대한수학교육학회지 <학교수학> 제 10 권 제 1 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.10, No.1, 63-78. Mar. 2008

시각적 사고와 분석적 사고 사이에서 이미지의 역할[1)]

고 은 성* · 이 경 화** · 송 상 헌***

본 연구는 대수의 일반화 과제를 해결하는 2명의 초등학교 6학년 수학영재가 보여주는 사고 과정을 조사하고 이미지가 문제 해결에 미치는 영향을 분석한 것이다. 학습자가 생성한 이미지는 개별적 사례에 대한 구체적 이미지, 구체적 이미지를 변형한 역동적 이미지와 패턴 이미지로 구분할 수 있었다. 본 연구에서는 또한 문제 해결 과정 동안 이미지의 생성과 변형이 어떻게 이루어지며, 시각적 사고와 분석적 사고 사이에서 이미지가 어떠한 역할을 하는지 분석하였다. 분석 결과, 이미지는 시각적 사고와 분석적 사고의 상호 작용 속에서 생성되고 변형되면서, 정교화되고 구체화됨을 알 수 있었다. 그리고 동시에 이미지는 시각적 사고에서 분석적 사고로, 분석적 사고에서 시각적 사고로 나아가게 하는 원동력임을 확인할 수 있었다.

Ⅰ. 서 론

그 동안 수학 및 수학 교육에서는 시각적 사고보다 분석적 사고를 더 중시 해왔다(Dreyfus, 1991). 이는 수학이 형식적인 규칙과 정의를 적용하는 방법을 배우는 추상적인 학문이라고 간주한 전통과 관련된다. 그러나 최근 이러한 전통적인 관점으로부터 탈피하여 수학적 추론을 신체화된 것이며 상상적인 것으로 보는 입장이 대두되고 있다(English, 1997; Lakoff, 1987). 수학적 추론이 상상적인 것은 구체적인 경험을 구조화하고 그 경험들을 추상적인 사고를 위한 모델로 변환하는 강력한 사고의 도구들을 활용하고 있기 때문에 가능한데, 여러 학자들은 이러한 도구들 중의 하나로 유추, 은유와 함께 이미지를 제시하였다(English, 1997; Lakoff & Núñez, 1997; Presmeg, 1997; Wheatley, 1997). 의미 있는 수학 학습을 하는데 있어 이미지가 중요하다는 것은 이미 많은 연구에서 입증되었으며, 이와 함께 이미지에 근거한 시각적 사고의 중요성도 강조되고 있다(Alcock & Simpson, 2004; Arcavi, 2003). 여러 연구(Brown & Presmeg, 1993; Presmeg, 1986b)에서 학생들이 지닌 이미지의 유형을 확인하였다. 이미지로 인해 학생들이 겪는 어려움에 대한 연구(Aspinwall, Shaw, & Presmeg, 1997; David & Thomas, 2004) 및 시각적 사고와 분석적 사고 사이의 관계를 규명하고자 노력하는 연구들도 수행되었다(Presmeg, 1986a; Presmeg, 1992; Zazkis, Dubinsky & Dautermann; 1996).

이에 본 연구에서는 이러한 선행연구에 기초

* 한국교원대대학교 대학원(kes-7402@hanmail.net)
** 한국교원대학교(khmath@knue.ac.kr)
*** 경인교육대학교(shsong@ginue.ac.kr)
1) 이 논문은 2005년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었음(KRF-2005-079-BS0123)

하여 대수의 일반화 과제에서 나타나는 이미지의 유형을 확인하고, 이미지가 문제 해결에 미치는 영향을 조사하고자 한다. 그리고 특히, 시각적 사고와 분석적 사고 사이의 관계에 대한 연구를 토대로 이미지의 생성과 변형이 어떻게 이루어지며, 시각적 사고와 분석적 사고 사이에서 이미지가 어떠한 역할을 하는지 살펴보려고 한다.

II. 이론적 배경

1. 이미지

이미지는 시각적 사고의 도구이며, 적절한 시각적 자극이나 마음속에 이미 축적된 정보로부터 '본 것'에 대하여 떠올리는 마음속의 표상을 의미한다. 이미지는 생성 과정이 시각적인 정보의 입력 및 산출과 관련되어 있는지 여부에 따라 시각적 이미지와 비시각적 이미지로 나눌 수 있다(Kosslyn, 1983). 예를 들면, 우리가 어떤 사람의 이미지를 지니고 있다고 이야기할 때 그 사람의 얼굴 모양이나 피부색 같은 외양적인 모습과 함께 '활발하다', '친절하다' 등의 특징을 떠올릴 수 있는데, 이 때 전자의 경우는 시각적 이미지에 후자의 경우는 비시각적 이미지에 속한다.

