한국시뮬레이션학회 논문지
Vol. 17, No. 3, pp. 19-26 (2008. 9)

난수 생성기법을 이용한 채권 가격의 정확한 예측

박기섭[1] · 김문성[2] · 김세기[1†]

Accurate Prediction of the Pricing of Bond Using Random Number Generation Scheme

Kisoeb Park · Moonseong Kim · Seki Kim

ABSTRACT

In this paper, we propose a dynamic prediction algorithm to predict the bond price using actual data set of treasure note (T-Note). The proposed algorithm is based on term structure model of the interest rates, which takes place in various financial modelling, such as the standard Gaussian Wiener process. To obtain cumulative distribution functions (CDFs) of actual data for the interest rate measurement used, we use the natural cubic spline (NCS) method, which is generally used as numerical methods for interpolation. Then we also use the random number generation scheme (RNGS) to calculate the pricing of bond through the obtained CDF. In empirical computer simulations, we show that the lower values of precision in the proposed prediction algorithm corresponds to sharper estimates. It is very reasonable on prediction.

Key words : Bond price, Cubic spline (CS) interpolation, Random number generation scheme, Stochastic simulation

요 약

본 논문에서는 중기 국채(Treasure Note; T-Note)의 실제 자료를 이용하여 채권 가격에 대한 이자율을 예측하는 동적인 예측 알고리즘을 제안하고 있다. 제안한 알고리즘은 이자율 기간 구조를 근본으로 하고 있으며 표준 위너 과정(standard Wiener process)과 같은 다양한 금융 모형의 대안으로 활용 가능하다. 본 논문에서는 실제 자료의 누적 분포 함수(Cumulative Distribution Function; CDF)를 이용하여 이자율을 측정하였으며 CDF는 수치적 방법인 보간법 중에 자주 활용되는 내츄럴 큐빅 스플라인(natural cubic spline; NCS)방법을 통하여 얻었다. 위에서 얻은 CDF를 통하여 난수 생성기법(random number generation scheme; RNGS)을 이용하여 채권의 가격를 계산하였다. 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 얻은 실험결과로부터 제안된 예측 알고리즘에서 엄밀도(precision)의 낮은 값을 얻음으로써 채권의 가치가 더욱 예리하고 정확하게 평가되었음을 확인할 수 있었으며, 이는 매우 근거 있는 예측이라 할 수 있다.

주요어 : 채권 가격, Natural Cubic Spline (NCS), 난수 생성기법, 통계적 시뮬레이션

1. 서 론

연속적인 시간상에서 이자율 기간 구조 모형(term structure model; TSM)의 접근방법은 크게 평형 접근(equilibrium approach) 또는 무차익 접근(arbitrage-free approach)으로 표현되고 있으며, 심지어 초기의 여러 모형들은 두 접근의 개념을 포함하여 모형화하기도 하였다.

본 논문에서는 Vasicek 모형[1], Cox, Ingersoll, and Ross 모형[2], Hull and White 모형[3], Ahn and Thompson의 점프-디퓨젼 모형(jump-diffusion model)[4]과 Baz and Das의 모형[5]을 소개하고 있다. 또한 Heath, Jarrow, and Morton의 모형[6]은 기간 구조모형에 대한 가장 일반적인 방법으로 널리 받아들여지고 있다. 더욱이, 점프-디퓨젼 과정(jump-diffusion process)을 이용한 현재 연구로는 무

* 이 논문은 산학협동재단 2007년도 학술연구비의 지원을 받아 수행되었음.
2008년 6월 11일 접수, 2008년 9월 16일 채택
[1] 성균관대학교 수학과
[2] Michigan State University, USA
주 저 자 : 박기섭
교신저자 : 김세기
E-mail; skim@skku.edu

차익 점프-디퓨젼(affine jump-diffusion)[7,8]과 2차 가우시안(quadratic Gaussian)의 두 분류에 의존하고 있다. 기존의 연구동향을 살펴보면, 이자율 모형은 확산 과정(diffusion process)을 바탕으로 이루어져 있다. 즉, 어떤 변수는 확률 과정(stochastic process)이라고 불리는 시간 상에서 값이 불확실하게 변한다.

