다.

본 연구에서 중점적으로 다루는 과제를 고려하여 초등학교 교과서에서 대수적 사고 요소와 관련이 깊은 단원 및 문항을 살펴보면, 1학년부터 대수적 사고와 관련한 내용을 다루지만, 초보적인 형태로서 대수적 사고가 의식적으로 드러나는 학년은 4학년부터로 볼 수 있으며, 대수적 사고 요소와 관련된 문항과 대수적 사고 요소를 제시하면 <표 1>과 같다(김성준, 2004, p.86).

<표 1> 초등학교 교과서에서 발견되는 대수적 사고 요소

번호	문항	문자와 식								방정식							
		양적인추론	변수	대수적인해석	변환추론	연산감각	관점의전환	대입	대수적인원리	양적인추론	미지수	등호해석과동치개념	분석적사고	비례적사고	관계파악능력	문제해결도구로인식	가역적사고
1	4가. p108	V		V	V		V										
2	4가. p112	V	V	V	V		V										
3	4나. p106	V	V	V				V									
4	4나. p110										V				V		V
5	4나. p111					V	V				V				V		V
6	5가. p126									V					V		
7	5가. p130									V	V				V		V
8	5가. p131		V												V		
9	5나. p124	V		V		V											
10	5나. p129			V				V			V				V		V
11	6가. p122			V							V				V		V
12	6가. p124			V						V					V		
13	6가. p132		V	V													V
14	6나. p125									V				V	V		
15	6나. p129						V				V		V		V		V

한편, 최근 개정된 교육과정(교육인적자원부, 2007) 에서는 대수와 관련된 '문자와 식' 및 '규칙성과 함수 영역'이 하나로 통합되어 '규칙성과 문제해결' 영역으로 바뀌었다. 개정된 교육과정에서 다루는 규칙성과 문제해결 영역의 내용은 <표 2>와 같다.

다음 표에서 알 수 있듯이 규칙성의 탐구 및 일반화와 관련된 내용이 1학년부터 4학년까지 4개 학년에 걸쳐 지속적이고 체계적으로 다루어진다. 변수 및 문자의 사용과 관련해서는 1학년에서부터 초보적인 변수 개념인 □가 도입 되고, 6학년에 이르러서는 문자 x가 도입되어 사용되는 것을 알 수 있다. 비와 비율은 6학년에서 5학년으로 이동하였고, 방정식 및 정비례와 반비례 는 중학교 1학년에서 6학년으로 이동하였는데, 이는 초등학교 때부터 비례적 사고 및 함수적 사고를 경험함으로써 이후 중· 고등학교 과정에서 보다 강력한 기반을 갖도록 할 뿐만 아니라 산술과 대수 사이의 연결성을

강조한 것으로 볼 수 있다. 이러한 개정 교육과정에서의 변화는 초등교육과정에서 대수적인 사고를 강조하는 국제적인 경향과도 일치한다.

<표 2> 개정된 수학과 교육과정에서 다루는 규칙성과 문제 해결 영역의 내용

1학년	2학년	3학년
규칙적인 배열에서 규칙 찾기 자신이 정한 규칙에 따라 배열하기 100까지의 수 배열표에서 규칙 찾고 말하기 □를 사용한 식 실제로 해보기, 그림 그리기, 식 만들기 등으로 문제를 해결하기	다양한 변화의 규칙 찾기 수 배열에서 규칙을 찾고, 규칙에 따라 수 배열하기 곱셈표에서 여러 가지 규칙 찾기 미지수 구하기 식 만들기 규칙 찾기, 거꾸로 풀기 등으로 문제를 해결하기	규칙에 따라 여러 가지 무늬 꾸미기 표 만들기, 예상과 확인 등으로 문제를 해결하기
4학년	**5학년**	**6학년**
다양한 변화 규칙을 수로 나타내고 설명하기 규칙을 추측하고 말이나 글로 표현하기 규칙적인 무늬 만들기 규칙과 대응 단순화하기, 논리적 추론 등으로 문제를 해결하기 문제 해결 과정 설명하기	비와 비율 하나의 문제를 여러 가지 방법으로 해결하기 주어진 문제에서 필요 없는 정보, 부족한 정보 찾기 문제 해결의 타당성 검토하기	방정식 비례식 연비와 비례배분 정비례와 반비례 문제 해결 방법 비교하기 문제의 조건을 바꾸어 새로운 문제 만들기 문제 해결 과정의 타당성 검토하기

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 연구 방법 개관

본 연구에서 적용한 방법론은 질적 사례연구이다. 이 방법론을 사용한 이유는 크게 세 가지로 요약할 수 있다. 첫째, 본 연구는 초등학교 4학년 학생들에게 대수적 사고 요소를 지도한 후, 지도 방법의 효과를 결과적으로 검증하는 데 초점을 두는 것이 아니라 문제 해결 과정에서 학생들이 실제로 대수적 사고를 어떻게 구성해 나가는지에 관심을 두기 때문에 사례 연구를 선택하였다. 둘째, 두 양 사이의 관계를 어떻게 탐구하여 규칙성을 인식하는지, 문제 상황을 어떻게 이해하여 수학적으로 모델링하는지, 파악한 수학적 관계를 대수 기호와 어떻게 연결하여 나타내는지, 그리고 학생들이 대수 기호를 사용하여 규칙을 일반화하는 과정에서 학생들이 범하는 오류 및 인지적 장애는 무엇인지를

자세히 설명하므로 사례 연구가 유용하다(방정숙, 2001; Yin, 2002). 셋째, 초등학생들에게 대수적 사고 개발에 초점을 두어 지도한 연구는 거의 없기 때문에 이와 관련한 기초 정보를 제공할 수 있다는 측면에서 사례 연구가 적합하다(Merriam, 1998).

2. 연구 대상

본 연구를 위해 서울시에 위치하고 있는 D초등학교의 4학년 1개 학급을 연구 대상으로 선정하였다. 초등학교 4학년 학생을 연구 대상으로 선정한 이유는 선행 연구 분석에서 기술하였듯이 초보적인 형태로서 대수적 사고가 의식적으로 드러나기 시작하는 학년이 4학년이기 때문이다.

D초등학교는 서울시에서 주택가에 위치한 학교로 학생들의 학력수준은 서울시에서 중위수준이며 가정의 사회·경제적 수준은 대체로 중위에 해당한다. 학급 학생은 남 16명, 여 12명으로 모두 28명이다. 이 학급은 기본적인 학습 훈련은 잘 이루어져 있으나 자신의 의견을 발표하는 데에는 다소 소극적이었다. 그러나 교사의 격려와 칭찬으로 수업이 진행될수록 많은 학생들이 발표에 보다 적극적으로 참여하는 경향을 보였다.

3. 자료 수집 및 분석

학생들의 대수적 사고를 알아보기 위하여 문자와 식 영역에 해당하는 문제 해결 단원을 분석한 후, 대수적 사고요소와 관련이 깊은 학습 단원 및 과제를 추출하였다. 그러나 교과서에 제시된 활동 내용을 보면, '문제 푸는 방법 찾기' 단원의 특성상 규칙을 찾고, 규칙을 일반화하는 과정보다는 문제를 간단한 상황으로 바꾸어 해결하는 문제 해결 전략에 초점을 두어 지도 되도록 과제가 구성되어 있다. 따라서 초등학생들이 규칙을 찾고 규칙을 일반화하는 과정과 두 양 사이의 관계를 찾고, 관계를 일반화 하는 과정에서의 대수적 사고의 특징을 탐구하는 데 초점을 둔 본 연구의 목적에 알맞게 교과서를 재구성하였다. 즉, 교수-학습의 활동 내용을 학생들이 충분히 사고하고, 자신의 사고를 자유롭게 표현하도록 하는데 초점을 두어 6차시를 구성하였다. 학습 주제는 1차시와 2차시는 규칙을 찾고, 규칙을 일반화하는 과제를 중심으로 구성하였고, 3차시와 4차시는 두 양 사이의 관계를 탐구하여 일반화하는 과제를 중심으로 구성하였으며 5차시와 6차시는 두 양 사이의 관계를 이용하여 미지의 값을 구하는 과제를 중심으로 구성하였다. 교수-학습 과정은 1차시와 3차시는 학생들의 다양한 비형식적 전략들을 탐구하는 데 초점을 두었고, 2차시와 4차시는 초보적인 형태로서 대수식으로 표현하는 것에 초점을 두었으며 5차시와 6차시는 방정식과 관련된 문제를 해결하는 학생들의 대수적인 전략에 초점을 두었다. 차시별 학습 주제 및 활동 내용은 <표 3>과 같다.