이미지는 다양한 형태를 띤다(Kosslyn, 1983). 전통적으로 마음속의 상(picture)만 이미지라고 보았으나, 점차 모호하거나 불완전한 상까지도 이미지라고 보는 경우가 많아졌다(; Brown, & Presmeg, 1993; Johnson, 1987; Lakoff, 1987; Presmeg, 1986a; 1986b). Kosslyn(1983)에 의하면, 이미지는 한번 생성된 이후에 계속해서 부분적으로 추가되거나 제거되고 조작되면서 변형된다(p. 91). Presmeg(1986b), Brown & Presmeg (1993)는 학생들이 수학 학습 과정에서 생성하는 이미지의 유형과 이미지를 사용하는 방법을 조사하였고, 이미지를 구체적(concrete) 이미지, 역동적(dynamic) 이미지, 패턴(pattern) 이미지로 구분하였다.

구체적 이미지는 마음속의 상(picture)을 의미한다. Johnson(1987)에 의하면 구체적 이미지는 단일하고 정적이며, 자세한 상으로 구성되어 있다. 구체적 이미지는 수학의 관계적 이해에 도움이 되지 못하며 수학적 추론을 하는 학생들에게 어려움을 야기할 수 있다(Brown, & Presmeg, 1993; Presmeg, 1986b). 학생들은 구체적 이미지를 사용하여 문제를 해결하고 이러한 해결 방법의 정당성에 대해 확신을 갖게 되는데, 이로 인해 다른 방법을 모색할 필요성을 느끼지 못하게 된다(Brown & Presmeg, 1993).

역동적 이미지는 구체적 이미지를 변형하는 힘을 지닌 이미지이다. Brown & Wheatley(1989)는 이미지를 변형하는 능력은 수학을 이해하는데 필수적이라고 주장하였다. 역동적 이미지를 소유한 학생들은 새로운 단위를 만들거나 다른 부분들과의 결합을 위해 구체적 이미지를 분리할 수 있으며, 분리한 이미지의 부분을 움직일 수 있다. 즉, 이 학생들은 구체적 이미지의 분리와 결합을 자유롭게 할 수 있다.

패턴 이미지는 가장 추상적인 형태의 이미지이다. 패턴 이미지는 시각적-공간적 스키마로 나타낸 순수한 관계를 의미한다. Johnson(1987)은 '이미지-스키마틱 구조'라는 용어를 사용하여 패턴 이미지를 설명하였다. 패턴 이미지는 일반성과 추상성을 띠며 추상적인 명제적 구조와 구체적 이미지를 정신적 조직화에 의해 조정하는 과정이다(p. 29).

예를 들면, 다각형 내각의 합을 구할 때 다각형에 대한 구체적 이미지를 소유한 학생은 직접 각도를 측정함으로써 내각의 합을 구할 수

있다. 그러나 역동적 이미지를 지닌 학생은 다각형이 여러 개의 삼각형으로 이루어진 도형으로 볼 수 있게 되면서 삼각형 내각의 합을 이용하여 다각형 내각의 합을 구할 수 있다. 그리고 패턴 이미지를 형성한 학생은 다각형 내각의 합에 대한 일반식을 구할 수 있게 된다.

2. 시각적 사고와 분석적 사고

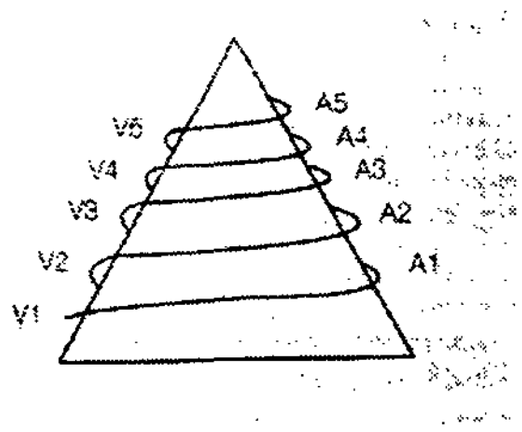
시각적 사고를 정의하려는 시도는 대상에 대한 그림 표현, 기하학적 표현, 내재적 또는 외재적 표현, 직관 등 다양한 것에 기초하여 이루어져 왔다. 또, '시각적'이라는 용어는 '언어적', '실제적', '추상적' 등에 반대되는 것으로 정의되기도 하였다(Zazkis, Dubinsky & Dautermann, 1996). 시각적 사고에 대한 이러한 다양한 접근 때문에 연구자들은 연구 주제의 맥락에 따른 정의를 사용하기도 한다. Arcavi(2003)는 시각적 사고를, 이미 알고 있는 개념에 대해 사고하거나 개념을 발달시키기 위해 그리고 이해를 확장시키기 위해 그리는 그림, 이미지, 벤다이어그램을 해석하고 이용하는 능력, 또는 이들을 창조하는 과정이나 창조의 결과라고 하였다. Arcavi는 또한 시각적 사고는 이제 더 이상 설명에 도움이 되는 실례를 제공하는 역할에 머물지 않으며, 추론의 핵심적인 요소로 인식되고 있다고 주장하였다. Zazkis, Dubinsky & Dautermann (1996)은 시각적 사고를 마음속에 구성되었거나 외부 실재를 통하여 인지한 대상의 정신적 변형으로 이루어진 일종의 추론으로 보았다. 본 연구에서 시각적 사고란 문제를 해결하거나 이해를 확장시키기 위해 외재적 또는 내재적인 시각적 표현에 근거하여 이루어지는 사고를, 분석적 사고란 이미지에 의존하지 않으며 명제적 지식이나 기호 등을 이용하여 대상이나 과정에 정신적 조작을 행하는 사고를 의미한다. 따라서 그림이나 벤다이어그램과 같은 구체적인 시각적 자료를 문자나 기호 등을 이용하여 표현하는 행동도 분석적 사고에 포함된다.