이자율 모형은 대부분 위너 과정(Wiener process)으로 표현되어지고 있으며, 물리학에서 많은 수의 작은 충격에 의한 입자의 움직임을 묘사하는 데 주로 사용되며 때로는 브라운 과정(Brownian motion)이라고도 한다. 위너과정은 기대 수익률(drift rate)이 0이고 분산률(variance rate)이 1인 기본적인 형태이다. 실제로 짧은 기간 이자율이 랜덤 워크(random walk)를 따르는 여러 모형들을 표현할 수 있으며, 채권 가격결정에 대한 편미분 방정식(partial differential equation; PDE)을 유도할 수 있다. PDE를 이용하여 TSM에 대한 채권 가격의 해를 얻을 수 있다. 이 방법은 두 가지 단점을 가지고 있다. 첫째로, TSM의 실증분석이 어려우며, 둘째로, 억지 방법(brute force method; BFM)상에서 높은 정확도로 평가되기 위해서는 많은 시간이 소요[9]된다는 단점을 가지고 있다.

본 논문에서는 이런 단점을 보완하기 위하여 이자율의 실제 자료를 이용하였으며, 채권 가격에 대한 이자율을 예측하는 알고리즘을 제안하였다. 제안한 알고리즘은 이자율 기간 구조를 근본으로 하고 있으며 표준 위너 과정과 같은 다양한 금융 모형의 대안으로 가능하다. 본 논문에서는 실제 자료의 누적분포함수(cumulative distribution function; CDF)를 이용하여 이자율을 측정하였으며 CDF는 수치적 방법인 보간법 중에 흔히 활용되는 내츄럴 큐빅 스플라인(natural cubic spline; NCS)방법[10]을 통하여 얻었다. 이자율의 분포 특성을 반영한 CDF를 활용하여 난수(random number)를 생성하였으며, 본 난수들을 통하여 채권의 가격을 조사하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 논문의 동기를 소개하고, 3장에서는 제안한 예측 알고리즘에 이용하기 위하여 수치적 기법 중에 하나인 NCS 보간법에 대하여 표현하고, 4장에서는 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo simulation; MCS)기반의 제안 알고리즘을 소개하였으며, 5장에서는 난수 생성기법(random number generation scheme; RNGS)를 이용한 MCS에 의한 채권 가격 결정결과에 대해 분석하고, 6장에서 본 논문의 결론을 제시한다.

2. 동기부여

채권 가격은 마코브 과정(Markov process)을 따른다고 가정한다. 마코브 과정은 미래를 예측하는데 있어 과정의 현재상태만이 중요하다는 특별한 확률 과정(stochastic process)을 말한다. 채권 가격의 모형들은 대개 위너 과정(Wiener process)이라고 불리는 것에 의해 표현된다. 위너 과정은 마코브 과정의 특별한 형태이다. 같은 방법으로 자산 가치(asset price)에 대한 모형은 대수정규 랜덤 워크(lognormal random walk)를 따르는 이자율 r은 아래와 같이 확률적 미분 방정식(stochastic differential equation; SDE)에 의해 지배 받는다.

$$dr = u(r,t)dt + \sigma(r,t)dW \tag{1}$$

여기서, $u(r,t)$는 t시점에서의 기대 수익률, $\sigma(r,t)$는 t시점에서의 표준편차이고, dW는 위너 과정(Wiener process)을 따른다.

채권 가격에 관한 식을 표현하면 아래와 같다.

$$V(r_t,t,T) = \boldsymbol{E}_t^Q\left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)\middle| r(t)\right] \tag{2}$$

여기서, $\boldsymbol{E}_t^Q$는 무위험 측도(risk-neutral measure)를 대표하는 기대값 연산자이다.

이제, MCS에 대하여 논의하면, 확률 과정의 MCS는 확률 과정에 대한 샘플링(sampling) 절차의 랜덤 결과이다. MCS를 수행하기 위하여, 방정식 (1)을 이산적으로 표현하였으며, 시간 구간 $[t,T]$을 m으로 나누어, 각 시간 구간은 $\triangle t$와 같다. 작은 시간 구간에 대하여, SDE에 대한 이산 버전을 표현하면 아래와 같다.

$$r_j = r_{j-1} + u(r,t)\,\Delta t + \sigma(r,t)\epsilon_j\sqrt{\Delta t} \tag{3}$$

여기서, $j = 1, 2, \cdots, m$과 ϵ_j는 표준정규분포(standard normal distribution)를 따르고 $\epsilon_j \sim N(0,1)$로 나타낸다.

