

평활화된 무차원 단위핵함수를 이용한 단위도의 유도

A Derivation of a Hydrograph by Using Smoothed Dimensionless Unit Kernel Function

성기원*
Seong, Kee Won

Abstract

A practical method is derived for determining the unit hydrograph and S-curve from complex storm events by using a smoothed unit kernel approach. The using a unit kernel yields more convenient way of constructing a unit hydrograph and its S-curve than a conventional method. However, with use of real data, the unit kernel oscillates and is unstable so that a unit hydrograph and S-curve cannot easily obtained. The use of non-parametric ridge regression with a Laplacian matrix is suggested for deriving an event averaged unit kernel which reduces the computational efforts when dealing with the Nash instantaneous unit hydrograph as a basis of the kernel. A method changing the unit hydrograph duration is also presented. The procedure shown in this work will play an efficient role when any unit hydrograph works is involved.

keywords : Unit hydrograph, unit kernel, ridge regression, Nash model

요 지

본 연구에서는 복합 강우사상으로부터 단위도와 S-곡선을 도출하는 실용적인 방법을 강구하였다. 이 연구에서 이용된 단위핵함수는 단위도와 S-곡선을 유도하는데 있어서 기존의 방법보다 편리하다. 그러나 실제 자료를 분석할 때 단위핵함수는 진동을 보이고 불안정하기 때문에 단위도와 S-곡선 도출에 있어서 장애가 있다. 그런데 단위핵함수의 요소인 Nash의 순간단위도를 추정함에 있어서 Laplacian 행렬을 이용한 능형회귀분석을 이용하면 사상에 대한 평균적인 단위핵함수를 구하는데 유의함을 발견하였다. 또한 이를 이용하여 단위도의 지속기간 변경도 가능하였다. 이 연구에서 제시된 방법론은 단위도 제작에 적지 않은 도움이 될 것으로 기대한다.

핵심용어 : 단위도, 단위핵함수, 능형회귀분석, Nash 모형

1. 서 론

복합 강우사상으로부터 단위도(unit hydrograph, *UH*)를 도출할 때 단위도의 지속기간은 유효우량의 지속기간과 같다. 이러한 임의의 지속기간 단위도를 다른

지속기간의 단위도로 변환하기 위해서는 정수배 방법과 S-곡선법 등이 이용된다. 이 가운데 S-곡선법은 정수배 방법에 비하여 지속기간의 변경에 대한 제한이 없기 때문에 실무적으로 보다 유용하다. 또한 S-곡선은 순간단위도(instantaneous unit hydrograph, *IUH*)와

* 건국대학교 공과대학 토목공학과 부교수
Associate Professor, Dept. of Civil Engr., Konkuk University, 1, Hwayang-dong, Gwangjin-gu, Seoul 143-701, Korea
(e-mail: kwseong@konkuk.ac.kr)

이론적인 측면에서 잘 연결되기 때문에 Nash 모형 (Nash, 1959)과 같은 합성 순간단위도(synthetic IUH)를 S-곡선의 작성에 이용하여 지속기간의 변경과 같은 작업을 보다 용이하게 수행하기도 한다. 그런데 S-곡선은 유역의 강우-유출 특성을 대표하는 고정된 고유곡선이 아니라 유도되는 유효강우의 지속기간에 따라 임의의 S-곡선을 갖는다. 이에 지속기간의 변경절차는 S-곡선의 이동 그리고 지속기간비의 곱셈 등 번거로운 산술적 조작이 요구된다. 또한 S-곡선을 유도하는 단위도가 복합 강우사상에서 도출되었을 경우 매끄럽지 못한 종거값의 진동이 발견되기도 한다. 이 경우 S-곡선도 안정된 형태를 보여주지 못하고 진동을 보여준다. 이 경우 임의의 보정을 통하여 곡선을 매끄럽게 다듬는 등의 작업이 추가로 요구되기도 한다. 따라서 단위도의 지속기간 변경을 보다 안정적이고 편리하게 수행하는 방법이 필요하다고 할 수 있다.