시각적 사고와 분석적 사고는 논쟁적인 주제들과 더불어 연구되어 왔다. 이를 테면, 개인의 선호도 문제인지, 능력 문제인지, 상대적 가치는 어떠한지, 그리고 시각적 사고와 분석적 사고의 상대적 존재성은 어떠한지 등 다양한 논점이 제기되어 왔다. 오랜 논의에도 불구하고 시각적 사고와 분석적 사고가 개인의 선호도 문제인지 능력 문제인지 여부는 아직 어떠한 합의점에도 도달하지 못하였다. Moses(1977)와 Suwarsono(1982)는 수학 문제를 해결할 때 문제 해결을 위한 핵심적인 부분으로 이미지를 사용하는지 여부에 따라 학생들의 문제 해결 방법을 시각적인 방법과 비시각적인 방법으로 구분하였다. 그러나 이들은 이분법적 구분보다는 각 개인이 연속선상에 위치한다고 보았다 (Presmeg, 1986a에서 재인용). Clements(1982)는 학습자를 시각적 방법의 선호도에 따라 시각적, 언어적, 혼합적으로 구분할 수 있다고 제안하였으며, Krutetskii(1976)는 시각적 요소에 대한 선호도와 이것을 사용하는 능력에 따라 기하적, 분석적, 조화적 유형으로 학생들을 구분하였다. 결국 시각적 사고에 대한 선호도를 구분하는 것이 어려움을 알 수 있다. 이에 반해, Presmeg(1992)는 수학교육에서 시각적인 방법을 선호하는 시각자(visualiser)와 그렇지 않은 비시각자(nonvisualiser)로 학생들을 구분하는 것에 대한 유용성에 의문을 제기하였다. Zazkis et. al.(1996)은 시각적 방법에 대한 개인적 선호도를 고려한 교수학적 설계는 학생들의 선호도를 결정하는 문제나 시각자를 정의하는데 있어서의 어려움 때문에 상당히 복잡하며, 어떤 사람을 시각자라고 정의하는 것은 구체적인 시각적 요소를 포함하지 않는 수학적 개념의 이해에

대해 포기를 의미하는 것이라고 지적하였다.

시각적 사고와 분석적 사고의 상대적 가치에 대한 연구를 살펴보면 그 동안 수학이라는 학문의 특성상 시각적 사고보다는 분석적 사고가 항상 우위를 차지해 왔다. 그러나 최근 시각적 사고의 중요성을 주장하는 많은 연구들이 소개되고 있다. Alcock & Simpson(2004)은 실해석학 강좌를 수강하는 학생들을 대상으로 한 연구에서, 추론에서 시각적 이미지를 이용하는 학생들이 더 빠르고 정확하게 결론을 이끌어 냈으며 자신들의 결과에 더 강한 확신을 보인다고 보고하면서 시각적 사고를 장려할 것을 주장하였다. Arcavi(2003)는 대수, 기하, 그리고 확률과 통계 분야에서 시각적 사고의 효용성을 보여주는 다양한 예를 제시하였다. Dreyfus (1991)는 수학자 및 수학 교육자는 시각적 추론의 중요성을 인식해야 하며 시각적 추론을 분석적 추론과 동등한 위치에 놓아야 한다고 주장하였다. 또한 그는 시각적 추론은 일반적으로 우리에게 알려진 것보다 수학자들의 연구에서 훨씬 중요한 역할을 한다고 언급하면서 수학자들이 수업을 하거나 증명을 할 때 실제로는 그림이나 시각적 논증을 숨기는 사례를 제시하기도 하였다. Eisenberg & Dreyfus(1991)는 수학적으로 재능 있는 학생들이 시각화를 꺼리는 경향이 있다고 보고하였다. 이에 대해 여러 연구자들(Gollwitzer, 1991; Presmeg, 1986a)은 학생들이 시각화의 유용성을 낮게 평가해서가 아니라 그 동안 교육 체계에서 시각화의 역할을 인정하지 않았기 때문이라고 언급하였다. 만약 시각적 방법을 선호하는 학생들이 수학적 능력이 없는 학생들이라면 시각적 방법이 분석적 전략보다 덜 효과적이라고 볼 수도 있을 것이다. 그러나 시각화 능력은 수학적 능력이 뛰어난 학생들이 갖추고 있으며, 오히려 더 효과적인 경우도 많음을 알 수 있었다. 시각화에 대한 가장 심각하고 일반적인 문제는 학생들이 시각화의 핵심적인 요소 중의 하나로 간주되고 있는 다이어그램을 기호적 표상과 연결시키는 능력이 부족하다는 것이다(Krutetskii, 1976; Presmeg, 1986b).