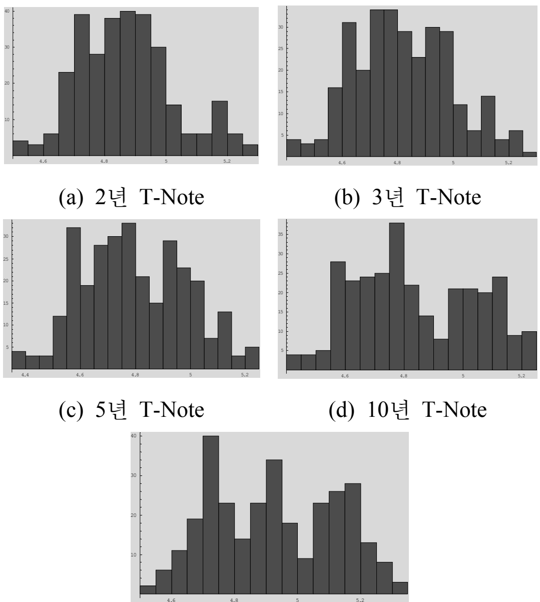
방정식 (2)의 이산 과정 하에서 샘플링 된 n개의 이자율 경로에 의하여 채권의 가격을 아래에 주어지는 식을 통하여 얻을 수 있다.

$$V(t,T) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp\left(-\sum_{j=0}^{m-1} r_{ij}\Delta t\right) \tag{4}$$

여기서, r_{ij}는 시간 $t+\Delta t$에서 샘플 경로 i의 범위 내에서 이산 과정 하에서의 이자율의 가치이다.

MCS은 다른 수치적 방법보다 수행하는데 다소 어렵고 개념적으로 복잡하지만 복잡한 금융 상품을 처리하고 계산하는 데 다루기 용이하기 때문에 채권 가격결정에 자주 활용된다. 하지만, 기존의 난수생성방법을 활용한 BFM 하에서의 시뮬레이션결과를 통해서 정확한 가치를 예측하기 위해서는 더욱 많은 시행이나 분산 감소 기법(variance reduction technique)을 활용하는데 이를 구현하고 적용하는데 많은 제약이 따르고 채권의 가치를 평가함에 있어 많은 어려움이 따른다. 이런 이유는 실제 분포가 정규 분포가 아니기 때문에 실제보다 에러(error)가 상대적으로 높다고 할 수 있다. 이런 모순점을 토대로 보다 현실적이고 실제적인 현상을 활용하는 방법이 필요하다고 생각한다. 그리하여 기존에 제시한 여러 이자율 기간구조 모형이 가지고 있는 모순을 최소화하기 위하여 실제 자료를 활용하여 수치적 기법(NCS)을 이용하여 누적분포함수(CDF)를 생성하고 이를 토대로 난수를 생성하는 최적화된 모형화가 중요하다고 여겨지기에, 논문에서 본 방법을 제시하고자 한다.

그림 1에 나타나듯이 실제 자료는 구체적이지 않은 CDF를 따른다. 본 자료는 2년, 3년, 5년, 10년과 30년 중기 국채(Treasury note; T-Note)에 대한 300개의 실제 자료(2006년 2월 29일부터 2007년 2월 9일까지의 T-Note)의 히스토그램을 표현하였다. 그림 1을 살펴보면 (a)의 평균(μ)은 4.86460, 표준편차(σ)는 0.008951이고, (b)의 평균은 4.81573과 표준편차는 0.01003이고, (c)의 평균은 4.79097과 표준편차는 0.01077이고, (d)의 평균은 4.83과 표준편차는 0.0118이며, 그리고 (e)의 평균은 4.9003이고 표준편차는 0.0114이다. 다섯 개의 히스토그램은 매우 다르게 표현되며, 실제로 2년 T-Note보다 10년 T-Note가 평균을 중심으로 표준편차가 크므로 보다 역동적인 모양을 가지고 있으며 10년 T-Note가 2년 T-Note보다 오른쪽으로 기울어져 있음을 알 수 있다.



(a) 2년 T-Note　(b) 3년 T-Note　(c) 5년 T-Note　(d) 10년 T-Note　(e) 30년 T-Note

그림 1. T-Note에 대한 히스토그램
(X축: 수익률, Y축: 빈도수, $N=300$)

기존의 연구들은 이자율 모형이 위너 과정을 기초로 하여 수행되어졌으며, 이미 위너 과정을 얻고 그리고 나서 확률적 성질을 얻었다. 하지만, 미리 측정된 이자율 자취는 이미 이자율 예측의 의미를 잃어 버렸다. 이런 이유는 실제 분포가 정규 분포(normal distribution)가 아니기 때문에 현실에 맞는 요소가 배제되어 있기에 실제보다 에러(error)가 상대적으로 높다고 할 수 있다. 따라서 채권 가격의 동적특성을 유지하기 위하여, 본 논문에서는 실제 자료의 CDF를 이용하여 이자율을 측정하였으며 CDF는 수치적 방법인 보간법 중에 흔히 활용되는 NCS 방법을 통하여 얻었다. 다음 절에서 NCS를 이용하여 CDF를 만드는 과정에 대하여 알아보자.