<표 3> 학습 주제 및 활동 내용

차시	학습 주제	문제 상황	활동 내용
1	규칙성 찾기	늘어나는 점의 규칙 찾기	• (n의 값이 5, 10일 때) 규칙 찾기 • 규칙 설명하기 • 예측하고 정당화하기
2	규칙성의 일반화	한 변에 놓이는 스티커의 개수에 따른 전체 스티커의 개수 규칙 찾기	• (n의 값이 3, 4, 10, 20개일 때)규칙 찾기 • 규칙 설명하기 • (n의 값이 500, □개일 때)규칙 일반화하기 • 식으로 나타내기
3	두 양 사이의 관계 찾기들	색 테이프를 자른 횟수와 도막의 수 사이의 관계	• 변하는 두 양 사이의 관계 찾아 표현하기 • 두 양 사이의 관계 설명하기
4	두 양 사이의 관계 일반화하기	형과 동생의 나이 사이의 관계	• 변하는 두 양 사이의 관계 찾기 • 표를 이용하여 두 양 사이의 관계 일반화하기 • 식으로 나타내기 • 두 양 사이의 관계 식(형=동생+3/ a=b+3)
5	미지의 값 구하기	축구 경기에서 올해 경기의 수 구하기	• 두 양 사이의 관계 이해하기 • 미지의 값 구하기
6	미지의 값 구하기	우표의 수 구하기	• 두 양 사이의 관계 이해하기 • 역연산 관계 이해하기 • 미지의 값 구하기

이와 같이 6차시로 구성된 수학 수업을 비디오로 촬영하였다. 비디오는 2대를 설치하였는데, 1대는 교사의 활동 위주로, 나머지 1대는 학생 활동 위주로 촬영을 실시하였다. 또한, 학생의 사고와 표현을 이해하는데 도움이 된다고 판단되는 경우에는 비구조화된 면담을 실시하였다.

본 연구의 학습 주제의 특성상 규칙성이나 관계의 일반화 과정이 중요하기 때문에 <표 4>에 제시된 바와 같이 대수적인 사고 요소를 중심으로 분석의 초점을 정하였다. 여기서 일반화 과정은 Friedlander와 Tabach(2001)의 규칙을 일반화하는 단계[1])를 본 연구에 알맞게 재구성한 것이다.

1) 규칙을 일반화하는 과정을 단계별로 살펴보면, 1단계는 일반화를 시작하는 단계로서 특별한 예가 학생들에게 주어지거나 또는 학생들 스스로 이러한 예들을 만든다. 2단계는 일반화를 형성하는 단계로서 주어진 것 외에 또 다른 예를 생각하고 해결한다. 그리고 이를 통해 일반화를 생각하게 된다. 3단계는 일반화를 명확하게 하는 단계로 관찰한 패턴을 언어 또는 기호로 기술한다. 4단계는 정당화의 단계로 일반화된 식에 구체적인 패턴을 적용하고 확인한다(Friedlander & Tabach, 2001).

<표 4> 분석의 초점

일반화 과정	분석의 초점	대수적인 사고 요소
■ 규칙성의 일반화 과정에 기초가 되는 사고	• 직접 점 배열을 놓아 보거나 그림으로 나타내어 봄으로써 다음에 올 점 배열의 개수를 정확하게 예측하고 구할 수 있는가? • 주어진 정사각형 모양의 점 배열의 배열을 각각 수로 나타내어 보고, 수가 늘어나는 규칙 찾아 다음에 올 점 배열의 개수를 바르게 예측하고 구할 수 있는가? • 주어진 정사각형 모양의 점 배열의 배열에서 규칙을 찾아, 언어로 설명할 수 있는가? • 주어진 정사각형 모양의 점 배열의 배열에서 규칙을 찾아, 수학적인 모델이나 식을 사용하여 설명할 수 있는가?	주어진 양에서의 규칙을 바르게 인식하고, 다음에 올 양을 예측할 수 있는가?
■ 규칙성의 일반화 과정에서의 대수적 사고	• 한 변에 놓이는 스티커의 개수가 늘어남에 따라 전체 양이 어떻게 변하는지에 대한 변화를 인식하는가? • 한 변에 놓이는 스티커의 개수가 주어졌을 때, 전체 양을 식으로 바르게 표현할 수 있다. • 규칙을 찾아 n의 값이 일반적인 수(변수)일 때의 상황을 n을 사용한 식으로 표현할 수 있는가? • 규칙을 일반화하여 n일 때의 상황을 식으로 표현할 수 있는가? • 일반화된 식에 구체적인 수를 대입하는 과정 통하여 일반화된 식에 구체적인 패턴을 적용하고 확인할 수 있는가?	양적인 추론 변수 대수적인 해석 변환 추론 관점의 전환
■ 두 양 사이의 관계를 일반화하는데 기초가 되는 사고	• 두 양 사이의 관계에 주목하여, 하나의 양이 주어졌을 때, 다른 양의 값을 구체 물을 이용한 활동이나 그림 그리기 등의 시각적인 표현을 이용하여 정확하게 예측하고 구할 수 있는가? • 하나의 양의 값이 변함에 따라 다른 양의 값이 어떻게 변하는지를 인식하고 말로 설명할 수 있는가? • 두 양 사이의 관계를 다양한 수학적 모델을 사용하여 표현할 수 있는가?	주어진 두 양 사이의 관계를 인식하기 위해 수학적 모델링이나 그림 등을 이용하여 관계를 표현할 수 있는가?
■ 변하는 두 양 사이의 관계를 일반화하는 과정에서의 사고	• 두 양 사이의 관계를 찾아 n의 값이 큰 수일 때의 상황을 예측하여 언어적으로 표현할 수 있는가? • 두 양 사이의 관계를 찾아 하나의 값이 큰 수일 때의 상황을 식으로 표현할 수 있는가? • 두 양 사이의 관계를 일반화하여 n일 때의 상황을 식으로 표현할 수 있는가? • 일반화된 식에 구체적인 수를 대입하는 과정 통하여 일반화된 식에 구체적인 패턴을 적용하고 확인할 수 있는가?	양적인 추론 변수 대수적인 해석 대입

Ⅳ. 학생들의 대수적 사고 분석

1. 규칙성의 일반화 과정에서의 사고 분석

가. 규칙성의 일반화 과정에 기초가 되는 사고

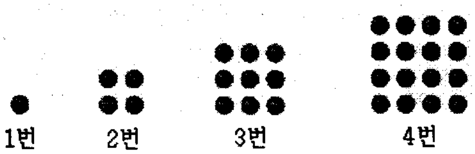
학생들이 규칙성을 탐구하는 과정, 즉 학생들이 주어진 과제에서 규칙을 어떻게 찾아내는지와 찾은 규칙을 어떻게 표현하고 설명하는지, 그리고 규칙 찾기에 실패하는 학생의 경우에는 실패 원인은

무엇인지에 초점을 두고 분석한 결과는 다음과 같다.

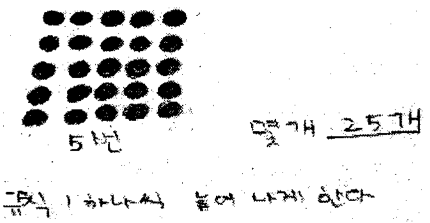
교사는 먼저 칠판에 <그림 1>과 같이 정사각형모양의 점 배열을 1번부터 4번까지 제시하고, 학생들에게 규칙을 찾아 5번에 놓이게 될 점 배열의 모양과 개수를 예상해 보도록 하였다. 이어서 개별 학습지에 자신이 찾은 5번 배열의 모양과 개수를 써 보고, 왜 그렇게 생각했는지, 규칙을 찾는 또 다른 방법은 없는지 등을 점검해보게 했다. 학생들의 개별 탐구 결과 28명의 학생 중, 단 한명을 제외한 27명이 학생이 5번째 놓이게 될 점 배열의 모양과 개수를 정확하게 맞추었고, 27명 중 20명이 5번 배열을 어떻게 구했는지에 대한 설명을 바르게 제시하였다.

학생들의 개별 탐구 활동이 끝나고, 전체 활동을 통해 학생들이 찾은 규칙을 설명하고 발표하는 시간을 가졌다. 몇몇 학생들의 발표와 수업 후 활동지 분석을 통해, 학생에 따라 사고 과정에는 질적인 차이가 있음을 알 수 있었다.

하위권에 속하는 학생들은 주어진 1번에서 4번까지의 점 배열에서 직관적으로 파악할 수 있는, 가로와 세로의 개수가 1개씩 증가한다는 점에 주목하여 5번의 점 배열을 먼저 그림으로 나타내었다. 그런 후 자신이 직접 그림으로 시각화한 5번 점 배열에서 점의 개수를 구하였다. 이 경우의 학생들은 <그림 2>에서와 같이 5번이 25개라는 것을 설명하기 위하여 그림을 동반하여 "하나씩 늘어나게 한다." 또는 "1줄에 1개씩 늘어나기 때문이다."와 같이 간단하게 설명하였다.

