韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 22집 제 2호, 2008. 5. 125-136

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 22, No. 2, May. 2008. 125-136

거북 행동을 통한 함수 그래프 구성

조 한 혁 (서울대학교)
송 민 호 (서울대학교 대학원)

동일한 함수 그래프를 접근하는 방법은 다양하다. 물리 교과에서는 중력상태에서 물체의 운동으로 포물선을 정의하고 있으며 수학 교과에서는 수식을 이용한 이차함수로 포물선을 정의한다. 본 연구에서는 교육과정에 나타나는 함수 그래프를 국소적이며 내재적인 거북 행동의 관점에서 접근하고 분석한다. 또한 교육과정에 나타나지 않지만 수학사에서 중요한 의미를 가지는 몇몇 곡선에 대하여 같은 방법으로 곡선을 구성하고자 한다. 그리고 pre-calculus의 관점에서 고등학생의 지식을 바탕으로 곡선의 길이와 넓이를 구하는 수학화 활동을 소개한다.

1. 서 론

현재 학교 교육과정에서 제시되고 있는 함수의 그래프와 같은 수학적 대상은 발생적 배경이나 물리적, 기하적 특징 등을 모두 배제하고, 수식으로 정제된 추상적인 대상으로 표현되고 있다. 이것은 잘 정의되고 완성된 형태의 수식과 알고리즘을 제시하여 수학의 발전사에서 겪었던 다양한 오류 상황들을 제거함으로써 학습자의 혼란을 최소화하고 가장 효율적인 학습이 이루어지도록 하고자 함에 있다. 이러한 교육과정은 필연적으로 수학적 대상을 수식으로 표현되는 정적 대상물의 집합체로 만들게 된다. 그러나 여타 지식이 그러하듯 지식의 구성은 끊임없는 가설과 실험을 반복하며 이루어지며 중간단계에 나타나는 시행착오는 피할 수 없는 것이다. 오히려 실험적 상황에서 발생하는 시행착오를 거쳐서 정제되고 풍부한 문맥을 가지는 지식으로 거듭날 수 있는 것이다.

물론 학습자에 따라 추상화된 수식으로 수학적 대상을 다루는 방법과 실험 실습을 통해 경험적으로 수학적 대상을 다루는 방법 사이에는 그 효과가 다르게 나타날 것이다. 그러나 유독 학교 수학에서는 학습자에 따라 효율적으로 선택되는 것이 아니라 한정된 방법 안에서 교육 방법을 찾으려 하였고 그 과정에서 실험 상황은 대부분 기피되어져왔다. 그 이유는 수학이 추상적 대상을 다루는 학문이기 때문에 실험을 할 수 있는 대상이 한정되어있으며, 귀납적인 실험 결과에서 수학화를 통하여 수학적 지식으로 연결시키기가 힘들고, 가설을 세우고 검증하는 과정이 학습자의 수준에 맞게 일어날 수 있도록 실험 환경을 설계하는 것이 대단히 힘들기 때문이다. 하지만 이것은 수학적 대상을 발

* ZDM 분류 : U74
* MSC2000 분류 : 97C80
* 주제어 : 거북기하, 마이크로월드, 자바말

생 단계에서가 아닌 추상적으로 완성된 상태만을 고려하기 때문이다. 예를 들어 포물선이라는 이차 곡선은 수학 교육과정에서는 중학교 3학년 과정에서 먼저 도입되고 변화율과 관련된 내용은 고등학교에서 학습이 이루어지지만, 물리 교육과정에서는 물체의 운동과 관련하여 중학교 과정에서 도입하고 있다. 동일한 곡선을 다루고 있지만, 한쪽에서는 의미를 부여하여 보다 저학년의 학습자도 쉽게 접근할 수 있는 반면, 다른 쪽에서는 엄밀한 수학적 정의를 따라 수식을 전개하고 다루어야 하기 때문에 다양한 수학적 지식을 쌓은 이후에야 접할 수 있게 된다.

프로이덴탈은 수학이 만들어지는 과정에서의 개념과 순서를 무시하고 이를 임의로 조절하여 완성된 수학을 전달하는 것으로 교육과정을 구성하는 것에 대하여 교수학적 전도라고 비판하였다. 그는 이어서, 이미 완성된 수학을 통한 수학교육을 지양하고, 대신에 학생들에게 수학의 발생 현장을 제공하여 이로부터 수학을 발생(guided invention) 시키는 현실주의 수학교육(Realistics Mathematics Education)을 주장하였다.