시각적 사고와 분석적 사고의 상대적 존재성에 대해 논의하는 연구들은 이들 두 사고가 서로 독립적으로 기능하는 것이 아니라 유기적으로 연결되어 있으며 상호 작용을 통하여 사고의 비약을 가능하게 한다고 주장하고 있다. Krutetskii(1976)는 시각적 요소를 포함한 문제이건 시각적 요소를 포함하지 않은 문제이건 추론과 논리를 포함한다고 주장하였으며, Presmeg(1992)는 논리적 사고가 시각화와 서로 얽혀있다고 주장하였다. Zazkis et. al.(1996)은 시각적 사고와 분석적 사고의 상호 작용을 주장하면서 [그림 Ⅱ-1]과 같은 Visualization/Analysis (VA)모델을 소개하였다.



[그림 Ⅱ-1] VA 모델

[그림 Ⅱ-1]과 같이 수학적 사고는 그림 또는 사진과 같은 시각 자료를 보고 정신적 대상이나 과정을 구성하는 V1 단계에서의 행동으로 시작된다. 그 다음 사고는 V1 단계에서 구성된 정신적 대상과 과정에 대한 일종의 조절이 이루어지는 A1 단계로 나아가는데 이러한 분석은 새로운 대상이나 과정을 구성하는 V2 단계로 이어진다. V2 단계에서는 V1 단계에서 사용했던 그림을 분석한 A1 단계의 결과에 의해 변형을 시도하고 새로운 그림으로 바꾸면서 새로운 구성

을 이끌어낸다. 이러한 과정은 본래 상황에 대한 이해를 풍부하게 하는 외재적 표현으로 진행된다. 수평적 이동이 이루어지면서 이전에 시각화한 결과를 분석하게 되고, 이를 통해 새롭고 풍부한 이해를 통한 시각화를 할 수 있게 된다. 점점 더 정교한 분석도 가능해진다.

[그림 Ⅱ-1]에서 알 수 있듯이 시각적 사고와 분석적 사고는 점점 더 가까워진다. 두 사고가 점점 더 밀접하게 연결되고 통합되면서, 사고자 자신과 관찰자 모두 이 둘 사이의 움직임에 대한 인식과 구별이 어려우며 각각에 주목하지 않는다(Zazkis et al., 1996).

Zazkis et. al.(1996)은 Vi 단계의 학습자를 Ai 단계로, Ai단계에 있는 학습자를 Vi+1 단계로 나아갈 수 있도록 하는 학습 설계를 통하여 학생들의 수학 학습을 도울 수 있다고 주장하였다. 그러나 그들은 어떻게 Vi 단계에서 Ai 단계로, Ai단계에서 Vi+1단계로 나아갈 수 있는지에 대한 구체적인 논의는 제시하지 않고 있다. 본 연구에서는 학생들의 문제 해결 과정의 분석을 통하여 이러한 단계의 이동이 어떻게 가능할 수 있는지에 대해 살펴보고자 한다.

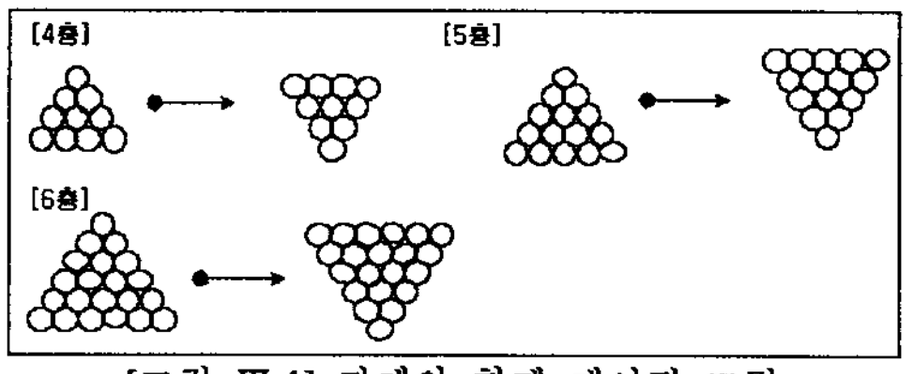
Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