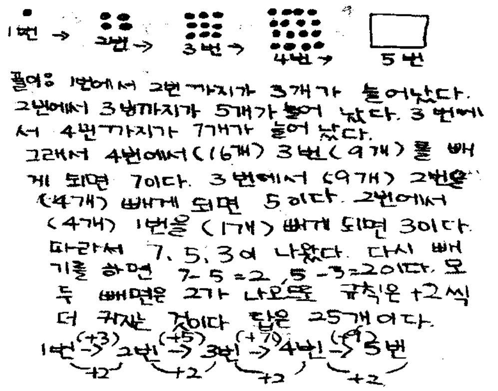


<그림 1> 학생에게 제시된 규칙 찾기 과제

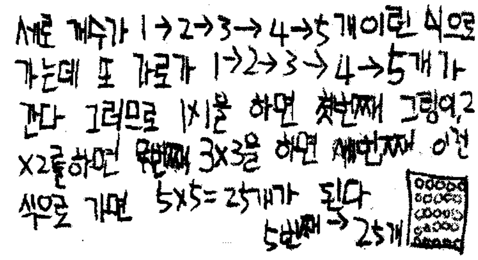


<그림 2> 시각화하여 답을 구한 학생의 예

중·상위권 학생들이 주로 사용한 방법으로 먼저 주어진 점의 배열이 몇 개의 점으로 이루어져 있는지를 각각 구한 후, 각 항의 개수가 몇 개씩 늘어나는지에 주목하여 규칙을 찾고, 찾은 규칙을 적용하여 5번의 점의 개수를 설명하는 경우가 있었다. 즉, 1번은 1개, 2번은 4개, 3번은 9개, 4번은 16개이므로, 늘어나는 개수만 보면, 1번에서 2번으로 가면서 점이 3개가 늘었고, 2번에서 3번으로 가면서 5개가 늘었으며, 3번에서 4번으로 가면서 7개가 늘었다. 즉, 각 항의 점의 수의 차이가 "3, 5, 7, 9, 11, 13,…"과 같이 2씩 일정하게 증가한다는 규칙을 찾아내고 이렇게 찾은 규칙을 설명하는 방법이다. 이와 같은 방법으로 설명한 학생의 예는 <그림 3>과 같다.



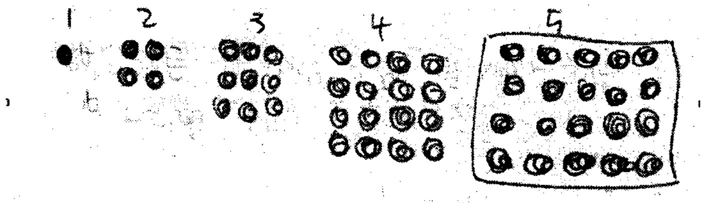
<그림 3> 순환적인 규칙을 찾아낸 학생의 예



<그림 4> 식을 이용하여 답을 구한 학생의 예

상위권 학생들이 사용한 방법으로 각 항의 점의 개수를 구하는 계산 방법을 고안하여 식으로 표현해 본 후, 5번에 적용하여 "5×5=25"의 식을 이용하여 구하는 것이다. 이것은 각각의 단계에서 한 변에 놓이는 점 배열의 개수와 전체 점 배열의 개수에서 함수적인 관계를 추론해 내는 초보적인 형태로 볼 수 있다(<그림 4> 참조).

규칙 찾기에 실패한 학생은 한 명이었는데, <그림 5>와 같이 가로 방향으로는 5개씩 그렸으나 세로 방향으로는 4개씩만 그리는 데 그쳤다. 이 학생의 경우 가로 방향과 세로 방향이라는 2차원에서의 변화에 주목하지 못하고 단지 섣부르게 한쪽 방향에서의 변화에만 주목하는 오류를 범하였다. 그러나 다른 친구들의 발표와 정답 확인과정을 거친 후부터는 자연스럽게 2차원의 변화 모두에 주목하였고, 후속 과제인 10번 점의 배열에서 점의 개수 찾기 활동에서는 정답을 구했다.



<그림 5> 규칙 찾기에 실패한 학생의 예

5번 점 배열에서의 점의 개수를 구하는 개별 활동이 끝난 후, 전체 학습의 형태로 찾은 규칙을 발표하는 시간을 가졌다. 그런데, <에피소드 1>에서 알 수 있듯이, 학생들이 규칙을 찾아 5번 점의 배열을 구할 수 있다는 것이 본 패턴(규칙성)을 일반화하는데 기초가 되지만, 이것을 일반화로 과대 해석해서는 안 된다는 것을 분명하게 보여준다. 또한, 단지 개별 학습지 활동에서는 관심의 초점이 되지 못했지만, 학생 사이의 토의 및 논쟁을 통해 규칙성의 일반화와 관련된 내용이 자연스럽게 학생들의 흥미와 호기심의 대상이 되는 교실 토론의 주제가 된 것은 주목할 만하다.

<에피소드 1: 찾은 규칙 발표하기와 학생들의 토론>

교 사 : 5번은 몇 개이며, 왜 그렇게 생각하는지를 발표해 봅시다.

학생A : 첫 번째는 1 곱하기 1을 하면 되니까 1이고요. 두 번째는 2곱하기 2를 하면 되니까 4가 되고, 세 번째는 3곱하기 3을 하면 되니까 9가 되요. 이런 식으로 다섯 번째를 하면 5곱하기 5를 해서 25가 되요.

교 사 : 이 학생이 찾은 규칙에 대해 어떻게 생각해요? 다른 의견 있나요?

학생B : 안 좋아요!

교 사 : 왜 안 좋다고 생각하는지 이유를 말해보세요.

학생B: <u>확실하지가 않아요. 그렇다면 백 번째에서 100 곱하기 100을 하여 10000개가 됩니까?</u>

학생들: (학생B의 말에 동조하여) 맞아!

교 사 : 그렇게 될까요?

학생들: (의견이 분분함, 웅성거림)

교 사 : 그렇게 될까요, 안될까요?

학생들: (여기저기서 몇 몇 학생들이) 되요! 되요!

교 사 : 그렇게 된다고 생각하는 사람 있나요?

학생들: (1/3정도 손을 듦)

교 사 : 그렇게 되지 않을 것이라고 생각하는 사람? (딱 1명 손을 듦)

학생C: 질문 있어요!

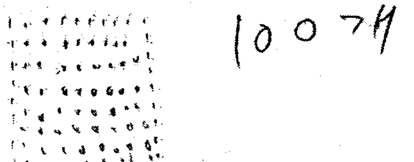
교 사 : 네, 질문해 보세요.

학생C: 그렇다면 계산이 더 복잡해지지 않습니까?

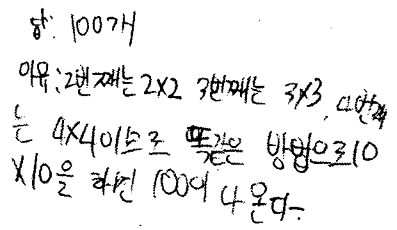
학생A: 곱하기만 하면 되는데...

학생C: 야! 55곱하기 55는 복잡하잖아?

학생들의 토론이 끝난 후, 교사는 학생들에게 어떤 해답을 제시하기 보다는 10번 점의 배열의 경우에는 몇 개의 점이 놓이게 될지를 개별적으로 탐구하고, 학습지에 설명해 보도록 했다. 이번에는 시각화하여 그림으로 나타낸 후 개수를 구하는 학생(<그림 6>참조)의 수는 줄었고, "10×10"이라는 식을 이용하여 개수를 구하는 학생(<그림 7>참조)의 수는 늘었다.



<그림 6> 시각화하여 답을 구한 학생의 예



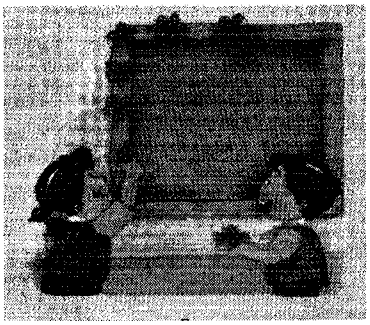
<그림 7> 식을 이용하여 답을 구한 학생의 예

학생들이 규칙성을 인식하고 탐구하는 과정에 초점을 두어 분석한 결과를 통해 알 수 있듯이, 초등학교 4학년 학생들은 규칙성을 탐구하고 설명하는 방법과 수준은 다양했으나, 2차원으로 늘어나는 점 배열에서의 규칙성을 쉽게 인식할 수 있었으며, 그림이나 언어 및 수식을 사용하여 적절하게 설명할 수 있었다. 즉, 직접 점 배열을 그림으로 나타내어 세어 보거나 주어진 점 배열의 수 변화에 주목하여 늘어나는 규칙 찾을 수 있었고, 찾은 규칙을 바탕으로 다음에 올 점 배열의 개수를 정확하게 예측하거나 구할 수 있었다. 또한 규칙을 나름대로의 언어 표현을 사용하여 설명하는 데 대체로 성공적이었고, 상위권의 학생들은 점 배열에서 점의 개수를 구하는 방법에서의 규칙을 (배열의 가로에 놓이는 점의 개수)X(배열의 세로에 놓이는 점의 개수)로 일반화하여 "2X2, 2X2, 2X2이므로 똑같은 방법으로 10X10을 하면 100이 나온다."와 같이 설명할 수 있었다.