3. NCS 보간법을 이용한 CDF

본 논문에서는 실제 자료의 CDF를 이용하여 이자율을 측정하였으며 CDF를 구하기 위하여, 가장 널리 이용되는 부분적인 근사 다항식을 이용하는 NCS 보간법[9]을 활용하였다. NCS는 스플라인 함수 중 가장 활용빈도가 높다. 왜냐하면, 고정된 자료 하에서 매끄러운 곡선과 이 보간법을 이용할 때, 고차원 다항식 보간법의 특성상 진동하는 습성을 가지고 있지 않기 때문이다.

이제 NCS에 대하여 본격적으로 논의해 보기로 하자. 일반성을 잃지 않고 $n+1$개의 점 $(x_{0,}\, y_0)$에서 (x_n, y_n) (단, $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$), 본 논문에서는 $F(x_i) = y_i$ $(0 \le i \le n)$를 만족하는 NCS 함수 $F(x)$를 찾을 수 있으며 다음과 같은 선형 스플라인 함수로 표현할 수 있다.

$$F(x) = \begin{cases} F_0(x), & x_0 \le x \le x_1 \\ F_1(x), & x_1 \le x \le x_2 \\ \vdots & \vdots \\ F_{n-1}(x), & x_{n-1} \le x \le x_{n.} \end{cases}$$

주어진 구간에 대하여 보간된 함수 $F(x)$를 구하기 위하여, 아래와 같은 형태의 다항식으로 정의한다.

$$F_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i \tag{5}$$

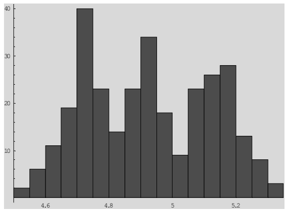
여기서, $i = 0, \cdots, n-1$이다.

각각의 F_i는 (a_i, b_i, c_i, d_i), $i = 0, \cdots, n-1$의 4개의 미지수를 갖는다. 따라서 전체 $4n$개의 미지수가 존재한다. 스플라인을 모든 $n+1$개의 점들에 아래와 같은 식을 통하여 보간한다. $F_i(x_i) = y_i (0 \le i \le n-1)$과 주어진 $n+1$개의 조건하에서는 $F_{n-1}(x_n) = y_n$이다. 스플라인에 대한 연속적인 조건들인 1계, 2계 도함수는 아래와 같은 조건을 따른다.

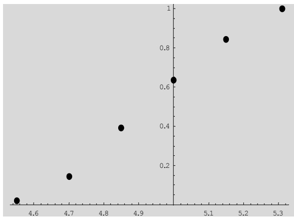
$F_{i-1}(x_i) = F_i(x_i) (0 \le i \le n-1)$의 $n-1$개의 조건, $F'_{i-1}(x_i) = F'_i(x_i) (0 \le i \le n-1)$의 $n-1$개의 조건, $F''_{i-1}(x_i) = F''_i(x_i)$ $(0 \le i \le n-1)$의 $n-1$개의 조건이 있으며, 총 $4n-2$개의 조건이 있다. 유일한 해를 얻기 위하여, 2개의 추가 조건이 필요하다. 보통의 접근은 아래와 같은 조건을 포함시킨다.

$$F_i''(x_0) = F_i''(x_n) = 0.$$

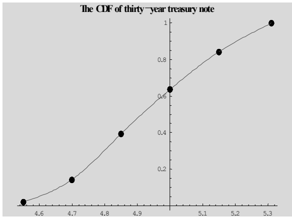
위와 같은 조건에서 얻어진 함수를 NCS이라고 부른다. 여기서, $F_i'(\cdot)$과 은 $F_i(\cdot)$의 1계, 2계 도함수를 의미한다. 우리가 알고 있는 것처럼, NCS 방법은 매우 다루기 쉽고, 제안된 점을 통하여 그래프가 좋게 평가된다. 결국, 이자율의 예측을 위$F_i''(\cdot)$하여 NCS 방법을 활용할 것이다. 제안된 점에서 계산하기 위하여, 첫째로, 히스토그램(그림 1 참조)을 T-Note에 대한 수익률의 각기 다른 크기의 발생들을 누적시켜서 누적분포(cumulative distribution; CD)로 변환한다. 둘째로, 수익률 크기에 대하여 최대값(x_0)과 최소값(x_n)을 계산한다. 세 번째로, 닫힌 구간 $[x_0, x_n]$를 n개의 구간으로 나눈다. 여기서, 소구간 $[x_{i-1}, x_i]$의 길이는 $\Delta x_i = \Delta x$라 놓는다. 추후에 각 구간 $[x_{i-1}, x_i]$에 대한 빈도수 β_i를 얻을 것이며, 제안된 점으로 계산되어지고, $\alpha_i = (x_i - x_{i-1})/2$이면 제안된 점들은 $(\alpha_i, \beta_i) (i = 1, \cdots, n)$로 이루어진다. 만약 전체 실제 자료의 수가 N이라면, $N = \sum_i \beta_i$이다. 실제로 NCS 보간법을 이용하여 제안된 점들을 통하여 함수 $F(x)$를 얻을 것이다. 예를 들어, 그림 2에 30년 T-Note($N = 300$ $n = 6$)에 대한 $F(x)$를 구하였다.