연구 대상은 영재교육진흥법과 그 시행령에 따라 과학기술부의 재정 지원을 받아 운영되는 청주지역의 C대학부설 과학영재교육원의 프로그램에 참여하고 있는 초등학교 6학년 남학생 2명이다. 처음에는 4명(남자 3명, 여자 1명)의 학생을 연구의 대상자로 참여시켰으나 사고 과정이 명확하게 드러난 2명의 학생만을 본 연구의 분석 대상자로 선정하였다. 이들이 소속한 과학영재교육원은 연간 총 102시간(수학 60시간, 과학 42시간)으로 설계된 교육프로그램을 운영하고 있는데, 수학의 경우 대수, 기하, 확률 등의 내용별 분야로 구분된 3시간 단위의 세부 프로그램을 운영하고 있다. 본 연구는 그 중 한 단위의 대수 프로그램에서 학생들의 문제해결 능력과 추론 능력, 정당화 능력 등의 신장에 초점을 두고 이루어진 것이다. 연구에 참여할 당시 이 학생들은 전년도에 1년의 기초 과정을 마치고 2년 차 심화 과정을 이수하고 있는 중이었다.

2. 과제 분석

이 연구에서는 학생들이 사용하는 이미지의 유형을 확인하고, 이미지가 문제 해결에 미치는 영향을 조사하는 것, 특히, 시각적 사고와 분석적 사고 사이에서 이미지가 어떠한 역할을 하는지 살펴보는 것을 목표로 하였다. 이 목표를 구현하기 위해서는 시각적 사고와 분석적 사고를 사용해서 해결될 수 있는 과제를 이용해야 한다. 또한 시각적 사고가 쉽게 관찰될 수 있어야 하므로 시각화하기가 쉬운 과제여야 한다. 분석적 사고 역시 가능해야 하며, 분석적 사고의 필요성을 분명하게 자극하는 과제여야 한다. 이러한 특성을 갖춘 과제로 이 연구에서는 다음과 같은 과제를 택하였다. 이 과제는 박은정(2006)의 연구에서 사용된 것으로, 바둑돌로 이루어진 정삼각형을 역삼각형으로 만들기 위해 움직여야 하는 최소의 바둑돌의 개수를 구하는 것이다.