나. 규칙성의 일반화 과정에서의 대수적 사고

학생들이 규칙성을 찾는 과정뿐만 아니라 규칙성을 일반화하여 문자를 사용한 식으로 표현하는 과정을 통해 학생들의 대수적 사고에 초점을 두어 분석한 결과는 다음과 같다.

수업에 사용된 주요 과제는 <그림 8>과 같이 정사각형 모양의 칠판 테두리에 스티커를 붙이는 문제 상황으로 한 변에 놓이는 스티커의 개수가 점차 증가함에 따라 전체 변에 놓이는 스티커의 개수가 어떻게 증가하는지에 대한 규칙성을 찾는 것이다. 수업의 첫 단계는 한 변에 붙이는 스티커의 개수가 3개일 때 전체 스티커의 개수를 찾는 것에서부터 시작되었고, 수업의 마지막 단계에는 한 변에 놓이는 개수가 □개일 때, 전체 필요한 스티커의 개수를 일반화된 식으로 표현해 보는 것까지 전개하였다. 교사는 먼저 교실 정면에 정사각형 모양의 칠판을 제시하고, 칠판의 한쪽 변에만 스티커 3개를 붙여 보이며 한 변에 놓이는 스티커의 개수가 3개일 때, 전체 스티커의 개수는 몇 개가 될지를 예상해보고 몇 개인지와 그렇게 생각한 이유를 발표해보게 하였다.



<그림 8> 스티커 붙이기

비록 숫자가 작은 간단한 문제 상황이었지만, 학생들은 칠판에 직접 붙여본다거나, 그림을 그려 시각화해본다거나, 구체적인 조작활동을 해본다거나 등의 활동을 하지 않고 단지, 머릿속으로만 예상해 보아야 했기 때문에 자신의 사고 활동의 결과를 자신 있게 말하는 학생이 없었다. 그리고 <에피소드

2>에서와 같이 8개 라고 생각하는 학생과 12개 라고 생각하는 학생의 두 부류로 나뉘어 서로 혼란스러워하였다. 이와 같이 학생들에게 구체적인 조작활동(직접 붙여보기, 그림 그리기 등) 없이 전체 개수가 몇 개인지 예상해보고 답해보게 했을 때에는, 규칙이 무엇인지 그리고 전체 개수가 몇 개인지를 명확하게 구하지 못했다. 그러나 직접 스티커를 붙여보라고 했을 때, 주저 없이 나서서 붙여 보임으로써 문제 상황에 대해서는 이해하고 있음을 파악할 수 있었고, 더불어 이렇게 직접 붙여보고 세어보는 과정을 통해서는 아주 명쾌하게 8개라는 것을 구해내었다. 이런 학생들의 발표 과정과 분석을 통해 학생들은 규칙을 찾는 첫 단계로 '직접 행해보고 하나하나 세어보기'와 같은 활동을 통하여 규칙을 더 명확하게 인식하는 특징을 보였다.

<에피소드 2> 학생들이 구체적인 활동을 통해 규칙을 인식하는 과정

교 사: 한 변에 3개가 되도록 붙이려고 해요. 마찬가지 방법으로 다른 변에도 3개씩 되도록 붙이려고 해요. 자 이렇게 하려면, 스티커가 모두 몇 개가 필요할까요?

--- 중 략 ---

학생들: (자리에 앉은 채, 작은 목소리로) 8개야,. 12개야...

교 사: 왜 그렇게 생각했어요?

학생들: (의견이 분분함) 8개야,. 12개야...

교 사: 자 누가 직접 나와서 붙여 볼 사람 있나요?

학생들: <u>붙여본다고요? 이유는 말 안 해도 되요? 붙이기만 할 거죠?</u>

교 사: 그래 좋아요. 붙이기만 해보자.

학생들: (다수가 손을 든다.) 저요! 저요!

교 사: 네, 여기 친구 한번 해보자.

학생D: (칠판에 스티커만 붙이고 자기 자리로 돌아감)

교 사: 자. 그럼 같이 한번 세어볼까요?

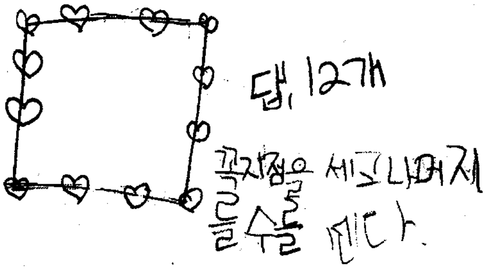
학생들: <u>(큰 소리로) 하나, 둘, 셋, 넷, 다섯, 여섯, 일곱, 여덟.</u>

교 사: 모두 몇 개죠?

학생들: <u>(모두 큰 소리로) 8개요.</u>

교사는 두 번째 단계의 과제로 한 변에 4개씩 붙이려면 스티커가 모두 몇 개가 필요한지를 물었고, 이번에는 학생들에게 미리 나누어준 개별 학습지에 표현해 보도록 하였다. 학생들이 답을 구하는 방법은 다양했는데, 종이에 먼저 칠판을 나타내는 사각형을 그린 후, 각 변에 4개의 하트 그림을 그리고 일일이 세어서 답을 구하는 학생이 가장 많았다(<그림 9> 참조).

몇몇 학생은 한 변에 3개씩 붙이려면 8개가 필요하다는 사실을 이용하여 구했다. 즉, 한 변에 4개씩 붙이는 경우는 한 변에 3개씩 붙이는 경우보다 한 변에 1개씩 더 붙여야 하는데, 사각형은 변이 4개이므로 결국 한 변에 3개씩 붙이는 경우보다 스티커가 4개가 더 필요하다는 것을 이용하여 과제를 해결하였다. 이것은 한 변에 1개가 늘어날 경우, 전체 개수는 4개가 더 늘어난다는 것을 추론해낸 것으로 학생들은 이것을 다음과 같이 설명했고, '8+4=12'라는 식으로 표현하였다(<그림 10>참조).



<그림 9> 시각화하여 답을 구한 학생의 예

이유: 한 변의 길이가 3개인데 그러면 8개니깐 4개를 더 붙이면 8+4=12 이니까 12개가 나왔다.
답: 12개

<그림 10> 순환적인 규칙을 찾아낸 학생의 예

또, 몇몇 학생들은 이 과제에서의 한 변에 놓이는 스티커의 개수와 전체 변에 놓이게 되는 총 필요한 스티커의 개수 사이의 관계를 곱셈 상황으로 해석하여 해결하였다. 즉, 한 변에 4개씩 놓이는 경우, 사각형의 변이 모두 4개이므로 4×4를 하여 16개를 구하고, 꼭지점에 중복되어 놓이는 스티커의 수를 빼어 16-4로 답을 구했다(<그림 11>, <그림 12> 참조).

1변에 4개면 4×4=16인데 모서리 4개를 빼면 16-4=12가 된다.

<그림 11> 식을 이용한 학생의 예 1

한변에 4개를 붙인다면 4변이니깐 4×4를 한다음 꼭지점이 겹치는 4개의 하트를 빼서 식은 4×4-4를 하면 답을 구할 수 있다.
(답) 12개

<그림 12> 식을 이용한 학생의 예 2

한변에 4개씩 붙히려면 한 변 4개이니까 꼭지점이 4개니까 4×4=16-4=12 12개이다

<그림 13> 잘못된 식으로 표현한 학생의 예

그런데 주목할 것은, 수업에서 학생들은 한 변에 놓이는 스티커의 개수와 그에 따라 필요한 전체 스티커의 개수 사이의 관계를 식으로 표현하는 데 있어서 <그림 11>의 '4×4=16, 16-4=12'와 같이 두 단계에 걸쳐 식을 표현하는 학생들이 <그림 12>의 '4×4-4'와 같이 하나의 식으로 표현하는 학생들 보다 훨씬 더 많았다. 또한, 두 단계의 연산을 하나의 식으로 나타내려는 시도도 보였다. 그러나 이 과정에서 학생들은 등호(=)의 개념을 왼쪽의 식을 계산하여 결과를 =의 오른쪽에 나타내는 것으로 해석하여, 잘못된 등식을 이끌어내는 경우도 있었다(<그림 13>참조).

학생들의 발표와 교실 토의를 거듭할수록 '4×4-4'와 같이 하나의 식으로 표현하는 학생이 늘었다.

수업 사례에서 칠판의 한 변에 3개씩 붙이는 경우와, 4개씩 붙이는 경우, 그리고 10개씩 붙이는 경우에 대하여 전체 필요한 스티커의 개수를 구하는 활동을 한 후에, 학생들에게 한 변에 □개씩 붙이는 경우에는 모두 몇 개의 스티커가 필요한지에 대해 탐구하도록 하였다. 그러나 학생들은 도무지 무엇을 어떻게 해야 할지 몰라 했다(<에피소드 3>참조).