본 연구에서는 직접유출 계산을 단순하고 수치해석적으로 유리하도록 합성 순간단위도를 적용하였는데 이를 위하여 연속함수인 감마분포모형(gamma distribution)을 채택하였다. 이 결과 지속기간 그리고 관측 시간간격의 변경에도 불구하고 순간단위도의 종거값 계산이 용이하였다. 이 감마분포형 순간단위도의 적용과 더불어 Singh(2004)이 제안한 무차원 단위핵함수(unit kernel)와 강우사상 기록의 시간간격에 의존하지 않는 S-곡선 작성법이 단위도 계산을 위하여 도입되었다. 또한 복합 강우사상의 분석에서 발견할 수 있는 단위핵함수의 광범위한 진동을 제어하기 위하여 성기원, 심명필(1999)이 제안한 Laplacian 행렬에 의한 시스템응답함수의 진동제어 기법을 사용하였고 이 결과를 감마분포 모형의 모수결정에 이용하였다. 또한 제어된 단위핵함수와 S-곡선을 이용하여 단위도의 지속기간 변경에 적용하였다.

2. 본 론

2.1 모형의 구성

복합 강우사상으로부터 단위도를 유도할 때 사상의 선형 시불변(linear time invariant) 시스템 특성을 가정하여 강우유출 관계를 Eq. (1)과 같은 행렬식으로 나타낼 수 있다.

$$DR = H UK \quad (1)$$

여기서 벡터 DR 은 직접유출량(단위: m^3/sec), H 는 강우행렬(단위: m^3/sec)이며 식에서 회선행렬(convolu-

tion matrix)로 표현된다. 그리고 UK 는 단위핵함수(unit kernel, 단위: 무차원)로서 충격응답함수(pulse response function)를 나타낸다. 이 때 단위핵함수 UK 는 벡터 량으로서 그 m 번째 성분을 UK_m 이라 한다. 이에 대하여 Singh(2004)은 단위도 유도를 위한 유효강우의 기록간격(또는 계산시간간격) Δt 이 주어질 때 첫 번째 시간동안 발생한 단위 강우강도(본 연구에서는 $1 m^3/sec$ 로 정의함)에 따라 m 번째 시간($m \Delta t$)의 유출을 UK_m 이라고 정의 하였다. 그런데 Eq. (1)과 같은 행렬 연산을 통하여 UK 를 계산할 경우 강우량의 측정간격(본 연구에서는 $\Delta t=1$ 시간)과 일치하는 단위도를 얻게 되는 장점이 있다. 그렇지만 윤용남(2007)은 계산되는 UK 를 이용하여 수문곡선을 계산할 때 상당한 편차가 발생하는 경우가 일반적이데 이 경우 시행착오법을 적용하여 보정하기를 추천하고 있다. 그런데 성기원, 심명필(1999)은 Eq. (1)을 이용할 때 발생하는 편차는 주로 관측오차, 부적절한 유효강우 산정과 기저유출의 분리에 의하여 발생하는 것으로 가정하고 Bhargava et al.(1987)의 고빈도 진동 완화기법을 도입하여 순간단위도의 진동을 평활화하는 결과를 보여주었다. 이 기법을 이용할 경우 Eq. (1)은 일반적인 정규방정식(normal equation) 대신 Eqs. (2a) and (2b)로 나타난 능형매개 변수(ridge parameter) λ 에 의하여 제어되는 추정방정식을 통하여 해결되어야 한다.

$$UK = [H^T H + \lambda C^T C]^{-1} H^T DR \quad (2a)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2b)$$

여기서 C 는 Laplacian 행렬이다. Laplacian 행렬은 행렬의 가장 작은 고유치가 0이 되게 하는 positive semi-definite singular 행렬을 의미한다. 그리고 행렬 C 의 크기는 H 와 일치한다. 그런데 성기원, 심명필(1999)은 Golub et al.(1979)이 제안한 통계량인 GCV(generalized cross validation) 분석을 통하여 Laplacian 행렬을 이용할 경우 λ 값의 심한 변화에도 불구하고 오차의 차이는 실용적으로 무시할 수 있는 정도임을 보인 바 있다. 이는 λ 를 조정함으로써 UK 를 필요만큼 평활화 할 수 있음을 나타내는 것으로 시행착오법을 통한 평활화보다 계산상의 효율이 월등하다고 판단된다.