본 연구자는 이러한 배경 아래에서 곡선 연구에 대한 수학사의 전개 과정을 통해 수학을 발견하고 추측하며 자신이 구성해보는 것이 가능하다고 보았다. 그리고 그러한 과정을 통하여 곡선을 처음 접할 때, 수식이 아닌 행동적인 측면에서 접근하는 것이 충분히 의미를 가지고 있다고 생각된다. 또한 곡선 그리기는 거북 행동을 통해 그려내는 컴퓨터를 통한 수학 실험(사고실험, 구체적 실험)이 가능하며, 이를 이용하여 물리, 화학 등과 같이 실험과 관찰을 통하여 수학적 성질에 대한 가설을 만들고 수학적으로 정당화하는 활동에 대한 연구가 필요하다고 판단하였다. 나아가 수학 실험이 곡선을 도입하기 위한 매개물에 그치지 않고 수식으로 형식화되고 추상화되는 수학화 과정에서도 여전히 유효할 수 있도록 수학 실험을 설계하고 개발하는 연구가 요구된다.

본 연구의 목표는 기존의 학교 교육과정에서 수식을 통하여 추상적으로 제시되는 곡선에 대하여 운동학적 관점에서 거북 행동으로 표현하여 곡선에 동적, 기하적 의미를 부여하고자 한다. 또한 수학사에 나타나는 의미있는 곡선들에도 같은 관점을 적용하여 살펴보고, 그러한 거북 행동을 바탕으로 하여 pre-calculus의 관점에서 곡선의 길이와 넓이를 구하는 수학화 활동을 소개하고자 한다.

2. 이론적 배경

데카르트의 해석기하학이 등장하고 오일러가 수학 기호 및 용어를 이용하여 다양한 연구결과를 발표하면서 교과서에서 다루는 곡선은 기하적인 형태 및 엄밀성을 중요시하는 고전기하학에서 수식 위주의 해석기하학으로 주류가 변화되어 갔다. 김홍종(2004)은 곡선을 조건을 만족하는 '1차원 집합'이라는 정적인 의미와 함께 시각에 따라 변하는 점이라는 동적인 의미를 함께 가진다고 말하였다. 수학 학습에 있어서 수식 및 함수로 표현되는 정적인 측면에서 이루어지는 알고리즘 학습뿐만 아니라 동적인 의미에 따라 곡선이 가지는 행동적, 기하적, 물리적 특징들에 대한 경험적, 실험적 학습도 중요하다. 이러한 내용은 수학교육의 근대화 운동에서도 확인할 수 있는데, 클라인(Klein)은 수학적

사고와 자연과학적 사고의 결합을 강조하였고, 페리(Perry)는 수학의 실용성과 유용성을 강조하였으며 유클리드 기하에서 탈피하여 실험 기하를 강조하였으며, 무어(Moore)는 대수와 기하와 물리의 관계를 강조하며 이들을 연관지어 교육하는 것을 말하였다.(황혜정, 2007)

직접적인 물리적 행동이나 실험을 통하여 다양한 곡선을 탐구해보고 그 의미를 파악하고자 하는 연구가 많이 이루어져왔다. Dennis(1995)는 관계식이 주어지고 그에 대응되는 것으로 그래프가 다루어지는 교육에 관하여 언급하면서 그래프의 변화에 주목하여 관계식을 유추해 내는 것의 중요성에 관하여 언급하였다. 또한 Nemirovsky(2004)의 분석에 따르면 학생들이 화면이나 교과서에서 보여주는 화면을 응시하는 것보다 행동과 조작으로 이루어지는 물리적인 행위에 의해 더욱더 자극받는다는 연구가 최근 많이 이루어지고 있으며, 특히 이러한 경향은 변수와 함수 사이의 관계에서 많이 나타난다.

함수의 그래프에 대한 동적 접근에 대한 연구는 일반적으로 동적인 개념에 대한 조작, 실험 및 활동이 주를 이루고 있다. 역사적으로 사용되어져온 종이와 펜이라는 도구에서도 미약하나마 함수의 그래프를 동적으로 접근해보려는 시도가 있었다. 이 경우에는 동적인 개념에서 기호를 정의하여 함수의 그래프를 해석한다고 볼 수 있다. 그러나 종이와 펜은 즉각적인 피드백이 불가능한 한계를 가지고 있다. 함수의 그래프를 동적으로 접근하기 위해서는 변수의 변화에 따르는 함수 그래프의 대응이 즉각적으로 이루어져야하며 변수의 변화도 학습자에 의해 조절이 가능하여야 한다. 이러한 학습환경은 컴퓨터의 등장과 함께 본격적으로 구성되기 시작하였다. Roschelle(2000)은 MathWorlds를 통하여 변수와 변화에 대한 시각적이며 즉각적인 피드백을 이용하여 교육현장에 활용하는 프로젝트를 진행하였으며 Simpson(2006)은 위치, 속도, 가속도, 대응그래프 사이의 관계 학습을 위해 디자인된 활동의 원리와 구성방식을 제시하며 그 예로 ToonTalk을 사용하였다.