(a) 히스토그램(X축: 수익률, Y축: 빈도수)



(b) (a)의 CD(X축: 수익률, Y축: 누적 빈도수)



(c) (b)의 CDF(X축: 수익률, Y축: 누적 빈도수)

그림 2. 30년 T-Note에 대한 NCS 보간법을 이용한 CDF 생성 과정 ($N = 300, n = 6$)

4. RNGS를 이용한 통계적 시뮬레이션

채권 가격 결정을 위하여 복잡한 금융 상품들을 처리하기에 가장 효과적인 MCS의 관심은 크게 증가하고 있다. MCS은 실제적으로 매우 일반적인 방법이고, 랜덤 샘플링(random sampling)을 기초로 한 수치 적분(numerical integration)을 표현할 수 있다. 하지만, BFM하에서 높은 정확도로 평가되기 위해서는 많은 시간이 소요되는 단점이 있으며, 높은 정확도를 얻기 위해서는 많은 시행(trial)이 필요하다. 이런 단점을 보완하기 위하여 이자율의 실제 자료를 이용하였다. 본 논문에서는 대수정규분포를 따르는 TSM에서 이자율 r을 얻기 위하여 RNGS를 이용하였다. 즉, RNGS를 이용한 MCS를 통하여 채권 가격을 결정하였다. 이제 이 방법의 이용과정에 대하여 설명해보자.

방정식 (2)를 이산적인 형태로 표현한다. 시간구간 $[t, T]$를 m등분하고 작은 소구간의 길이를 Δt로 표현한 후

에 각각의 소구간에 해당하는 이자율의 이산적인 버전을 $r_j(j=1,2,\cdots,m)$으로 표현 할 수 있다. 샘플링한 k개의 이자율 경로에 의하여 채권의 가치를 조사할 수 있다. 각 경로에 해당하는 이자율 r_j는 역변환 방법(inverse-transform technique)[11]을 이용한 RNGS를 통하여 구한다. 먼저, CDF를 $R=F(x)$라 놓는다. 균등분포(uniform distribution; UD) $[0,1]$에서 난수 R을 생성한다. 따라서 주어진 방정식으로부터 역함수 $x=F^{-1}(R)$를 구할 수 있고 컴퓨터를 통하여 쉽게 결정할 수 있다. 즉, 다음과 같은 단계를 통하여 확률 변수(random variable) $x_i(i=0,\cdots,n)$를 구해보자.

[Step 1] 확률 변수 x에 의존하는 CDF $F(x)$를 NCS 보간법을 이용하여 CDF를 계산한다.

[Step 2] 각 x의 구간상에서 CDF를 표현한다.

[Step 3] CDF를 역함수 F^{-1}로 표현한다.

[Step 4] UD $[0,1]$에서 난수 $R_{0,}R_1,\cdots,R_n$을 생성하고 역함수 F^{-1}을 이용하여 확률 변수 $x_i=F^{-1}(R_i)$ $(i=0,\cdots,n)$를 구할 수 있으며, 이것에 대한 설명을 그림 3에 보였다.

[Step 5] 따라서, 위에서 제안된 예측 알고리즘(proposed prediction algorithm)을 통해서 다음과 같은 난수(random number)를 얻을 수 있다. 예를 들어, $m=300$, $n=6, N=300$과 k(시행)$=10$상에서 시뮬레이션 수행시에 실제 적용되는 데이터를 방정식 $x=F^{-1}(R)$을 통해 생성된 난수를 그림 4에 표현하였다.