UK대신 단위도(unit hydrograph, UH)를 기존의 방법을 이용하여 도출하기 위해서는 Eq. (1)의 회선행렬 H 를 강우량으로 전환하면 얻을 수 있다. 그리고 S-곡선은 지속기간마다 고유의 곡선이 존재하므로 Eq. (1)과 같은 행렬식을 이용할 경우 1시간 UH 를 계산할 수 있으며 이 결과 1시간 S-곡선을 얻을 수 있을 것이다. 그리고 임의시간 $t = m \Delta t$ 의 IUH 증거는 해당시간의 S-곡선접선 경사에 유도된 UH 의 지속기간인 1시간을 곱함으로써 얻을 수 있다. 그렇지만 본 연구에서와 같이 UK 를 이용하는 경우에 $t = m \Delta t$ 의 IUH 증거는 단지 해당시간의 S-곡선접선 경사이며 이는 차원관계를 살펴볼 때 당연하다. 따라서 Eq. (3)은 UK 를 이용한 새로운 S-곡선을 나타내는 식이 된다.

$$S_m = \int_0^{m \Delta t} IUH(t) dt \quad (3)$$

여기서 S_m 은 m 번째 시간($m \Delta t$)의 S-곡선의 증거를 의미한다. 그런데 Eq. (3)에서 S_m 은 지속기간과 무관함을 알 수 있다. 이는 Eq. (3)의 S-곡선의 경우 강우의 지속기간에 상관없이 동일한 형태를 갖는다는 것을 의미하는데 이는 동일한 자료를 이용할 경우 단지 1시간 S-곡선을 도출할 수 있는 기존의 방법론과 구분된다. UH 의 경우와 마찬가지로 UK 도 새로운 S-곡선을 Δt 만큼 지체하고 그 증거의 차이를 통해 얻을 수 있다. 따라서 Eq. (4)를 통하여 $t = m \Delta t$ 에서의 UK 증거를 얻는다.

$$UK_m = \int_0^{m \Delta t} IUH(t) dt - \int_0^{(m-1) \Delta t} IUH(t) dt \quad (4)$$

본 연구에서 UK 를 구하는 근본적인 목적은 지속기간이 변경된 UH 를 기존의 방법보다 용이하게 구하는데 있다. 앞에서 언급한 바가 있듯이 UK 가 UH 와 근본적으로 다른 점은 UK 경우 지속기간과 상관없이 $1 m^3/sec$ 의 강우강도에 대한 직접유출량을 나타내는 반면 UH 는 지속기간동안 $1 m^3$ 의 강우량에 대한 유출량을 의미한다. 이는 Eq. (1)의 행렬 H 의 특성에 기인한 것이다. 따라서 변경을 원하는 지속기간을 계산시간 간격인 Δt 라 하고 UK 를 구한 후 Δt 시간 UH 를 구하기 위해서는 UK 의 증거를 Δt 로 나누면 얻을 수 있을 것이다. 즉 Eq. (5)와 같은 식이 성립한다.