또한 물리적, 육체적, 감각적, 경험적 지식에 기반한 활동을 통하여 곡선을 다루는 연구도 많이 이루어졌다. 역사적으로 다양한 막대의 연결을 통하여 복잡한 곡선을 그려내거나 톱니바퀴의 결합을 통하여 에피싸이클로이드(epicycloid)를 탐구하는 등의 기계장치를 이용한 함수의 그래프 탐구 사례가 있었다(Dennis, 1995). 이러한 도구의 이용은 수학적 대상을 기계적인 장치를 사용하여 재현하여 그 형성 과정을 동적으로 보여주었다는 점에서는 주목할 만하나 학습자가 가진 물리적, 신체적 경험을 지식화 하기에는 부족하였다. 컴퓨터가 등장하고 기계적인 장치가 발달함에 따라 학습자는 스스로의 움직임에 대한 수학적인 해석을 직접 관찰하는 것이 가능해졌다. 또한 그러한 관찰을 토대로 그래프를 분석하고 의미를 부여하고 또한 역으로 그래프에 따르는 행동을 유추하는 것이 가능하게 되었다. 그러한 맥락에서 Noble(2006)은 Drawing Machine, Arzarello(2004)는 CBR, Motion Detector를 사용하였고 Schnepp(2004)는 LBM을, Rasmussen(2004)는 Water Wheel을 사용하였다. 특히 Noble(2006)은 두 학생의 움직임을 통하여 원을 작도하는 활동을 통하여 함수의 그래프를 운동의 자취로 보아 두 방향의 힘의 작용으로 해석하고 있다.

일반적으로 곡선을 표현하는 방법에는 크게 외재적(extrinsic) 표현방법과 내재적(intrinsic) 표현방

법의 두 가지로 나뉜다. 외재적 표현방법은 전체적인 관점에서 곡선을 바라보는 것으로써 절대적인 기준점이 존재하는 표현 방식을 말한다. 이러한 방식에서는 곡선을 수식화하고 일정한 조건을 만족하는 해(또는 점)들의 집합으로 그래프를 다루게 된다. 그 예로 직교좌표계나 극좌표계를 들 수 있다. 이와는 다르게 내재적 표현방법은 국소적인 관점에서 곡선을 접근하는 것으로써 이전 단계를 상대적인 기준점으로 설정하고 단계사이의 관계에 의해 다음 단계를 표현하는 방식을 말한다. 내재적 표현방법은 곡선을 운동학적인 측면에서 바라보게 되며 기하적 특징에 주목하게 된다. 이러한 내재적 표현방법으로 '컴퓨터와 수학교육' 분야에서 거북기하 마이크로월드[1)]를 대표적인 것으로 볼 수 있다.

'컴퓨터와 수학교육'(조한혁, 2003; Cho, 2004; 김화경, 2006)은 컴퓨터와 함께 수학교육을 연구하는 분야로, 물리적 구성을 통한 정신적 구성을 강조하는 구성주의(constructionism)를 이론적 배경으로 한다. 나아가 구성주의는 물리적 구성을 위한 놀이 공간을 필요로 하고, 이 공간을 컴퓨터에 구현한 것이 마이크로월드이다. 이는 교수보다는 학습을 강조하고, 효과적인 지식 전달을 위한 소프트웨어의 기능보다는 컴퓨터와 함께 지식 구성을 위한 환경의 구조를 강조한다. 거북 기하는 Papert(1980)가 고안한 마이크로월드로써 흰 눈이 내린 운동장에서 가고 도는 행동을 통한 발자국의 자취로 도형을 그리는 거북이를 통하여 다양한 탐구 활동을 가능하도록 한다. 즉, 기본적인 거북 기하의 명령조합으로 나타나는 거북의 움직임을 거북 행동이라 할 때, 거북 행동에 적절한 의미를 부여함으로써 다양한 곡선에 대한 탐구가 가능해진다. Armon(1999)과 Kynigos(2000)은 내재적 방정식을 이용하여 곡선을 거북 행동으로 표현하는 연구를 하였으며 Cho(2006)은 적절히 설계된 마이크로월드의 거북 행동을 통한 함수의 그래프에 대한 직관적인 접근에 관하여 논하였다. 또한 Eisenberg(2000)는 거북이의 두 가지 행동을 하나의 결과로 표현하는 명령을 제공함으로써 싸이클로이드, 심장곡선(cardioid)와 같은 곡선에 대한 실제적인 의미를 부여하고자 하였다. 이 외에도 거북 행동을 통하여 곡선을 그리고 그러한 곡선에 대하여 탐구하는 연구가 있어왔다(김화경, 2008; Cho, 2007; Foltynowicz, 2007).