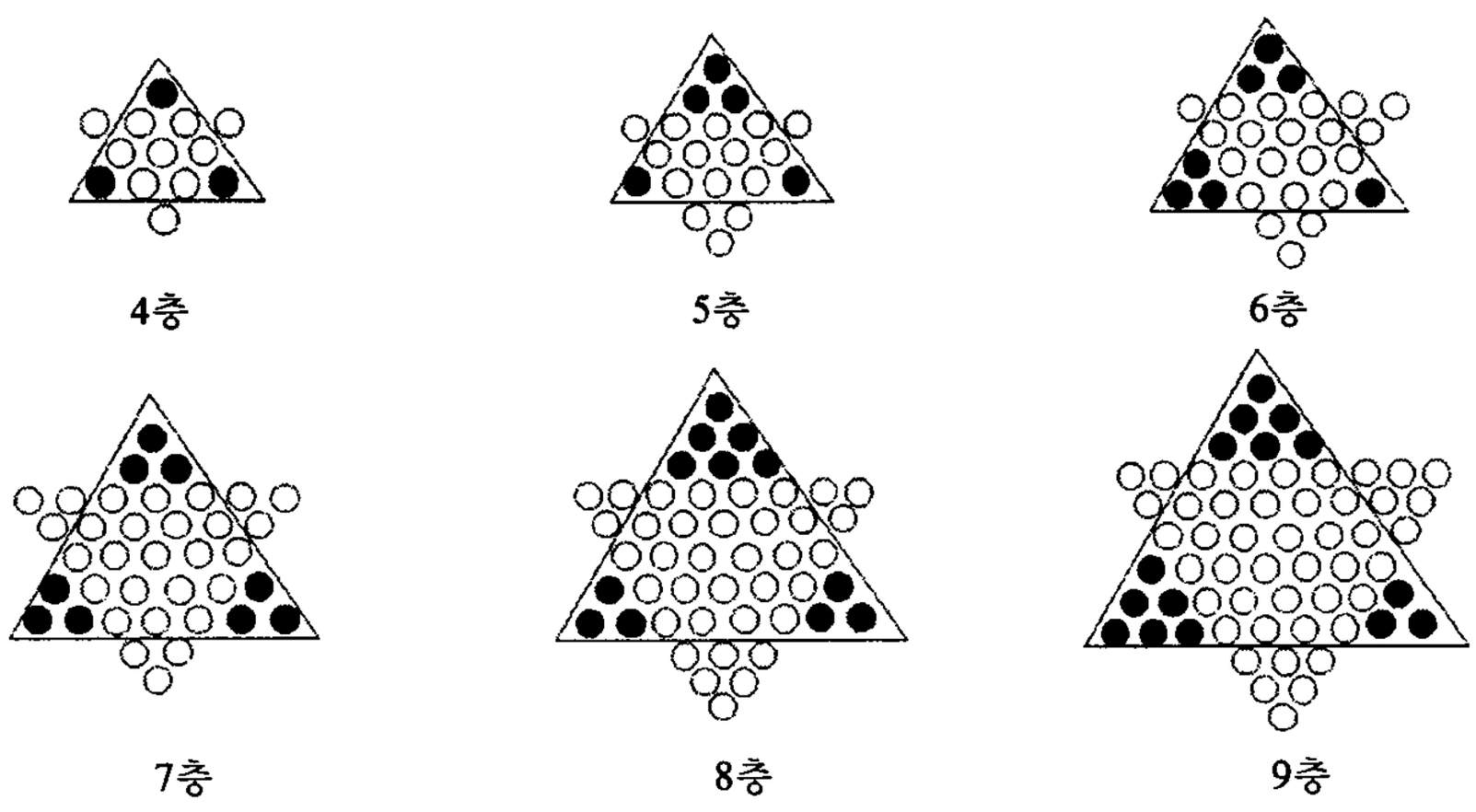
[그림 Ⅲ-1] 과제와 함께 제시된 그림

[그림 Ⅲ-2]에서와 같이 최소의 바둑돌을 움직여 역삼각형을 만들기 위해서는 정삼각형의 무게 중심을 기준으로 상하좌우 대칭인 정삼각형을 만들어야 한다. 그래서 바둑돌로 이루어진 정삼각형을 내부의 육각형과 각 꼭지점에 형성된 작은 삼각형으로 분리하고, 육각형 외부에 있는 바둑돌을 움직이면 된다. 이때, 이동하는 바둑돌의 최소 개수에 대한 일반식을 구하기 위해서는 이동하는 바둑돌에서 나타나는 패턴을 세 개의 그룹으로 나눈 후, 각 그룹에서 나타나는 패턴을 이용하여 각각의 일반식을 구해야 한다. 예를 들면, 4층과 7층은 각 꼭지점에서 이동하는 바둑돌의 개수가 모두 같으며, 삼각형 모양을 유지하며 한 층씩 증가한다. 5층과 8층은 두 개의 꼭지점에서 움직이는 바둑돌의 개수가 같은데 나머지 한 꼭지점에서 움직이는 바둑돌보다 한 층이 더 적다. 6층과 9층은 5층, 8층과 마찬가지로 두 개의 꼭지점에서 움직이는 바둑돌의 개수가 같은데, 나머지 한 꼭지점에서 움직이는 바둑돌보다 한 층이 더 많다.

이상에서 살펴보았듯이, 이 과제는 대수적 패턴을 일반화하는 과제로 시각적 자료에 기초하여 문제 해결 활동이 이루어지며, 이를 토대로 구조와 패턴 및 규칙을 파악하고 이를 기호화 하면서 사고를 표현할 때 분석에서 요구하는 사고가 명확해진다(김성준, 2004).

3. 자료 수집 및 분석

본 연구에 참여한 학생들은 주어진 과제를 3시간 동안 해결하였으며, 자료 수집을 위해 학생들의 문제 해결 과정 및 면담 내용 등을 모두 비디오와 오디오로 기록하였다. 그 외에 관찰을 담당한 보조 연구자들의 관찰 일지와 학생들의 활동지 등이 본 연구를 위한 자료로 활용되었다. 한 명의 보조 연구자가 한 명의 학생을 관찰하였으며, 학생의 문제 해결 방향이 바뀌거나 학생의 사고에 대한 구체적이고 자세한 정보가 필요할 경우 학생에게 면담을 실시하였다. 학생 면담의 주된 목적은 문제 해결 방법과 문제 해결을 위해 사용한 전략에 대해 자세한 정보를 얻기 위한 것이었다. 관찰이 끝난 직후 관찰 내용에 대한 개략적인 논의가 연구자들과 함께 이루어졌으며, 논의 결과를 학생 활동지 및 녹화 자료와 비교하여 분석하였다.