$$UH_m = \frac{1}{\Delta t} UK_m \quad (5)$$

이상과 같은 과정을 $\Delta t=1$ 시간 UH 및 IUH 를 구하는 방법과 이로부터 $\Delta t=2$ 시간 UH 를 도출하는 방법을 요약하면 다음과 같다 1) 복합 강우사상에 대한 자료를 정리하여 Eq. (1)을 구성한다. 그리고 정규방정식에 의한 계산결과는 유효강우의 시간구간과 동일한 단위도를 도출하므로 1시간 간격으로 관측된 자료를 이용할 경우 1시간 UK 를 자동적으로 얻게 된다 2) 도출된 UK 의 형상이 진동이 심하거나 매끄럽지 못할 경우 Eq. (2)를 통하여 보정한다 3) 보정된 UK 를 이용하여 Eq. (4)를 통해 IUH 를 얻는다. 이 IUH 는 이산화된 자료가 아닌 연속함수가 계산에 적당한데 이는 변경된 지속기간을 나타내는 임의의 Δt 에도 IUH 가 계산되어야 하기 때문이다. 본 연구에서는 Nash의 감마분포모형을 IUH 로 이용하였는데 이 과정에서 모형의 매개변수가 결정된다. 그런데 감마분포는 해석적 적분이 존재하지 않으므로 이를 근사시켜 계산하여야 한다. 본 연구에서는 일반적으로 수치적분에 이용되는 사다리꼴 공식을 이용하여 Eq. (4)를 해결하였다. 이로서 $\Delta t=1$ 에서 이루어지는 계산이 종결된다 4) IUH 의 매개변수가 결정되었으므로 $\Delta t=2$ 시간 IUH 를 계산한다 5) Eq. (4)를 이용하여 2시간 UK 를 계산한다 6) 마지막으로 Eq. (6)을 이용하여 2시간 UH 를 얻게 된다. 이상과 같은 절차를 살펴보면 기존의 S-곡선을 이용한 지속기간의 변경방법보다 제안된 방법이 계산적으로 실용적임을 알 수 있다. 또한 제안된 방법은 실제자료가 없는 지역이라 하더라도 지역화분석을 통한 IUH 를 이용함으로써 미계측 유역의 설계홍수량 등을 계산할 수 있는 장점이 있다.

2.2 모형의 적용

2.2.1 자료 분석 및 순간단위도 유도

평창강 상류 소유역인 이목정 지점(유역면적: $55.9 km^2$)에서 1989년 7월 11(사상 A)과 1983년 7월 14일(사상 B)에 발생한 두 개의 복합 강우사상을 본 연구에서 적용하였다. 이들은 각각 단위도의 도출이 용이한 집중강우가 작용한 사상과 그리고 장시간에 걸친 복합 강우가 작용한 사상으로서 행렬연산 과정에서 공통적으로 심한 진동을 지닌 핵함수가 계산된 바 있다. 이들 사상에 대한 유효강우는 ϕ -지표법으로 산출하였으며 기저유출은 수평직선분리법으로 분리하였다. 이 결과 유효강우의 지속기간과 직접유출의 발생시간은 사상 A의 경우 7시간과 34시간이며 사상 B의 경우 14시간과 106시간으로 계산되었다. 이 자료들을 Eq. (1)의 적용에 적절하도록 정리하고 정규방정식과 Eq. (2)를 통해 1시간 UK 를 결정하였다. 그런데 Eq. (2)를 적용할 때 성격이 구분되는 두 종류의 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ 를 적용하였다. 이 중

λ_1 은 Mallows의 C_L 통계량(Mallows, 1973)을 최소화하는 기법을 이용해서 얻은 값이다. 이 연구에서 적용한 Mallows의 C_L 통계량은 Eq. (6)과 같다.

$$C_L = \frac{\|DR - HUK\|}{\rho} - p + 2 \times \text{trace}(H[H^T H + \lambda C^T C]^{-1} H^T) \quad (6)$$

여기서 $\|\cdot\|$ 은 행렬의 놈(norm), ρ 는 오차분산이며 이를 가장 산술적으로 간단하게 추정할 수 있는 방법은 Eq. (7)을 이용하는 것이다.

$$\rho = \frac{\|DR - HUK\|}{p} \quad (7)$$

여기서 Eqs. (6) and (7)에 나타난 p 는 벡터 DR 의 크기, 즉 계산에 이용된 직접유출의 자료 개수이다. 그리고 λ_2 는 UK 가 형태적으로 Nash 모형에 적합하도록 의도적으로 λ_1 값을 증가시킨 값이다. Figs. 1 and 2는 두 사상에 대한 UK 추정 결과를 나타낸다.