거북 기하에서 거북 행동으로 나타내는 곡선을 거북 곡선(turtle curve)라고 할 때, 주어진 평면 곡선을 어떻게 거북 곡선으로 그려낼 수 있을까? 우리는 몇몇 곡선에 대하여 거북 곡선으로 그려내는 방법에 대하여 고찰하고, 또한 곡선의 길이 및 넓이에 대한 미적분 문제를 pre-calculus의 입장에서 탐구하고자 한다. 예를 들어 임의의 곡선을 거북 곡선으로 그려낸 경우, 곡선의 길이는 가자 행동이 만든 발걸음 수를 모두 더한 것이 된다. 또한 거북 행동의 각 순간을 꼭지점으로 하는 삼각형으로 곡선을 분할하여 넓이를 구할 수 있다.

1) 본 논문에서는 자바말(JavaMAL) 마이크로월드를 이용하여 거북기하(Turtle Geometry)를 탐구한다. 본 논문에서 사용된 LOGO 예제들은 자바말에 통합되어있는 LOGO 기능을 이용하여 만들었으며 자바말 마이크로월드는 다음의 사이트에서 사용할 수 있다. http://www.javamath.com

3. 이차함수 그래프와 거북 행동

직교좌표계는 두 개의 축을 가지는 좌표계로써 하나의 축에 해당하는 변수가 일정량 변화할 때, 또 다른 축에 속하는 변수의 변화량에 따라 곡선을 표현하게 된다. 이러한 직교좌표계의 특성을 거북 기하에 적용하려면 적절한 교수학적 상황, 예를 들어 "흐르는 강물 위"와 같은 상황을 가정하면 가능하다. 이러한 상황을 고려하여 직교좌표계 개념에서는 거북 행동 명령어 move가 쓰인다. move a, b는 거북을 x축으로 a, y축으로 b만큼 이동시키는 것을 의미한다. 이 명령을 통해 간단한 이차 함수의 그래프를 거북 행동으로 표현해 보자.

강물이 1초에 1만큼의 일정한 속도로 왼쪽에서 오른쪽으로 이동한다고 하자. 그리고 거북이는 위로 점점 속도를 증가시켜 이동한다고 하자. 거북이가 처음에는 1초에 1만큼 위로 가고, 그 다음에는 1초에 2만큼 가는 식으로 속도를 1씩 증가시켜 이동한다고 가정하면, n초 후의 거북이의 위치는 처음 위치에 대해 오른쪽으로는 n, 위로는 $\frac{n(n+1)}{2}$만큼 이동하게 된다. 이는 x, y의 이차식이 되므로 따라서 위의 거북 행동을 통해 이동한 거북은 이차함수, 포물선 모양으로 이동하게 된다.

이것은 거북 행동 move에 따른 거북의 움직임이 이차함수의 순간변화율로 움직이기 때문이다. 이처럼 거북 행동으로 이차함수를 표현하는 것은 기존의 학교교육에서 대응을 강조하는 방식과 구분된다. 기존의 학교수학에서는 주어진 식에 일정한 값, 즉 x의 값을 1씩 증가시키면서 대입하고 그에 따른 함수값을 대응점으로 표시하여 함수의 그래프를 완성하는 방법을 사용하고 있다. 이러한 대응의 방식은 함수의 그래프를 수식화하고 계산화하기에는 좋게 만들지만, 함수가 가지고 있는 기하적 특징이나 미분에서의 순간변화율과 같은 운동학적 특징이 표현되지 않기 때문에 학습에 어려움을 일으킬 수 있다.

move명령을 이용하여 "흐르는 강물 위"와 같은 교수학적 상황을 만들 수 있는 이유는 move 명령은 x축의 변화량과 y축의 변화량을 동시에 표현하는 명령이기 때문이다. 이 방법을 적용해서 원을 작도하고 또한 이를 응용하여 타원을 그려보자. Noble(2006)는 x축과 y축의 움직임을 합성하여 학생들이 직접 다양한 그래프를 그리는 활동을 할 수 있도록 하였다. 이때 원을 그리기 위해서 x축과 y축에 각각 Sin함수와 Cos함수에 해당하는 운동을 하여야 한다는 사실을 보였다. 이러한 사실은 다음과 같이 거북 행동으로 원을 그리는 명령을 살펴보아도 알 수 있다; 반복 360 { 가자 1; 돌자 1;}[2]. 이때, 거북의 머리 방향이 오른쪽, 즉 양의 x축 방향을 보고 있다고 하고, 앞의 명령을 실행하게 되면 i번째 단계에서 거북이는 빗변의 길이가 1인 i도 직각삼각형의 빗변을 따라서 이동하게 된다. 동일한 운동을 move 명령으로 표현하게 되면 다음과 같다; move Cos(i), Sin(i). 즉, move 명령으로 원을 그리는 명령은 다음과 같다; 반복 360 { move Cos(i), Sin(i) }[3].

---

2) 이 명령으로 그려지는 도형은 정360각형이지만 컴퓨터 환경상에서는 원으로 받아들여질 수 있다.
3) move 명령을 이용하여 원을 그리는 자세한 방법은 김화경(2008)에 소개되어있다.