<에피소드 3> 추가적인 활동 없이 □를 사용하여 일반화를 시도하는 과정
교 사: 한 변에 □개를 붙인다면, 전체 필요한 것은 몇 개로 표현할 수 있을까요?
학생들: 네?
교 사: 한 변에 □개다. 그럴 때 전체 필요한 개수를 □를 사용해서 나타낼 수 있을까요?
학생들: (무반응)
교 사: 어려운가요?
학생들: 네~.
교 사: 자 그렇다면, 이번에는 한 번 더, 아주 큰 숫자로 해보자. 한 변에 500개
학생들: 와~!
교 사: 한 변에 500개씩 붙인다면 어떨까?
학생들: 방법 두 개로 해요?
교 사: 응. 한 변에 500개라면 어떤 식으로 나타낼 수 있을까?
학생들: (학생들은 학습지에 활동한다.)
교 사: 자! 그럼 식을 한번 세워볼까요? 한 변에 500개라면 식을 어떻게 세울 수 있을까요?
학생들: (학생들이 함께 대답하고, 교사는 불러주는 데로 적는다.) 500×4-4=1996
교 사: 자 또 다른 방법은요?
학생들: 499×4=1996

그러나 추가적인 활동(한 변에 20개씩 붙이는 경우에 대해 알아보는 활동, 한 변에 500개씩 붙이는 경우에 대해 알아보는 활동, 그리고 각각의 경우에 구한 식에서 공통점을 찾는 활동)을 한 후에는 무엇을 어떻게 해야 하는지에 대해 자신감을 가졌다(<에피소드 4>참조).

<에피소드 4> 추가적인 활동 후에 □를 사용하여 일반화를 시도하는 과정
교 사: 한 변에 □개가 있다면, 전체의 개수는 식으로 어떻게 나타낼 수 있을까요?
학생들: 아! (몇몇 학생들이 손을 든다.)
교 사: 자 한번 나와서 해보자. 자. 우리 함께 보면서 또 다른 방법이 있는지 생각해 보자.
학생들: (학생이 칠판에 쓴다) □×4-4 / □-1×4
교 사: 자 첫 번째 식에 대해서, 여러분은 어떻게 생각해요?
학생들: (대부분의 학생들이 고개를 끄덕이며) 맞아요.

문자(변수)를 도입하기 전 활동으로 □를 사용하여 식으로 표현하는 것은 초등학생들에게 적절한 대수 지도 방법이다. 그러나 본 수업에서 알 수 있듯이 찾은 규칙을 식으로 표현해보는 충분한 활동과 그런 식 사이의 관계에서 공통점을 탐구하는 과정 없이 섣부르게 문자(□)를 도입하는 것은 학생들에게 난처한 상황만을 제공할 수 있으므로 교사의 각별한 주의가 요구된다. 즉, 규칙을 찾고 규칙을 일반화하여 식으로 표현하는 과정에서는 학생들이 규칙을 인식할 수 있는 충분한 활동을 제공하고, 각 경우들 사이의 공통점을 인식한 후에 일반화하도록 활동을 단계별로 제시할 필요가 있다. 또한, 학생들이 여전히 어려워할 경우 무리하게 일반화를 시도하기 보다는 좀 더 충분한 사례 경험을

통해 서서히 접근해야만, 학생들이 문자와 문자식에 대한 거부감 없이 일반화에 접근할 수 있다.

그런데, 여기서 주의 깊게 살펴 볼 것은 위의 <에피소드 4>에서 학생이 쓴 식 '□-1×4'에서, 왜 학생들이 이와 같은 오류에 범했을까 하는 것이다. 한 변에 10개, 20개, 500개일 때, 필요한 스티커의 개수를 식으로 <그림 14>와 같이 나타낼 수 있고, 각각의 경우가 모두 옳다.

한 변에 10개씩 붙일 때	한 변에 20개씩 붙일 때	한 변에 500개씩 붙일 때
10×4-4=36 9×4=36	20×4-4=76, 19×4=76	500 × 4 - 4 = 1996 499 × 4 = 1996

<그림 14> 한 변에 10, 20개, 500개일 때의 식

그러나 한 변에 □개일 때, 필요한 스티커의 개수를 식으로 나타낼 때에는 학생들이 예기치 못한 상황이 발생한다. 즉, 위와 같은 방식으로 □개 일 때 필요한 스티커의 개수를 식으로 구하면, □의 4배에서 4를 빼거나(□ × 4 - 4), □에서 1을 뺀 후 4를 곱하면(□-1 × 4) 된다. 그러나 첫 번째 경우의 식은 옳지만, 두 번째 경우의 식은 옳지 않다. 그러나 <에피소드 5>와 같이 이 부분에 대한 문제를 인식하고 지적하는 학생은 한명에 불과했다.

<에피소드 5> □에서 1을 뺀 후 4를 곱하는 것을 □-1 × 4로 나타낼 수 없음을 인식하는 과정

교 사 : 그렇다면, 한 변에 □개가 있다면, 전체의 개수는 식으로 어떻게 나타낼 수 있을까요? 한 변에 □개라면 말이에요.

학생E : 아! (손을 든다.)

교 사 : 자 한번 나와서 해봅시다. 자. 우리 함께 보면서 또 다른 방법이 있는지 생각해 봅시다.

학생E : (칠판에 다음과 같이 쓴다.)

□×4-4 □-1×4

교 사 : 자 첫 번째 식에서, 여러분은 어떻게 생각해요?

--- 중 략 ---

학생F : (일어나서 발표) 아니요. 저기요. 두 번째 식에서, 앞에서부터 계산을 하려면요. 앞에 괄호를 해야 되요.

교 사 : 자 어떻게 생각해요? 무슨 얘기죠?

학생들 : (몇 명이 끄덕끄덕하며) 아~아~

교 사 : 자 다시 한 번 말해볼까요?

학생F : 저 식에서는 곱하기 보다는 빼기를 먼저 해야 되잖아요. 그러려면 앞에 괄호를 해야 되요.

교 사: 괄호를 어디에 어떻게 해야 하는지, 앞에 나와서 직접 해볼래요? 칠판에 직접 해보세요.

학생F : (두 번째 식에 괄호를 그려 넣는다.) (□-1)×4

교 사 : 자 혹시 이 식에 대해서 질문이 있는 사람 있나요?

학생들 : (없음)

교 사 : 그러면 아까 그 식 '□-1×4'과 이 식'(□-1)×4' 중에서 어느 것이 맞다고 생각해요?
학생들 : ('(□-1)×4'를 가리키며...) 이 방법이요.
교 사 : 네. 그래요. 아까도 참 잘했어요. 잘 했는데, 괄호가 필요해서 더 그려 넣어야 된다는 이야기죠?
학생들 : 네.
교 사: 자, 그러면, 여기 이 문제와 관련해서, 한 변에 몇 개를 놓든 다 자신 있게 풀 수 있겠어요?
학생들: (대부분 큰 소리로) 네.

위의 에피소드에서 알 수 있듯이, 규칙성을 일반화하여 식으로 표현하는 과정에서 성공하기 위해서는 먼저 연산 영역에서 다루어지는 주제인 연산에 대한 감각과 적절한 연산을 사용하여 식으로 표현하는 능력 및 연산 순서에 대한 지식과의 서로 적절하게 연결되어야 할 필요가 있다.

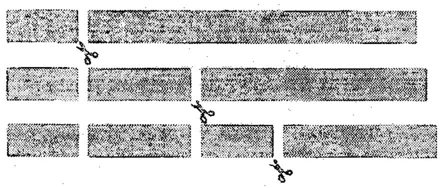
학생들이 규칙성을 일반화하는 과정에 초점을 두어 분석한 결과를 통해 알 수 있듯이, 학생들은 한 변에 놓이는 스티커의 개수가 늘어남에 따라 전체 양이 어떻게 변하는지에 대한 규칙을 탐구하는 과정에서 말 또는 언어화된 설명보다는 문제 상황에 알맞게 구체물이나 그림을 사용하여 직접 양을 세어보는 활동을 통해 규칙을 더 쉽게 인식함을 알 수 있었다. 또한, 한 변에 놓이는 스티커의 개수가 3개, 4개, 10개로 주어졌을 때, 전체 스티커의 개수를 구하기 위하여 그림을 그려서 세어보거나, 전 항의 개수에 4개씩을 더 더하는 방법으로 구하는 학생이 눈에 띄었고, 활동 시간도 몇 분 정도 소요되었으나, 한 변에 놓이는 스티커의 개수가 20개 및 500개로 주어졌을 때에는, 앞에서 찾은 규칙을 적용하여 식으로 계산하는 경향이 지배적이었고, 거의 질문이 제기됨과 동시에 전체 필요한 스티커 개수를 "500×4-4"로 표현해 버렸고, 학생들의 관심사는 "500×4-4"의 식의 값이 무엇인지에 대한 계산에 더 치중하였다. 또한, 한 변에 놓이는 스티커의 개수가 □개로 주어졌을 때에는 대부분의 학생들이 자신 있게 "□×4-4"로 표현할 수 있었다. 그런데, 여기서 주목할 것은 학생들은 "500×4-4"의 경우에는 식의 값을 계산하려고 애썼으나, "□×4-4"를 계산하려고 시도하는 학생은 한 명도 없다는 것이다.