그림 4를 통해 알 수 있듯이 실제 자료를 이용한 수치적 기법을 통하여 누적분포함수를 찾고 통계적 기법을 통하여 난수를 생성하기 때문에 년 수에 따라 서로 다른 패턴을 갖는다. 즉, 이자율 기간구조 모형에 대한 보다 효율적이고 정확한 가치평가가 이루어 질 수 있다고 기대할 수 있다. 더불어 이에 대한 모형의 알고리즘을 구현하여 시스템을 구축함으로써 각각의 경우에 대응되는 가치평가를 알고리즘을 통하여 보다 효과적이고 보다 빠른 가치평가를 할 수 있으리라 기대된다. MCS를 이용하여 채권의 가격을 결정하기 위해 방정식 (2)를 이산형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\overline{V}(t,T)=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\exp\left(-\sum_{j=0}^{m-1}r_{ij}\Delta t\right) \qquad (6)$$

여기서, r_{ij}는 이자율은 의미한다.

즉, r_{ij}에 앞에서 구한 확률 변수 x_i 값을 대입하고 k번 시행한 후에 그 값들의 평균값을 구하면 채권의 가격을 결정할 수 있다. 평균 평가의 예리한 측정중의 하나인 평균 표준 오차(mean standard error; MSE)를 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$MSE=\frac{\nu}{\sqrt{k}} \quad \text{or} \quad k=\frac{\nu^2}{MSE^2} \qquad (7)$$

여기서,

$\nu^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{k}\left[\exp\left(-\sum_{j=0}^{m-1}r_{ij}\Delta t\right)-\overline{V}(t,T)\right]^2}{k-1}$은 채권 가격

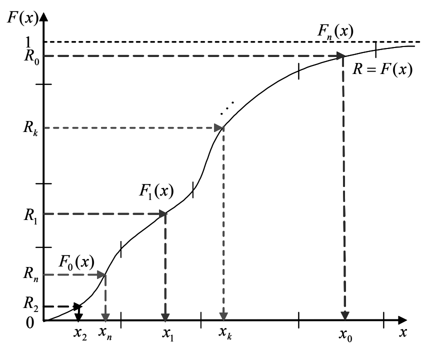
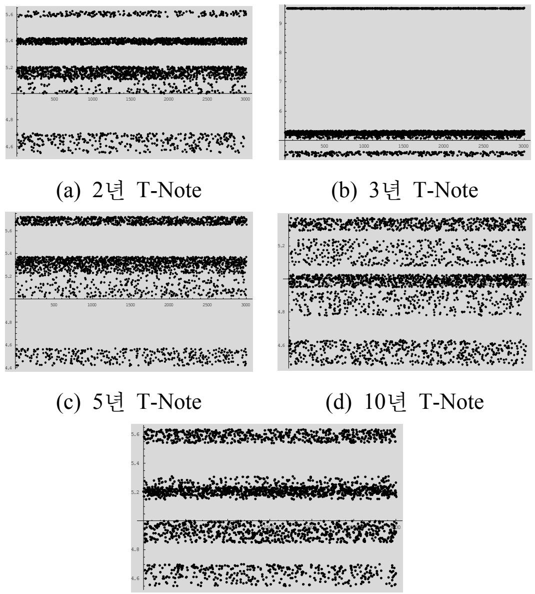


그림 3. 난수(random number) 생성과정



(a) 2년 T-Note (b) 3년 T-Note

(c) 5년 T-Note (d) 10년 T-Note

(e) 30년 T-Note

그림 4. 실제 자료를 이용한 난수생성에 대한 리스트 (X축: 시뮬레이션 시행횟수, Y축: T-Note의 수익률)

의 분산 추정치로써 이자율의 k 샘플 경로로부터 얻을 수 있다. 평균의 정도(precision; PCS)를 평가하는 측도로써 신뢰구간 95%의 반구간(half-width)처럼 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$PCS(\%) = 1.96 \times MSE \times 100 \tag{8}$$

방정식 (8)에서 PCS의 값이 작을수록 예리 하게 평가되었음을 의미한다. BFM하에서 높은 정확도로 평가되기 위해서는 많은 k가 필요하다. 하지만 RNGS를 이용하여 MCS를 k에 큰 영향 없이 짧은 시간 안에 높은 정확도로 평가되기 때문에 그 의미가 더욱 크다고 할 수 있다.