두 사상에 대한 Figs. 1 and 2를 살펴보면 정규방정식을 통해 추정된 UK 는 전반적인 심한 진동을 보여주는데 이는 행렬식을 이용한 분석에서 자주 발견되는 현상이다. 반면 λ_1 은 UK 를 상당 수준 진동을 완화시키고 있다. 그렇지만 수문곡선으로의 물리적 의미를 완벽하게 만족시키는 것은 아닌 것으로 보인다. 그러나 λ_1 은 평균제곱오차(mean squared error)를 정규방정식 수준으로 제한하면서도 진동을 완화하는 특징이 있기 때문에 λ_1 의 사용은 수치적으로 의미가 있다. 연구에서 적용된 λ_2 는 진동이 제거된 부드러운 형태의 곡선이 도출되도록 선택된 값이다. 그런데 λ_2 는 λ_1 보다 다소 큰 값이지만 평균제곱오차는 미미한 수준의 증가에 불과하며 관측값의 정확도를 고려할 때 정밀한 오차분석은 별 의미가 없어 보인다. 오히려 λ_2 를 이용하여 수문곡선의 물리적 특성에 부합하도록 활용하는 것이 바람직 할 수 있는데 이는 수문통계학적 자료보정이라 할 수 있을 것이다. 이용된 사상들에 대한 UK 계산 결과를 Table 1에 수록하였으며 λ_2 를 통해 계산한 IUH 추정 결과를 같이 수록하였다.

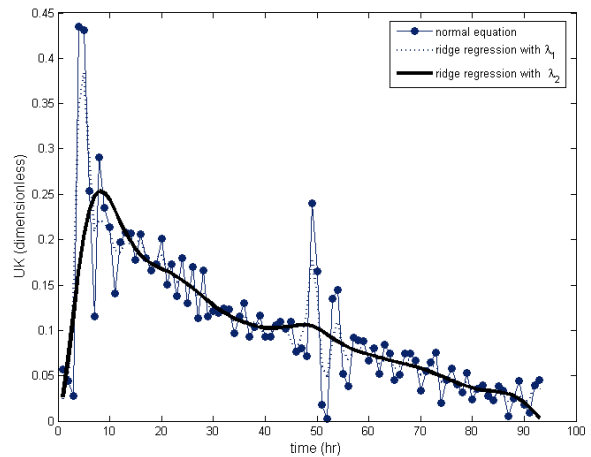
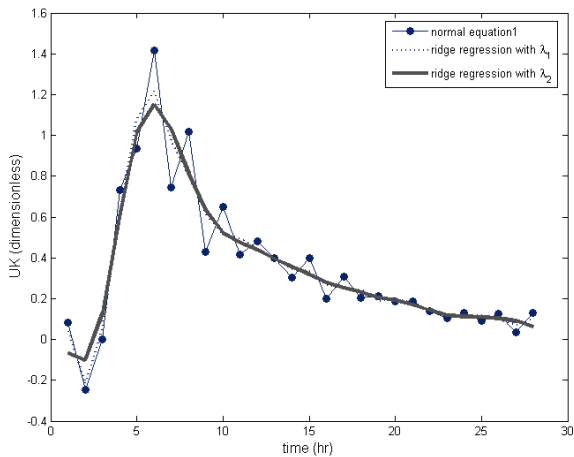


Fig. 1. Comparison of Estimated UK s for Event A

Fig. 2. Comparison of Estimated UK s for Event B

Table 1. Results of Smoothing and Estimated Nash Parameters

Event		A	B
Mean squared error	Normal equation	0.015	0.004
	Ridge regression	0.037 ($\lambda_1=1.7$)	0.018 ($\lambda_1=9.7$)
		0.154 ($\lambda_2=30$)	0.350 ($\lambda_2=300$)
IUH (Nash model) parameters	N	3.133	2.012
	K	3.332	16.080