2. 두 양 사이의 관계를 일반화하는 과정에서의 사고 분석

가. 두 양 사이의 관계를 일반화하는데 기초가 되는 사고

학생들이 변하는 두 양 사이의 관계를 탐구하는 과정 즉, 주어진 과제에서 두 양 사이의 관계를 어떻게 찾아내는지와 찾은 관계를 어떻게 표현하고 설명하는지, 그리고 관계 찾기에 실패하는 학생의 경우에는 실패 원인은 무엇인지에 초점을 두고 분석한 결과는 다음과 같다.

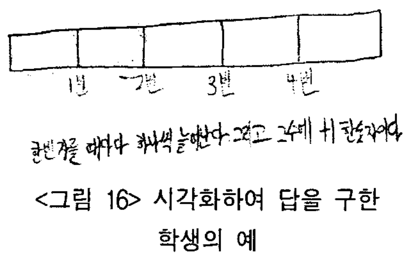
변하는 두 양 사이의 관계를 찾고, 수학적 모델링을 사용하여 변화를 표현하는 학생들의 사고 과정을 탐구하기 위해 사용된 주된 과제는 <그림 15>와 같이 색 테이프를 가위로 자르는 그림과 함께 제시되어 있고, 한 번 자르면 색 테이프가 두 도막이 되고, 두 번 자르면 세 도막이 되면서 한 번씩 자를 때마다 색 테이프가 몇 도막이 되는지 알아보는 것이다.



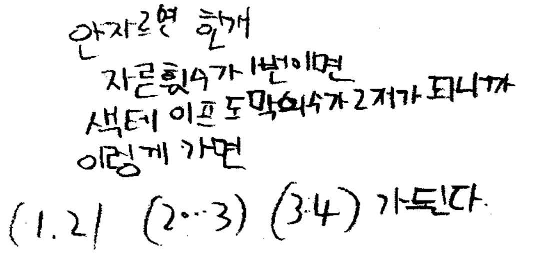
<그림 15> 색 테이프 자르기

교사는 칠판에 <그림 15>를 제시하고, 학생들에게 "하나의 색 테이프를 가위로 한 번 잘랐더니, 두 도막이 되었고, 한 번 더 잘랐더니 3도막이 되었네요. 이와 같은 방법으로 색 테이프를 자를 때, 자른 횟수와 도막의 수 사이의 관계를 찾아보고, 나름대로의 방법으로 표현해 보세요". 학생들은 두 양 사이의 관계에서 규칙을 찾기 위해 다양한 방법의 수학적 모델을 창안해 낸다. 학생들에게 규칙을 찾아보고, 찾은 규칙을 종이에 써 보게 했는데, 표현 방법의 특징에 따라 크게 네 가지 유형으로 나누어 볼 수 있었다.

첫째, 색 테이프의 모양을 그림으로 그리고 잘랐을 몇 개의 조각으로 나누어지는지를 일일이 세어서 구한 경우가 있었다(<그림 16>참조). 이 경우의 학생이 두 양이 함께 변한다는 것을 인식해 나가는 과정을 잘 표현해 주는데, 이 학생은 색 테이프 모양의 그림을 그려 놓고, 연필로 세로선을 한 획씩 그어 나가면서 도막의 수가 어떻게 변하는지에 초점을 두고, 처음에는 "한 번 자를 때마다 하나씩 늘어난다."와 같이 일상 언어로 변하는 양에 대해 기술했고, 이어서 "+1한 숫자이다"와 같이 "+" 기호와 숫자 "1"을 사용하여 변화를 표현하려고 시도했다.



<그림 16> 시각화하여 답을 구한 학생의 예

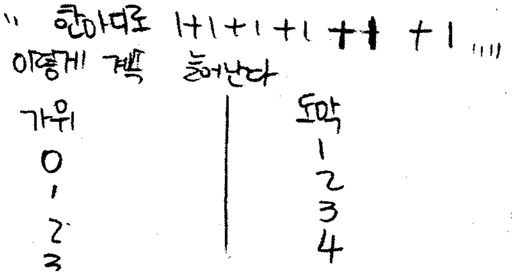


<그림 17> 두 양을 기록하고 조직하기 위한 순서쌍의 초보적 형태를 사용한 학생의 예

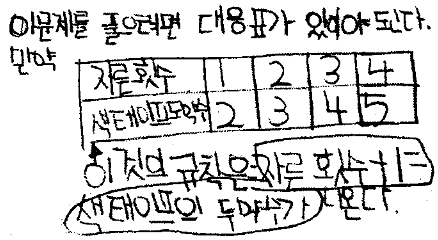
둘째, <그림 17>과 같이 변하는 두 양 사이의 관계를 언어로 기술하고, 순서쌍으로 표현한 경우가 있었다. 이 경우의 학생은 특정한 몇 개의 예에 대한 탐구를 통하여, "안 자르면 한 개, 자른 횟수가 1번이면 색 테이프 도막의 수가 2개가 되니까, 이렇게 가면…".에서와 같이 두 양이 함께 변해 나간다는 것에 주목하였다. 그리고 이렇게 함께 변하는 두 양을 적절하게 표현하기 위해서는, 두 양을 짝을 지어 나란히 표현해야 할 필요성을 인식하였다. 이에 변하는 두 양을 순서쌍으로 나타낸 것이다. <그림 17>의 학생의 표현 중 '(2…3)'에서 알 수 있듯이, 비록 수학적으로 정확하게 순서쌍을 사용

한 것은 아니지만, 변하는 두 양 사이의 관계를 적절한 수학적 모델을 사용했다는 면에서 상당한 의미가 있다.

셋째, <그림 18>과 같이 늘어나는 규칙을 "한 마디로 "1+1+1+1+1, 이렇게 계속 늘어난다."와 같이 언어와 수식으로 표현한 경우가 있었다. 이 학생의 경우 비록 완전한 형태의 표는 아니지만, 관련 있는 두 양끼리 줄을 맞추어 세로 방향으로 기록해 놓았으므로, 표의 일종을 볼 수 있다. 즉, 수평 도표 형태의 수학적 모델을 고안하여 변하는 두 양 사이의 관계를 적절하게 표현하였다.



<그림 18> 두 양을 기록하고 조직하기 위해 수평 도표의 초보적 형태를 고안한 학생의 예



<그림 19> 원시적인 형태의 변수 개념을 사용하여 식으로 표현한 학생의 예

넷째, <그림 19>과 같이 몇 개의 특정한 경우의 예들을 표에 정리하고, 표를 이용하여 두 양 사이의 관계를 찾아 '자른 횟수 + 1= 색 테이프의 도막 수'라는 식으로 설명한 경우가 있었다. 이 학생이 식에서 사용한 "자른 횟수', '색 테이프'의 낱말은 후속의 대수 교육을 통해 x, y등의 변수로 발전될 가능성이 있는 개념으로 변수의 원시적인 형태에 해당한다고 볼 수 있다.

변하는 두 양 사이의 관계를 찾고, 수학적 모델링을 사용하여 변화를 표현하는 과정의 분석을 통해 다음을 알 수 있었다. 먼저, 학생들은 두 양 사이의 관계를 찾기 위해 특정한 경우에 해당하는 몇 개의 예에 대한 탐구가 선행되어야 했는데, 하나의 양이 주어졌을 때, 그에 대응하는 양을 짝지어 보고, 다시 또 다른 하나의 양이 주어졌을 때, 그에 대응하는 양을 짝지어 보는 활동을 연속적으로 반복하면서 하나의 양의 변화가 그에 대응하는 양의 변화에 어떤 영향을 미치는지를 인식해 갔다. 그런 후 찾은 관계에서의 규칙을 확인하는 과정을 거친 후, 두 양 사이의 관계에 대해 점차 확신을 갖게 되었다. 그리고 그런 확신은 경험하지 않은 특정한 예로서 하나의 양이 주어졌을 때, 그에 대응하는 양을 재빠르게 찾아내는 것으로 나타났다.

나. 변하는 두 양 사이의 관계를 일반화하는 과정에서의 사고

학생들이 변하는 두 양 사이의 관계를 일반화하고, 변하는 두 양 사이의 관계를 문자를 사용한 식으로 표현하는 과정을 통해 학생들의 대수적 사고가 어떻게 드러나는지에 초점을 두어 분석한 결과는 다음과 같다.

교사는 먼저 칠판에 <표 5>를 그린 후 "형의 나이가 10살일 때, 동생이 나이는 7살이었습니다. 형의 나이가 11살이면 동생의 나이는 몇 살이 될까요?" 라고 질문한다.

<표 5> 형과 동생의 나이 사이의 관계

형의 나이	10	11			
동생의 나이	7				

<표 6> 표를 완성한 학생의 예

형의 나이	10	11	12	15	20
동생의나이	7	8	9	12	17

학생들은 8살이라고 답하고, 교사는 표에 8이라고 써 넣는다. 그 후, 학생들에게 개별 학습지에 그려진 표를 이용하여, 빈칸을 마음대로 채워보면서, 형의 나이와 동생의 나이 사이의 관계를 찾아보도록 했다. 학생들은 개별 학습지에 <표 6>과 표를 완성해가며, 변하는 두 양 사이의 관계에 주목하기 시작하였다.