앞에서의 거북 행동을 또 다른 거북 행동인 move명령으로 변환하게 되면, x축 변화량이나 y축 변화량을 조절함으로써 타원을 그릴 수 있게 된다. 예를 들어 "반복 360 { move Cos(i)/2, Sin(i) }" 와 같은 명령은 y축을 장축으로 가지고 단축의 길이가 장축의 길이의 $\frac{1}{2}$인 타원이 된다.

4. 거북 행동과 곡선의 길이 및 넓이

일반적으로 임의의 곡선의 길이를 구하는 문제는 상당히 난해한 문제이고, 대학수준의 미적분학에서 배울 수 있는 것으로 곡선의 함수식이 주어져야만 그 값을 구할 수 있는 경우가 대부분이다. 하지만 거북 곡선은 거북의 발자취를 따라감으로써 근사적으로 곡선의 길이를 구할 수 있으며 고등학교 수준의 극한을 이용하여 실제 곡선의 길이 및 넓이와 같은 값을 구할 수 있다. 거북 행동이 순간변화율이라는 점을 고려해보면 거북의 발자취로 곡선의 길이를 구하는 것을 pre-calculus로 볼 수 있다. 또한, 함수식을 대입하여 기계적인 알고리즘을 통하여 곡선의 길이를 구하는 것이 아니라 곡선이 가지는 물리적, 기하적 특징에 따라 거북 곡선에 대한 의미를 부여하고 그러한 의미 부여활동이 계속해서 수준상승하여 수학화를 통하여 수학적 결과물로 연결될 수 있다는 것은 의미있는 활동으로 생각된다. 그러나 김화경(2007)에서 볼 수 있듯이 거북 행동으로 표현되는 곡선이 컴퓨터 화면상에서 보여지는 것과 실제 거북 행동이 움직인 경로가 다른 경우가 발생할 수 있다. 이 경우 실제 곡선길이와 전혀 다른 엉뚱한 곡선의 길이를 구할 수 있는데 이 점에 유의하여야 할 것이다.

앞에서와 같은 경우가 발생하지 않으려면 곡선에서 중복된 부분이 생기지 않도록 거북 행동을 하나의 명령으로 통합하는 과정이 필요하다. 하나의 통합된 거북 행동이 있다면 거북 행동으로 표현된 곡선의 길이는 거북의 발자취를 모두 더하면 된다. 즉, 임의의 곡선의 길이를 구하는 방법은 적절한 거북 행동으로 곡선을 표현할 수 있느냐의 문제로 귀착된다. 여기에서는 수학사에 의미있는 싸이클로이드 및 아르키메데스 곡선에 대하여 그 곡선을 거북 행동으로 표현하고, 거북 행동을 바탕으로 하여 곡선의 길이 및 넓이를 구하는 수학화 활동의 실제 예를 살펴보도록 한다.

가. 싸이클로이드의 길이

싸이클로이드는 바닥에 붙어서 굴러가는 원 위의 한 점의 자취이다. 즉, 싸이클로이드는 원의 평행이동과 회전운동의 합성으로 볼 수 있다. 먼저 평행이동과 회전운동을 거북 행동으로 표현해보자. 평행이동은 앞에서 살펴본 "흐르는 강물 위"의 교수학적 상황을 다른 말로 표현한 것이 된다. 즉, 평행이동은 "move 1, 0"와 같은 명령으로 표현할 수 있다. 회전운동은 거북이의 방향에 주의하여 살펴보면 거북이 왼쪽방향을 향하고 있을 때 "가자 1; 돌자 -1;"을 반복하는 것임을 알 수 있다. 이 명령은 다음과 같이 나타낼 수 있다; 반복 360 { move 1, 0; 가자 1; 돌자 -1; }.

앞의 명령에서는 move 명령과 가자, 돌자 명령을 동시에 사용하고 있다. move 명령은 절대좌표를 따라 이동하고 가자, 돌자는 상대좌표에 따라 이동하므로 이 명령어들이 동시에 사용되면 곡선의 길이를 구하는 것이 어려워진다. 따라서 move 명령어로만 표현하거나 가자, 돌자 명령만으로 위의 명령을 표현하면 곡선의 길이를 구하는 것이 보다 쉬워진다. 먼저 move 명령으로 통합하는 경우를 살펴보자. move 명령으로 표현하는 것은 평행운동을 나타내는 "move 1, 0"과 원운동을 나타내는 move 명령어를 합성하는 것으로 가능하다. 이것은 move 명령이 가진 대수적인 특징 때문인데 move a, b + move c, d = move a+c , b+d 가 성립하기 때문이다. 앞에서의 명령어는 다음과 같이 통합된 move 명령어로 나타낼 수 있다.

```
반복 360 {
  move 1,0
  가자 1; 돌자 -1;
}
```

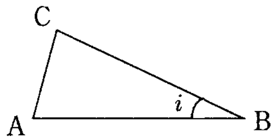
→

```
for i=1 to 360 {
  move 1,0
  move Cos(i), Sin(i)
}
```

→

```
for i=1 to 360 {
  move 1+Cos(i), Sin(i)
}
```

앞의 명령을 이제 가자와 돌자 명령어만으로 표현해보자. 싸이클로이드는 앞에서도 말했듯이 원의 평행운동과 회전운동의 합성으로 표현된다. 이제 싸이클로이드 곡선의 한 점의 순간적인 운동을 평행운동과 회전운동으로 표현하면 <그림 1>과 같다.