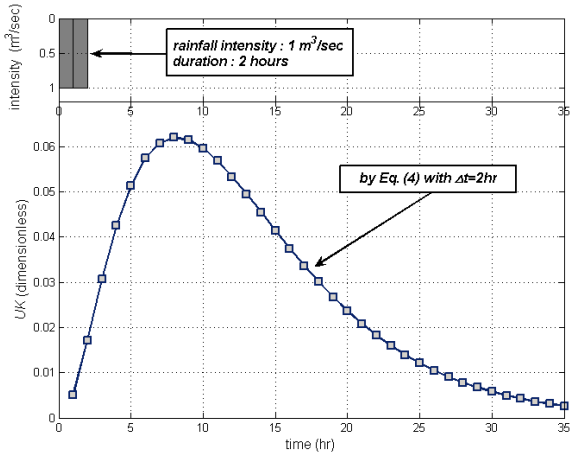


Fig. 3. Calculated 2-hr UK

본 연구에서 도입한 IUH 는 감마분포함수로 표현되는 Nash 모형으로 Eq. (8)과 같다.

$$IUH_m = \frac{1}{K\Gamma(N)} \left(\frac{m\Delta t}{K} \right)^{(N-1)} e^{-\frac{m\Delta t}{K}} \quad (8)$$

Eq. (8)의 매개변수 추정을 위한 계산은 유효강우와 λ_2 를 통해 평활화된 직접유출의 1차 및 2차 모멘트를 이용하여 수행하였다.

Singh(2004)은 Eqs. (3) and (4)의 이용을 통해 강우의 지속기간에 의지하지 않는 새로운 S-곡선 사용의 장점을 언급한 바 있다. 그런데 Table 1에서 볼 수 있듯이 S-곡선 작성에 필요한 UK 는 강우의 기록과 특성에 따라 많이 달라질 수 있으므로 Singh(2004)의 S-곡선은 암시적으로는 강우의 지속기간과 무관하지 않다. 이러한 의미에서, UK 는 곡선이 평활화되고 사상 간에 대하여 평균적이며 유역의 IUH 와의 연관성을 고려하는 것이 바람직하다. 이에 본 연구에서는 UK 의 추정에 있어서 Nash 모형의 추정된 매개변수의 산술평균을 이용하였다. 그렇지만 실측 사상이 충분할 경우 감마분포함수의 특성을 이용한 여러 종류의 매개변수 적용방법이 가능할 것이다.

2.2.2 단위도의 지속기간 변경

대상 지역의 1시간 UH 는 굳이 UK 를 이용하여 구할 필요는 없다. 계산된 IUH 를 이용하여 사상 평균적인 UH 를 도출하는 일반적 절차에 비하여 계산 양에서 이득이 없기 때문이다. 그렇지만 지속기간이 변경된 UH 를 계산하기 위해서는 변경된 지속기간에 대한 UK 가 필요하다. Singh(2004)이 제시한 단위해함수의 정의를 바탕으로 UH 와 UK 의 관계를 정리하면 Eq. (5)와 같은 UH 와 UK 의 관계식을 얻게 되는데 이를 통해 지속기

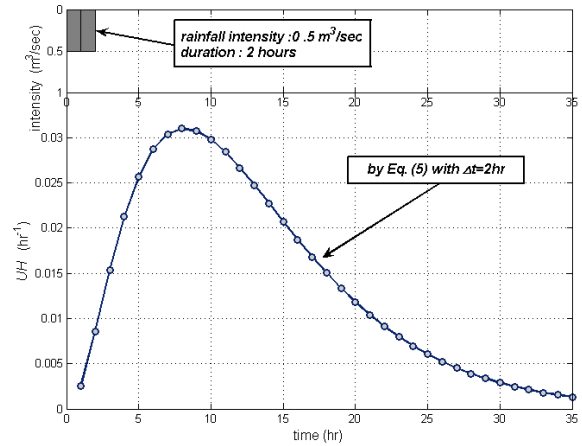


Fig. 4. Derived 2-hr UH from UK

간이 변경된 UH 를 얻을 수 있기 때문이다. 이 계산에 대하여 2시간 UH 를 예를 들어 설명하면 앞서 계산된 $\Delta t=1$ 에서의 Nash 매개변수 값을 이용하고 $\Delta t=2$ 를 Eqs. (8), (3), (4) and (5)에 차례로 적용시키기에 따라 2시간 UK 와 UH 를 차례로 얻게 된다. Figs. 3 and 4에 계산 결과인 2시간 UH 와 UK 를 나타내었다.