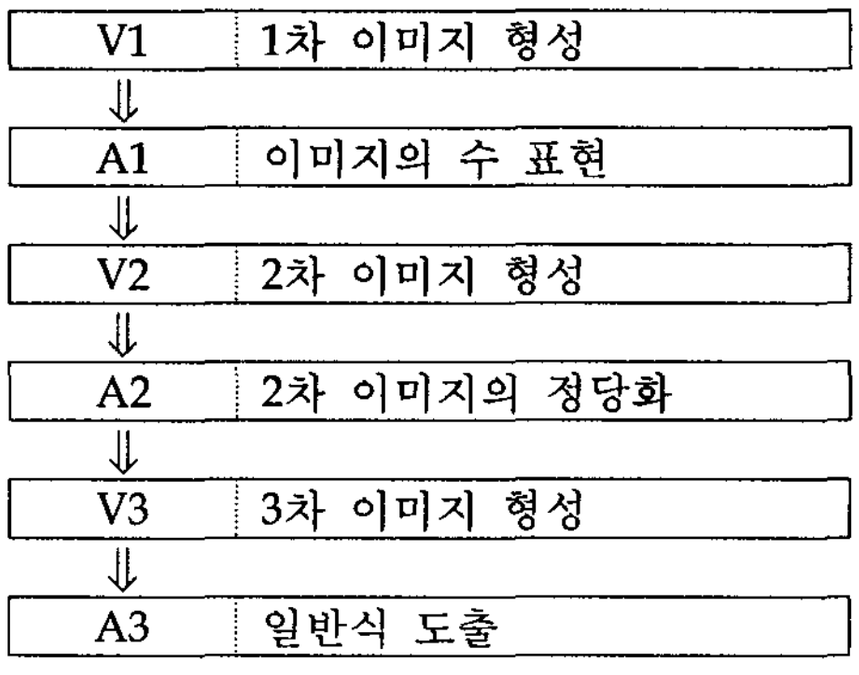
[그림 Ⅲ-2] 움직이는 바둑돌의 패턴

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

문제 해결 과정에서 이미지의 역할을 살펴보기 위해서는 학생의 전체적인 문제 해결 과정에 대한 이해가 필요하므로, 학생들의 전체적인 문제 해결 과정을 시간의 흐름에 따라 살펴보면서 이미지의 역할이 뚜렷이 드러나는 부분을 자세히 논하는 방식으로 분석 결과를 제시하고자 한다.

1. 학생A의 문제 해결 과정

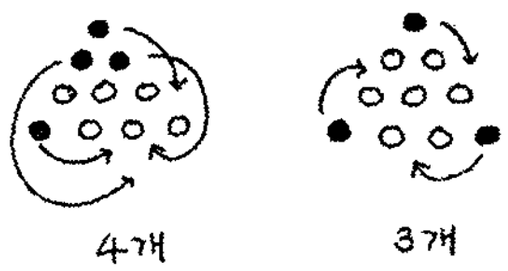
[그림 Ⅳ-1]는 학생A의 문제 해결 과정에서 나타난 시각적 사고 단계와 분석적 사고 단계에서의 활동 내용을 정리한 것이다. 이 학생의 경우 시각적 사고에서 분석적 사고로, 분석적 사고에서 시각적 사고로 이동하면서 구체적 이미지, 역동적 이미지, 패턴 이미지 등 다양한 이미지를 생성하고 구체화시켰다. 그리고 문제를 해결하는 과정에서 필요에 따라 이미지 사이를 적절히 이동해 가며 적극적으로 이미지를 이용하였다. 또한 이러한 이미지를 기존에 알고 있던 식과 적절히 연결하거나 새로운 식으로 적절히 발전시켜나가면서 문제를 해결하는데 성공하였다.



[그림 Ⅳ-1] 학생A의 문제 해결 과정

시각적 사고 단계 V1에서의 활동: 1차 이미지 형성

학생A는 4층의 정삼각형을 역삼각형으로 만들기 위해 움직여야 하는 최소의 바둑돌의 개수를 구하는 방법을 찾고자 [그림 Ⅳ-2]와 같이 이동해야 하는 바둑돌과 바둑돌이 이동한 위치를 그림을 그려 가며, 시행 착오를 통하여 여러 가지 방법으로 시도하였다. 이러한 과정을 통하여 삼각형의 세 꼭지점에 위치한 바둑돌들을 이동하여 역삼각형을 만드는 것에 대한 구체적 이미지를 형성하였다.



[그림 Ⅳ-2] 4층의 역삼각형 해법(학생A)