<그림 1>

여기에서 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{BC}$는 각각 원의 평행운동과 회전운동을 나타낸다. 마이크로월드 환경에서 원은 한 변의 길이가 1인 정360각형으로 표현할 수 있다. $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=1$ 이므로 $\overrightarrow{AC}$의 길이는 $2\sin\left(\frac{i}{2}\right)$이다. 또, $\overrightarrow{AC}$와 $\overrightarrow{AB}$가 이루는 각도는 $90-\frac{i}{2}$이므로, " for i=1 to 720 { 돌자 $\frac{1}{2}$; 가자 $2\sin\left(\frac{i}{2}\right)$ } " 로 표현 가능하다.

<표 1> 싸이클로이드를 그리는 거북 행동들

반복 360 {
  move 1,0
  가자 1; 돌자 -1;
}
	for i=1 to 360 {
	  move 1+Cos(i), Sin(i)
	}
		for i=1 to 720 {
		  가자 $2\sin\left(\frac{i}{2}\right)$
		  돌자 $\frac{1}{2}$;
		}

(a) 혼합 명령 표현	(b) move 표현	(c) 가자, 돌자 표현

이제 싸이클로이드 곡선을 위과 같은 세 가지 방법으로 표현하였다. 여기에서 우리는 [표 1]의 (c)에 주목하였다. 세 번째 경우는 거북이의 가자, 돌자 명령어만으로 표현되었으며 각도의 변화를 충분히 작게 한다면, 즉 단위구간을 보다 많게 한다면 싸이클로이드 곡선에 근접한 곡선이 될 수 있다. 우리는 세 번째 경우에 주목하여 싸이클로이드의 길이를 구하고자 한다.

위의 표에 제시된 거북 곡선은 싸이클로이드를 수백 개의 직선으로 표현한 것이다. 이제 그 직선들의 길이를 모두 더하고, 그 값의 극한값을 구하면 싸이클로이드의 길이를 구할 수 있을 것이다. <표 1>의 (c)의 거북 걸음은 외접원의 반지름이 $\frac{2\pi}{360}$인 정 360각형이 그리는 싸이클로이드에 해당한다. 일반화를 위해서 외접원의 반지름이 r인 정 n각형이 굴러간다고 가정했을 때 거북 걸음을 모두 더한 값은 $2\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}2r\sin\left(\frac{\pi}{n}i\right)$ 으로 표현할 수 있다. 이제 여러 방법으로 구할 수 있는 가우스의 삼각함수 합 공식[4]을 이용하면 싸이클로이드의 길이 l은 다음과 같이 $8r$이 된다.

$$\text{싸이클로이드의 길이 } l=\lim_{n\to\infty}2\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}2r\sin\left(\frac{\pi}{n}i\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4\pi r}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{n}i\right)=\frac{4\pi r}{n}\cdot\frac{2n}{\pi}=8r.$$

이것은 현대적인 수학을 적용하여 도출되는 결과와 동일하다.

나. 아르키메데스 나선의 넓이

아르키메데스 나선은 거북이가 일정한 각도로 돌면서 점점 속도를 높여서 움직일 때, 거북의 자취가 그리는 곡선이다. 이것은 앞에서 보았던 절대좌표계와는 다른 극좌표계에서 거북이의 움직임을 의미한다. 이차곡선을 그리면서 제시되었던 "흐르는 강물 위"와 같은 교수학적 상황을 이 경우에도 적용할 수 있는데, 여기에 적합한 교수학적 상황으로 "회전하는 원판 위"를 생각할 수 있다. 일정한 속도로 회전하는 원판 위에서 거북이가 일정하게 속도를 증가시키면서 앞으로 움직이는 상황이 바로 아르키메데스 나선을 그리는 상황이다. 예를 들어 가자 1; 돌자 1; 가자 2; 돌자 1; 가자 3; 돌자 1; ... 와 같이 거북이가 움직이게 되면 거북이의 자취는 아르키메데스 나선과 유사하게 된다. 이것은 싸이클로이드의 경우와 마찬가지로 아르키메데스 나선의 순간변화율에 따라 거북이를 움직이게 하는 것

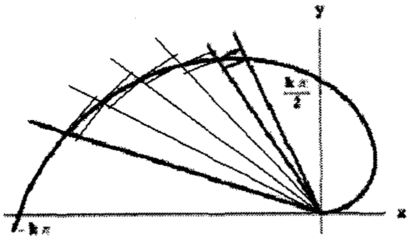
---

4) $\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha=\frac{\sin\left(\frac{(1+n)\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{n}i\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{n}{2}\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\lim_{\frac{\pi}{2n}\to 0}\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}=\frac{2n}{\pi}$$

으로써, 이러한 거북 행동의 특징을 이용하여 아르키메데스 나선의 넓이를 구할 수 있다.