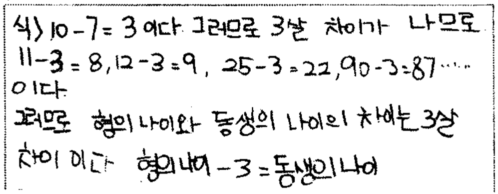
개별 탐구가 끝난 후, 전체 활동을 통해, 세 명의 학생에게 앞으로 나와 칠판에 직접 빈 칸을 채워보게 한다. 세 명의 학생들은 <표 5>의 빈칸에 100과 97, 13과 10, 14와 11을 각각 쓰고 자리로 들어간다. 교사는 학생들이 완성한 표를 학생들과 함께 보면서 친구들이 앞에 나와서 쓴 숫자들이 다 맞는지 물었다. 학생들은 일제히 그렇다고 답한다. 교사는 다시, 학생들에게 답이 맞았다는 것을 어떻게 확신할 수 있는지에 관하여 <에피소드 6>과 같이 교실 토론을 통해 두 양 사이의 관계를 일반화한다.

<에피소드 6: 두 양 사이의 관계를 일반화하는 과정에 대한 교실 토론>

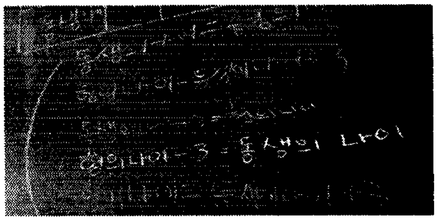
형의 나이	10	11	100	13	14
동생의 나이	7	8	97	10	11

교 사: "형이 13살일 때 진짜 동생이 10살일까요?"
학생들: (자신 있게) 네.
교 사: 형이 100살일 때, 정말 동생이 97살일까요?
학생들: (자신 있게) 네.
교 사: 그것을 어떻게 알아?
학생들: 세 살 차이니까요.
교 사: 형이 100살이 될 때까지 기다려 봐야 알 수 있는 것 아니에요? 형이 지금 10살이니까, 형이 100살이 될 때까지 한 90년은 기다려봐야 확실히 알 수 있지 않을까요?
학생들: (어이없다는 듯이) 아니요. 빼기 3하면 되요.
교 사: 빼기 3하면 되나요?
학생들: 형의 나이에서 빼기 3을 하면 동생의 나이가 되요.
교 사: 자 그렇다면요, '형의 나이'와 '동생의 나이'라는 말을 넣어서 식으로 나타내어 볼 수 있을까요? 형의 나이와 동생의 나이 사이의 관계를 직접 식으로 나타내어 보세요.

위의 에피소드에서 볼 수 있듯이, 교사는 학생들의 형의 나이와 동생의 나이 사이의 관계에 대한 명확한 이해를 바탕으로, 학생들이 두 양 사이의 관계를 식으로 표현해 보도록 독려한다. 학생들은 개별 학습지에 두 양사이의 관계에 대해 <그림 20>와 같이 표현했다.



<그림 20> 두 양 사이의 관계에 대한 학생의 표현의 예



<그림 21> 칠판에 두 양 사이의 관계를 식으로 표현한 결과

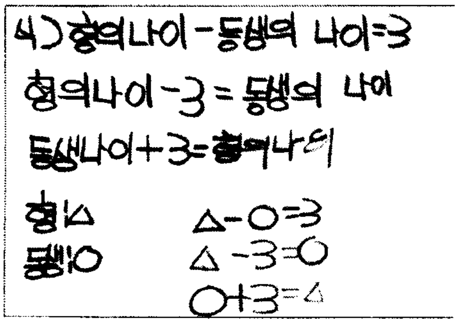
학생들의 개별 탐구가 끝난 후, 교사는 다시 전체 활동을 통해 각각이 고안한 두 양사이의 관계에 대한 식을 칠판에 써 보도록 했다. 대표로, 5명의 학생들이 칠판에 <그림 21>과 같이 썼다. 교사는 <에피소드 7>에서와 같이 칠판에 제시된 식들의 장점과 단점에 관하여 토의했다. 대다수의 학생들이 이런 말로 쓴 식들은 "쓰기 힘들어요."라고 말한다. 그리고 학생들이 스스로 긴 말을 대신하여 간단한 기호를 사용할 것을 제안하였다.

<에피소드 7: 기호로 된 식의 필요성을 제기하는 학생들의 토론>

교 사: 자, 이식들의 장점은 무엇일까요?
학생들: (반응이 없다.)
교 사: 그러면, 이 식들의 단점은 무엇이 있을까요?
학생들: (대부분의 학생들이 큰 소리로) <u>쓰기 힘들어요.</u>
교 사: 쓰기 힘들어요? 그럼 어떻게 하면 좋을까요? 쓰기 힘든 것을...
학생들: <u>기호로 나타내요.</u>
교 사: 기호로 나타내요? 어떻게요?
학생들: <u>□나 △로요.</u>
교 사: □나 △로요? 무엇을요?
학생들: 형의 나이와 동생의 나이요.
교 사: 누가 한 번 앞에 나와서 칠판에 직접 해볼래요? 그리고 나머지 학생들은 개별 학습지에 각자 해봅시다.
학생A: <u>□=△-3</u>

위의 에피소드에서 알 수 있듯이, 학생들은 '(형의 나이) = (동생의 나이) +3'과 같이 낱말을 넣어 두 양사이의 관계를 식으로 표현하는 경우에 사용상의 불편함을 지적하면서, '형의 나이'와 '동생의

나이'라는 낱말 대신 □와 △ 등의 기호를 사용하여 '□ = △ - 3'과 같은 식으로 나타낼 것을 제안했다. 이것은 학생들 스스로가 기호 사용의 편리함을 인식하고, 변하는 두 양을 구체적인 수가 아니라 일반적인 수를 대상으로 하는 초보적인 형태의 변수 사용을 시도했다는 점에서 의미가 있다.



<그림 22> ○, △의 기호를 사용하여 두 양사이의 관계를 식으로 표현한 학생의 예

개별 학습지 분석을 통해 학생들의 기호 표현을 분석한 결과, 학생들은 □나 △이외에도 ♥, ★, ○ 등을 사용하였음을 알 수 있었다. 그리고 형의 나이를 △로, 동생의 나이를 ○로 표현하여 식으로 나타낸 <그림 22>에서 두 양 사이의 관계를 '△-○=3, △-3=○, ○+3=△'의 세 개의 식으로 표현한 것과 같이, 학생들은 다양한 형태의 식을 사용하여 두 양 사이의 관계를 표현하는 데 성공적이었다.

두 양 사이의 관계를 일반화하는 과정에서의 학생들의 사고와 표현 방법을 분석한 결과 다음을 알 수 있었다. 학생들은 먼저, 두 양 사이의 관계를 탐구하기 위해 형의 나이가 10, 11과 같이 특정한 수 값에 대해 살펴보며 형의 나이와 동생의 나이 사이의 양적 관계를 일반화하기 시작했는데, 두 양 사이의 관계가 점차 명료해질수록 형의 나이가 100살인 경우와 같이 큰 수인 경우에 대해서도 거침없이 탐구해 나갔다. 또한, 학생들은 두 양 사이의 관계를 일반화하여 "형의 나이=동생의 나이 + 3"또는 "△-○=3" 와 같이 식으로 표현할 수 있었는데, 이와 같이 표현한 것은 변수 개념의 초보적인 형태로 해석할 수 있다.

V. 논 의

본 연구는 규칙성 및 두 양 사이의 관계를 찾아 일반화하고 이를 수학적인 모델이나 식 등으로 표현하는 과정에 초점을 두어 실시한 수업 사례를 바탕으로 학생들이 대수적 사고를 어떻게 구성해 나가는지를 상세하게 분석하였다. 분석 결과를 근거로 대수적 사고의 교수-학습 방안에 대한 시사점을 논의해 보면 다음과 같다.

첫째, 학생들이 고안한 수학적 모델이나 비형식적인 표현이 표준적인 수학적 모델이나 식의 지도

를 위한 출발점이 되어야 한다. 본 연구의 학생들은 규칙성 및 관계를 찾거나 일반화하기 위한 비형식적인 전략을 다양하게 가지고 있었고, 초보적인 형태이기는 하나 풍부한 수학적인 모델을 가지고 있었는데, 이런 것들은 표준적인 수학적 모델이나 식과 상당한 공통점이 발견되었다. 교실 수업에서 학생들의 다양한 일반화 전략과 표현 방법을 토대로 표준적인 수학적 모델과 대수식을 의미 있게 지도하는 것이 필요하다.