이 연구에서는 기존의 단위도의 지속기간 변경절차와 비교할 때 계산과정에서 지속기간 변경을 위한 S-곡선을 제작이 불필요하고 아울러 UH 의 연산조작 등 번거로운 계산이 생략되는 등의 계산상 장점을 주목할 필요가 있다. 또한 이 연구에서 이용된 Nash 모형대신 다른 종류의 합성 IUH 모형을 이용함으로써 미계측유역과 같은 지역의 UH 계산이 가능한 매우 구별되는 장점이 있다. 그렇지만 IUH 의 추정결과가 UH 의 거동을 좌우하기 때문에 효과적이며 안정적인 매개변수 추정을 위한 신중한 처리가 요구된다.

3. 결론

직접유출을 모형화 하는 다양한 방법론 가운데 본 연구에서는 무차원 단위해함수를 단위 강우강도에 대한 응답함수로 이용하는 절차를 논하였고 실제 적용에서 발생할 수 있는 제한사항 및 해결방법 등을 연구하였다. 이 과정에서 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- 1) 단위해함수를 이용한 유효강우-직접유출의 모형화는 기존의 방법에 비하여 계산량을 현저하게 감소시키며, 진동을 제어하는 계수 λ 는 평활화된 순간단위도를 도출하는데 결정적인 도움을 준다.
- 2) 기존의 S-곡선과 구별되는 단위해함수를 이용한 S-곡선은 강우의 지속기간에 대하여 독립적이지만 사상별로는 여전히 심한 진동이 발견되는데

평활화 없이 적용할 경우 오히려 기존의 방법이 우월할 수 있다. 이 경우 Laplacian 행렬을 이용하여 단위핵함수의 진동을 완화하는 기법은 유효하다.

- 3) 순간단위도는 단위핵함수를 통한 단위도의 도출에 절대적인 영향을 미친다. 따라서 순간단위도의 매개변수 결정방법이나 유역/사상 평균값으로의 매개변수 결정방법 등은 본 연구에서 제시된 방법의 적용성을 향상 시키는 결정적 인자이므로 많은 자료 분석을 통해 검증이 필요하다.

감사의 글

본 연구는 2007년도 건국대학교 학술진흥연구비 지원에 의하여 수행되었음.

참고 문헌

성기원, 심명필 (1999). "Mallows의 C_L 통계량을 이용한 수문응답 추정." **한국수자원학회논문집**, 한국수자원학회, 제32권, 제4호, pp. 437-445.
 윤용남 (2007). 수문학-기초와 응용. 청문각, pp.

415-478.

Bhargava, U.K., Kashyap, R.L., and Goodman, D.M. (1987). "Two nonparametric methods for identifying the impulse response of linear systems." *IEEE Trans. Acoust, Speech Signal Process*, Vol. ASSP-35, No. 7, pp. 974-986.
 Golub, G.H., Heath, M., and Wahba, G. (1979). "Generalized cross validation as a method for choosing a good ridge parameter." *Technometrics*, Vol. 21, No. 2, pp. 215-223.
 Mallows, C.L. (1973). "Some comments on CP." *Technometrics*, Vol. 15, No. 4, pp. 661-675.
 Nash, J.E. (1959). "Systematic determination of unit hydrograph parameters." *Journal of Geophysics Research*, Vol. 64, No. 1, pp. 111-115.
 Singh, S.K. (2004). "Simplified use of Gamma-distribution/Nash model for runoff modeling." *Journal of Hydrologic Engineering*, ASCE, Vol. 9, No. 3, pp. 240-243.

(논문번호:08-38/접수:2008.03.14/심사완료:2008.04.10)