나선의 출발지점과 i번째 거북의 위치와 $i+1$번째 거북의 위치를 연결한 삼각형들의 넓이를 모두 더하면 아르키메데스 나선의 넓이에 근접할 것이다. 나선이 시계반대방향으로 감아서 나가는 모양이고, 거북이 시계반대방향으로 회전한다고 하자. 그러면 거북의 행동 형태에 따라서 실제 나선의 모양과 흡사하면서 나선의 안쪽과 바깥쪽으로 나눠서 움직이게 된다. 나선의 안쪽을 따라서 거북이가 움직이게 하는 것은 먼저 돌자를 실행하고 가자를 다음에 실행하는 것이며, 나선의 바깥쪽을 따라서 거북이가 움직이게 하는 것은 가자를 먼저 실행하고 돌자를 그 뒤에 실행하는 것이다. 이때 아르키메데스 나선의 넓이는 <그림 2>에서와 같이 안쪽으로 이동하는 거북이가 만드는 삼각형의 넓이의 합보다 크고, 바깥쪽으로 이동하는 거북이가 만드는 삼각형의 넓이의 합보다 작다. 즉, 거북이가 이동하는 두 경우의 극한값이 같다면 아르키메데스 나선의 넓이도 극한값의 성질[5]에 의하여 같은 극한값을 가지게 될 것이다. 따라서 이 방법으로 아르키메데스 나선의 넓이를 구해보면 $\frac{k^2\theta^3}{6}$이 되고 실제 현대적인 수학을 적용하여 계산한 아르키메데스 나선의 넓이와 동일한 값이다.



<그림 2> 아르키메데스 나선

5. 결 론

본 논문에서는 거북 행동에 다양한 교수학적 상황을 적용하여 이차곡선, 싸이클로이드, 아르키메데스 나선 등을 거북 행동으로 나타내는 활동을 소개하였다. 그리고 이러한 활동을 바탕으로 하여 곡선의 길이 및 넓이를 수식으로 구하는 수학화 활동이 가능함을 실제 예를 들어 살펴보았다.

거북 행동으로 곡선을 표현하고 그러한 곡선의 길이 및 넓이를 거북 행동에 기반하여 근사적으로 식을 구하고, 고등학교 수준의 극한을 통하여 실제 값과 정확하게 일치하게 되는 활동이 가능하다는 점을 알 수 있다. 거북 행동이 순간변화율이라는 점을 고려해보면 거북의 발자취로 곡선의 길이를 구하고 거북의 순간 움직임에 주목하여 넓이를 구하는 활동은 pre-calculus로 볼 수 있다.

일반적인 곡선의 길이 및 넓이는 대학교 수준의 미적분학에서 함수식의 대입을 통한 기계적인 알고리즘의 결과물로 다루어져왔다는 점을 감안해 볼 때, 거북 행동으로 곡선을 표현하고 그러한 거북 행동에 기반하여 곡선을 탐구할 수 있다는 점은 정적인 대상물로 다루어져왔던 곡선에 의미를 부여하여 보다 쉽게 다가갈 수 있다는 장점을 가진다. 또한 곡선을 거북 행동으로 표현하는 것이 곡선의 도입부에 그치지 않고 계속해서 수학화를 통하여 수식으로 형식화될 수 있다는 점은 기존의 활동,

5) 수열 a_n, b_n이 동일한 극한 값 α를 가지고 임의의 n에 대하여 $a_n \leq c_n \leq b_n$을 만족하면 수열 c_n의 극한값도 α이다.

경험에 의한 수학적 지식이 수식화되고 형식화되는 수학화 과정이 미비하였다는 점에 비추어볼 때 의미있는 결과라 할 수 있다. 또한 수학사에 나타나는 곡선들을 새롭게 조명해보고 언어로 표현되는 경험적인 원시 수학의 형태에서 현대적인 추상적 수학의 형태로 발전하는 구성의 과정을 도울 수 있는 의미있는 소재가 됨을 살펴보았다.

앞으로 보다 다양한 곡선에 대하여 거북 행동으로 탐구될 수 있는지에 대한 후속 연구가 요구되고, 이러한 연구 결과를 바탕으로 하여 실제로 학생들에게 이차함수 및 수학사에 의미있는 곡선을 도입하여 지도하고 관찰하는 연구가 이루어져야 할 것이다.