둘째, 학생들이 개별적으로 규칙성이나 관계를 찾아 일반화하는 활동 못지않게 전체 토의와 논쟁을 거쳐 개별적으로 찾은 규칙이나 관계를 더 효과적인 방법으로 일반화 해보는 경험을 쌓을 필요가 있다. 본 연구에서 학생들은 개별 학습지를 주고 각자 규칙성 및 관계를 찾아 표현해보도록 했을 때에는 자신이 찾은 규칙에 확신을 갖지 못하거나 규칙성을 표현하는 데 어려움을 보이고, 일반화 과정에까지 도달하지 못하는 경우가 많았으나, 교실 토의를 거듭할수록 일반화하는 하는데 걸리는 시간이 단축되었고, 학생들의 표현 방법도 더 정교화 되어 갔다. 즉, 학생들은 일반화 과정에서 각자 고안한 해결 전략 및 표현 방법들을 교실 토의 및 논쟁을 통해 함께 공유하고 다른 학생들의 아이디어와 비교해볼 기회를 가짐으로써 일반화에 더 잘 접근할 수 있었다. 이것은 수학적으로 사고하는 방법을 공유하고 개발하고 확장하기 위해서는 정당화와 논쟁 과정이 필요하다는 것을 드러낸 것이다 (Soares, Blanton, & Kaput, 2006).

셋째, 학생들이 규칙성 및 관계를 일반화된 식으로 표현하는 데 어려움을 보일 때에는 주어진 사례들을 구체적인 조작활동을 통해 탐구해보도록 격려하거나 구체적인 사례의 수를 늘려서 공통된 성질을 찾아보도록 지도하는 것이 도움이 된다. 본 연구에서 한 변에 붙이는 스티커의 개수와 정사각형 전체에 붙이는 스티커의 개수 사이의 관계를 찾아보게 했을 때, 학생들은 스티커를 붙여보거나 그림으로 그려보고 직접 세어보기 활동을 한 후에 더 쉽게 규칙성을 인식 했다. 그리고 한 변에 붙이는 스티커의 개수가 □개일 때 전체 스티커의 수를 □가 들어간 식으로 표현해보게 하는 과제에서 학생들은 사례수가 적은 상황에서 일반화하는데 어려움을 겪었으나, 교사가 20개, 500개 등의 사례를 추가적으로 탐구하도록 한 후에는 더 잘 일반화된 식을 구할 수 있었다. 이런 측면에서 초등학생들의 수준에서 구체적인 조작 활동이나 상대적으로 많은 사례에 기초하여 일반화를 추구하도록 하는 것이 중요함을 알 수 있었다.

넷째, 규칙성 및 관계를 □가 들어간 식으로 일반화할 때에는 교사의 세심한 주의가 필요하다. 학생들은 □를 사용하여 식으로 표현하는 데 있어서 다양한 변수 개념과 관련하여 어려움을 겪는다 (Falkner, Levi, & Carpenter, 2002). 본 연구에서 학생들은 1학년 때부터 □의 기호를 '연산의 결과를 쓰기 위한 자리'의 의미(예, 4+3=□) 또는 '미지의 어떤 값을 구하라'라는 의미(4+□=7)로만 경험하다가 일반화된 수의 의미로서의 □가 다루어지는 것에서 어려움을 보였다. 따라서 학생들에게 다양한 변수 개념에 대한 지속적이고 체계적인 경험을 제공할 필요가 있으며, 일반화 과정에 대한 학생들의 어려움을 파악하는 것은 교수·학습 방법에 중요한 자료가 될 수 있다.

마지막으로, 수의 성질이나 연산 법칙 등에 대한 지속적이고 광범위한 경험은 학생들이 문제 상황

을 일반화하여 식으로 표현하도록 하는 데 기초적인 아이디어를 제공한다. 본 연구에서 동일한 문제 상황을 식으로 표현하는 데 있어서, 곱셈에 어려움을 느끼는 학생은 덧셈 식으로 표현하는 것을 선호하는 경향을 보였다. 또한, 혼합 계산에서 연산 순서에 오류를 범하는 학생은 대수식을 표현하는 데에도 동일한 오류를 범하는 경향을 보였다. 이와 같은 학생들의 경향은 수와 연산 영역에서의 산술적 사고가 대수적 사고를 배양하는데 기초가 된다는 것을 시사한다.

참 고 문 헌

교육인적자원부 (1999). 초등학교 교육과정 해설(IV). 서울: 대한 교과서 주식회사.

교육인적자원부 (2001). 초등학교 교사용 지도서 수학4-가. 서울: 대한 교과서 주식회사.

교육부 (2001). 초등학교 교사용 지도서, 수학4-나. 대한교과서주식회사.

교육부 (2007). 수학과 교육과정 [별책8] (고시 제2007-79호). 대한교과서주식회사.

김성준 (2002). 대수 교육과정의 변화에 관한 고찰: 패턴에 기초한 대수 고입을 중심으로, 한국수학교육학회 시리즈 D <수학교육학연구>, **12(3)**, pp.353-369.

김성준 (2003). 패턴과 일반화를 강조한 대수 접근법 고찰, 학교수학, **5(3)**. pp.343-360.

김성준 (2004). 대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색. 서울대학교 박사학위 논문.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부.

방정숙 (2001). 교실문화 비교를 통한 수학교육 개혁에 관한 소고, 한국수학교육학회 시리즈 D <수학교육연구>, **11(1)**, pp.11-35.

Amerom (2002). *Reinvention of early algebra.* Freudenthal Institute.

Boulton-Lewis, G. M., Cooper, T. J., Atweh, B., Pillay, H. (1997). The transition from arithmetic to algebra: a cognitive perspective. *Proceedings of 21st conference of International Group for the PME. Vol. 2* (pp.185-192).

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school. Portsmouth,* NH: Heinemann.

Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (2002). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. In D. L. Chambers (Ed.), Putting research into practice in the elementary graeds: Readings from journals of the National Council of Teachers of Mathematics (pp.202-207). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Developing a curriculum of beginning algebra in a spreadsheet environment. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & Vincent(Eds.), Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra(pp.252-257). The University of Melbourne, Australia.

Jacobs, V. R., & Phillip, R. A. (2004). Mathematical thinking: Helping prospective and practicing teachers focus. *Teaching Children Mathematics,* **11(4)**, pp.194-201.

Kaput, J., & Blanton, M. (2001). *Algebrafying the elementary mathematics experience Part I*: Transforming task structures. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent(Eds.), Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra (pp. 344-351). The University of Melbourne, Australia.

Kaput, J., & Blanton, M. (2005). Characterizing a classroom practice that promote algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education,* **36(5)**, pp.412-446.

Kieran, C. (1996). *The changing face of school algebra?* Presented in ICME-8 Congress in Spain.

Kieran, C., & Chalouh, L. (1999). Prealgebra: The Transition from Arithmetic to Algebra. In B. Moses (Ed.), *Algebraic Thinking, Grades K-12* (pp. 59-70). NCTM, Reston, VA.

Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: a definition of pre-algebra. *Journal of Mathematical Behavior.* **14(1)**, pp.113-120.

Lodhodlz, R. (1999). The transition from arithmetic to algebra. In B. Moses (ed.), Algebraic thinking, grades K-12 (pp.52-58). NCTM, Reston, VA.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education.* San Francisco, CA: Jossey-bass.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Smith, E. (2003). Stasis and change: Integrating patterns, functions, and algebra throughout the K-12 Curriculum. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *R,esearch Companion to Principles and Standards for School Mathematics*(pp.136-50). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Soares, J., Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2006). Thinking algebraically across the elementary school curriculum. *Teaching Children Mathematics,* **12(5)**, pp.228-235.

Steele, D. F. (2005). Using schemas to develop algebraic thinking. *Mathematics Teaching in the Middle School,* **11(1)**, pp.40-46.

Wickett, M., Katharine, K., & Burns, M. (2002). *Lessons for Algebraic Thinking. Grades 3-5.* Sausalito, CA: Math Solutions Publications.

Yin, R. K. (2002). *Case study research: Design and methods.* Thousand Oaks, CA: SAGE.

An analysis of algebraic thinking of fourth-grade elementary school students

Choi, JiYoung
Seoul Daedong Elementary School, Yeongdeungpo-gu, Seoul 150-072, Korea
E-mail: ji2006@empal.com

Pang, JeongSuk
Korea National University of Education, Chung-Buk 363-791, Korea
E-mail: jeongsuk@knue.ac.kr

Given the importance of early experience in algebraic thinking, we designed six consecutive lessons in which 4th graders were encouraged to recognize patterns in the process of finding the relationships between two quantities and to represent a given problem with various mathematical models. The results showed that students were able to recognize patterns through concrete activities with manipulative materials and employ various mathematical models to represent a given problem situation. While students were able to represent a problem situation with algebraic expressions, they had difficulties in using the equal sign and letters for the unknown value while they attempted to generalize a pattern. This paper concludes with some implications on how to connect algebraic thinking with students' arithmetic or informal thinking in a meaningful way, and how to approach algebra at the elementary school level.

* ZDM Classification : C32
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : algebraic thinking, problem solving, pattern, generalization