5. 평가 및 분석

본 절에서는 수치적 기법을 통하여 얻은 CDF를 통해 RNGS를 이용하여 MCS를 활용하여 채권의 가격을 예측하였다. 시뮬레이션을 시행하기 위하여, 시간구간 1년에 대하여 $m = 300$개의 구간으로 분할하였고 시행횟수 k는 10번과 100번 실행하였으며, 실제 자료에 대한 CDF를 결정하기 위하여 NCS 방법을 이용하였는데 함수의 개수 n은 6개와 9개로 분할하여 구하였다. 아래의 표 1～표 4는 기존의 MCS와 RNGS를 이용하여 MCS에 의하여 채권의 가격을 비교, 분석해 놓았다. 위의 시뮬레이션을 위하여 몇몇 모수(parameter)의 값을 결정하였는데 μ(평균)와 σ(변동성(표준편차))는 실제 자료집합(2006년 2월 29일부터 2007년 2월 9일까지의 T-Note)에서 구하였으며, $\Delta t = (T-t)/m$, $m = 300$, $t = 0$과 $T = 1$로 세팅하였다.

본 시뮬레이션 분석을 위하여, 실제 값들의 차 사이의 비율인 상대오차(relative error; RE)를 이용하였으며, 그 정의는 아래와 같다.

$$RE(\%) = \frac{OLDS - NEWS}{OLDS} \times 100 \tag{9}$$

여기서, $OLDS$는 위너 과정(Wiener process)을 따르는 SDE의 이산 방정식 (3)에 대한 방정식 (6)의 MCS에 의한 기존 방식에 대한 채권의 현재가치이고, $NEWS$는 실제 자료를 이용하여 수치적 기법(NCS)을 통하여 누적 분포함수(CDF)를 찾고 통계적 기법을 통하여 생성된 난수를 얻는 제안된 예측 알고리즘을 통하여 얻은 채권의 현재가치를 의미한다.

매쓰매티카(Mathematica)[12]를 이용해서 만기시 채권

표 1. MCS와 RNGS를 이용한 MCS에 의한 채권가격 ($k = 10, n = 6$)

	2년	3년	5년	10년	30년
OLDS	0.951858	0.955632	0.952468	0.950180	0.952982
NEWS	0.949310	0.941683	0.948561	0.951382	0.949762
OLDS -PCS(%)	0.289054	0.321524	0.347103	0.472733	0.259883
NEWS -PCS(%)	0.008994	0.039906	0.010310	0.010777	0.007100
RE(%)	0.267704	1.45965	0.410217	0.137522	0.337897

표 2. MCS와 RNGS를 이용한 MCS에 의한 채권가격 ($k = 10, n = 9$)

	2년	3년	5년	10년	30년
OLDS	0.951858	0.955632	0.952468	0.950180	0.952982
NEWS	0.951624	0.950922	0.952030	0.952060	0.951104
OLDS -PCS(%)	0.289054	0.321524	0.347103	0.472733	0.259883
NEWS -PCS(%)	0.006050	0.039906	0.003900	0.005968	0.006292
RE(%)	0.005369	0.492914	0.045943	0.197904	0.197060

표 3. MCS와 RNGS를 이용한 MCS에 의한 채권가격 ($k = 100, n = 6$)

	2년	3년	5년	10년	30년
OLDS	0.954364	0.954303	0.954408	0.954385	0.955926
NEWS	0.949311	0.941657	0.948592	0.951343	0.949790
OLDS -PCS(%)	0.087741	0.112154	0.109330	0.122572	0.130106
NEWS -PCS(%)	0.002951	0.018156	0.004207	0.003029	0.003180
RE(%)	0.529424	1.32510	0.609403	0.318794	0.64193

표 4. MCS와 RNGS를 이용한 MCS에 의한 채권가격 ($k = 100, n = 9$)

	2년	3년	5년	10년	30년
OLDS	0.954364	0.954303	0.954408	0.954385	0.955926
NEWS	0.951586	0.950954	0.952042	0.952044	0.951100
OLDS -PCS(%)	0.087741	0.112154	0.109330	0.122572	0.130106
NEWS -PCS(%)	0.001645	0.002561	0.002010	0.001846	0.002507
RE(%)	0.291053	0.350897	0.247897	0.245329	0.504867

의 가치 $V(r_t, T, T) = 1$로 생각했을 때, 채권의 현재가치를 제안된 알고리즘을 통하여 표 1～표 4에 기록하였고, OLDS-PCS(%)은 OLDS의 PCS을 의미하고, NEWS-PCS(%)은 NEWS의 PCS을 의미한다.

위의 시뮬레이션 결과에서 보여 지듯이, 기존의 모형에 대한 MCS의 PCS보다 제안된 예측 알고리즘(proposed prediction algorithm)을 통해서 얻는 PCS의 값이 훨씬 낮다는 것을 알 수 있으며, 이는 매우 예리하게 채권 가격이 결정되었음을 입증하는 근거라 할 수 있다.