참 고 문 헌

김홍종 (2004). 미적분학 1, 서울: 서울대학교 출판부.

김화경 (2006). '컴퓨터와 수학교육' 학습-지도 환경에 관한 연구. 서울대학교 교육학 박사학위 논문.

김화경·송민호 (2007). LOGO와 DGS 매개 모델과 오류 사례. 수학교육학연구 **17(2)**, pp.111-125, 서울: 대한수학교육학회.

김화경·송민호 (2008). 거북 마이크로월드와 곡선. 수학교육학연구 **17(2)**, pp.111-125, 서울: 대한수학교육학회.

조한혁 (2003). 컴퓨터와 수학교육. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **42(2)**, pp.177-191, 서울: 한국수학교육학회.

황혜정·나귀수·최승현·박경미·임재훈·서동엽 (2007). 수학교육학신론, pp.55-59. 서울: 문음사.

Armon, U. (1999). An algorithm that translates intrinsic equations of curves into intrinsic procedures of these, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* **30(6)**, pp.833-854.

Arzarello, F. & Robutti, O. (2004) Approaching functions through motion experiments, PME Special Issue: Bodily activity and imagination in mathematics learning, *Educational Studies in Mathematics* **57(3)**, pp.305-308.

Cho, H.; Kim, H. & Song, M. (2006). The Qualitative Approach to Graphs of Functions in a Microworld. *The SNU Journal of Education Research* **15**, pp.129-140.

Cho, H.; Kim, H. & Song, M. (2007). Mediating model between LOGO and DGS for planar curves, *Proceeding of Psychology of Mathematics Education* **31**, Seoul.

Cho, H.; Kim, S.; Han, H.; Jin, M.; Kim, H. & Song, M. (2004). Designing a Microworld for Mathematical Creative and Gifted Students, *Proceeding of 10th International Congress on Mathematical Education*, Copenhagen, Denmark.

Dennis, D. (1995), *Historical Perspectives for the Reform of Mathematical Curriculum: Geometric* *curve drawing devices and their role in the transition to an algebraic description of function*, A Dissertation Presented to the Faculty of the Graduate School of Cornell University in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy.

Eisenberg, M. (2000). Superposed turtle walks. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* **5**, pp.65-83.

Foltynowicz, I. (2007). Cycloids and limacons in the turtle graphics, *Proceeding of EuroLogo 2007*, pp.586-606.

Kynigos, C. (2000). Meanings around intrinsic curves with a medium for symbolic expression and dynamic manipulation. *Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Group 9.*

Nemirovsky, R. (2004). Introduction, PME Special Issue: Bodily activity and imagination in mathematics learning, *Educational Studies in Mathematics* **57(3)**, pp.303-305.

Noble, T.; DiMattia, C.; Nemirovsky, R. & Barros, A. (2006). Making a Circle: Tool Use and the Spaces Where We Live, *Cognition and Instruction* **24(4)**, pp.387-437.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas,* Cambridge, Massachusetts: Perseus Publishing.

Rasmussen, C.; Nemirovsky, R.; Olszewsky, J.; Dost, K. and Johnson, J. L. (2004). On Forms of Knowing: The Role of Bodily Activity and Tools in Mathematical Learning, PME Special Issue: Bodily activity and imagination in mathematics learning, *Educational Studies in Mathematics* **57(3)**, pp.313-316.

Roschelle, J.; Kaput, J. & Stroup, W. (2000). SimCalc: Accelerating students' engagement with the mathematics of change. In M. J. Jacobson & R. B. Kozma (Eds.), *Innovations in science and mathematics education: Advanced designs for technologies of learning* pp.47-75, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Simpson, G.; Hoyles, C. & Noss, R. (2006) Exploring the mathematics of motion through construction and collaboration, *Journal of Computer Assisted Learning* **22**, 114-136.

Schnepp, M. & Chazan. D. (2004) Incorporating experiences of motion into a calculus classroom, PME Special Issue: Bodily activity and imagination in mathematics learning, *Educational Studies in Mathematics* **57(3)**, pp.309-313.

Construction of function graphs through turtle motion

Cho, Han Hyuk
Seoul National University
hancho@snu.ac.kr

Song, Min-Ho
Seoul National University, Graduate school
mino@snu.ac.kr

There are different perspectives on a function graph. For instance, a parabola is defined by movement of a ball in physics and by quadratic function in mathematics. This study deals with the turtle motion, which is local and intrinsic, and the construction of function graphs with mathematical experiments in a microworld. This paper concerns with a function graph which is in the curriculum or in the history of mathematics. In view of pre-calculus, we introduce activities of mathematization about formalizing of length and area of function graphs without knowledge of calculus.

* ZDM Classification : U74
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C80
* Key Words : Turtle Geometry, Microworld, JavaMAL, pre-calculus