6. 결 론

본 논문에서는 채권의 가격을 예측하기 위하여 동적인 예측 알고리즘(dynamic prediction algorithm)을 제안하였다. 기존의 연구에서는 이자율 모형은 위너 과정(Wiener process)을 기반으로 수행되었고 미리 이 과정을 얻고 나서 통계적 성질들을 얻었다. 하지만, 미리 측정된 이자율 경향은 이미 이자율 예측의 효과를 상쇄시키기 때문에 이자율의 동적인(dynamic) 경향을 유지시키기 위하여 이자율의 실제 자료를 측정하여 CDF를 이용하고자 한다. CDF를 구하기 위하여, NCS 보간법을 이용하였고 이자율의 특성을 반영한 CDF를 통하여 RNGS를 이용하여 난수를 생성하였으며 MCS에 활용하여 채권의 가격을 조사하였다. 본 논문에서는 MCS와 RNGS를 이용한 MCS에 의한 채권 가격사이에는 부분적으로 다소 차이가 있음을 확인하였다. 그 차이점을 PCS으로 확인하였는데 시뮬레이션의 결과를 통하여, 기존의 모형에 대한 MCS의 PCS보다 제안된 예측 알고리즘을 통해 서 얻는 PCS이 훨씬 낮다는 것을 확인 할 수 있었다. 이는 매우 예리하고 정확하게 채권 가격이 결정되었다는 결과라 할 수 있다.

참 고 문 헌

1. O. A. Vasicek, “An Equilibrium Characterization of the Term Structure,” Journal of Financial Economics, Vol. 5, pp. 177-188, 1977.
2. J. C. Cox, J. Ingersoll, and S. Ross, “A Theory of the Term Structure of Interest Rate,” Econometrica, Vol. 53, pp. 385-407, 1985.
3. J. Hull and A. White, “Pricing Interest Rate Derivative Securities,” Review of Financial Studies, Vol. 3, pp. 573-592, 1990.
4. C. Ahn and H. Thompson, “Jump-Diffusion Processes and the Term Structure of Interest Rates,” Journal of Finance, Vol. 43, pp. 155-174, 1998.
5. J. Baz and S. R. Das, “Analytical Approximations of the Term Structure for Jump-Diffusion Processes: A Numerical Analysis,” Journal of Fixed Income, Vol. 6, pp. 78-86, 1996.
6. D. Health, R. Jarrow, and A. Morton, “Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates,” Econometrica, Vol. 60, pp. 77-105, 1992.
7. Q. Dai and K. Singleton, “Expectation Puzzles, Time-varying Risk Premia, and Affine Models of the Term Structure,” Journal of Financial Economics, Vol. 63, pp. 415-441, 2002.
8. C. Peng and S. Olivier, “Linear-Quadratic Jump-Diffusion Modeling,” Mathematical Finance, Vol. 17, pp. 575-598, 2007.
9. J. M. Charnes, “Sharper estimates of derivative values,” Financial Engineering News, No. 26, pp. 6-8, 2002.
10. C. F. Gerald, Applied Numerical Analysis, Addison-Wesley, 1999.
11. A. Papoulis and S. U. Pillai, “Probability, Random Variables, and Stochastic Processes,” 4th ed. McGraw-Hill, 2002.
12. Wolfram, “MathWorld,” http://mathworld.wolfram.com

박 기 섭 (kisoeb@skku.edu)

2007 성균관대학교 수학과 이학박사
2004～2008 성균관대학교 수학과 대학강사
2005～2008 아주대학교 수학과 대학강사
2007～2008 경희대학교 수학과 대학강사
2005～2008 한서대학교 겸임교수
2003～현재 성균관대학교 기초과학연구소 선임연구원

관심분야 : 금융수학, 수치해석&시뮬레이션, 편미분방정식

김 문 성 (mkim@msu.edu)

2002 성균관대학교 수학과 졸업 석사
2007 성균관대학교 전기전자 및 컴퓨터공학과 졸업 박사
2005～2006 한국전자통신연구원(ETRI) 위촉연구원
2007～2008 성균관대학교 정보통신공학부 연구교수
2007～현재 미국 Michigan State University 박사후연구원

관심분야 : 라우팅알고리즘, 모바일컴퓨팅, 수치해석&시뮬레이션

김 세 기 (skim@skku.edu)

1995년 미국 Univ. of Iowa 수학박사
1995년～1997 서울대학교 박사후연구원
1997년～현재 성균관대학교 부교수

관심분야 : 금융수학, 수치해석&시뮬레이션, 생의학 수학