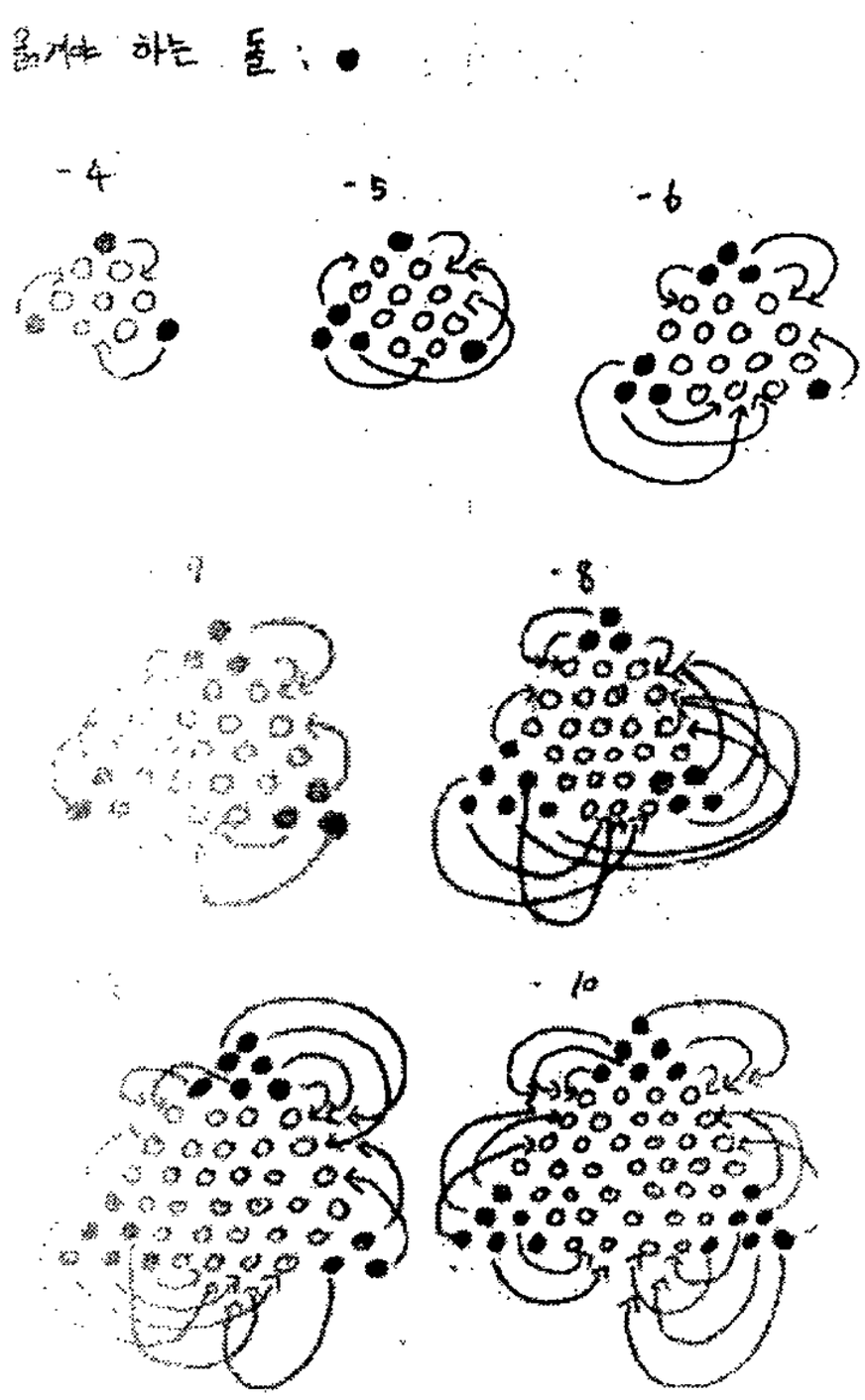
분석적 사고 단계 A1에서의 활동: 이미지의 수 표현

[그림 Ⅳ-2]에서와 같은 방법으로 정삼각형의 바둑돌을 이동하면 역삼각형이 만들어진다는 것을 그림을 통해 확신한 후, 움직이는 바둑돌의 개수를 숫자로 기록하였다. 여러 번 시도 후, 움직이는 바둑돌의 개수가 4개 또는 3개만 나오자 가장 작은 경우가 3개라는 것을 확신하였다. 학생은 구체적 이미지를 수로 표현하고, 수의 크기 비교를 통하여 최소의 개수를 결정하는 등의 분석적 사고를 하였다. 시각적 사고(V1) 단계에서의 활동에 기초하여 분석적 사고(A1) 단계로 이동하였음을 알 수 있다.

시각적 사고 단계 V2에서의 활동: 2차 이미지 형성

학생A는 5층과 6층에 대해서도 이러한 방법으로 최소의 움직이는 바둑돌의 개수를 구한

후, 5층의 정삼각형에서 이동하는 최소의 바둑돌의 개수를 5개, 6층에서의 최소의 개수를 7개로 확신하였다. 즉, 5층과 6층의 정삼각형을 역삼각형으로 변형하는 과정에서 학생은 계속적으로 V1에서의 활동과 A1에서의 활동을 반복하였다. 그리고 7층 이상의 정삼각형에 대해서는 여러 번의 시도를 거치지 않고 곧바로 [그림 Ⅳ-3]과 같이 4층, 5층, 6층의 정삼각형과 함께 그 방법을 그림으로 제시하였다.



[그림 Ⅳ-3] 4층에서 10층까지의 역삼각형 해법(학생A)

이때 이동하는 바둑돌과 바둑돌이 이동한 위치에는 주목하지만 이동한 바둑돌의 개수에는 주목하지 않고, 바둑돌 그림을 이용하여 정삼각형이 역삼각형이 되도록 하는 방법을 찾았다(V1단계에서). 그리고 이것에 기초하여 움직이는 바둑돌의 개수를 수로 나타내고, 수의 크기 비교를 통하여 최소의 개수를 결정하였다(A1단계에서). 시각적 사고에서 분석적 사고로 이동하면서, 이와 함께 시각적 사고(V1단계에서의 사고)에 분석적 사고(A1단계에서의 사고)를 통합하면서 학생은 4층, 5층, 6층에 대해 어떠한 바둑돌을 어디로 이동해야 역삼각형을 만들 수 있는지에 대한 구체적 이미지를 명확하게 할 수 있었다. 그리고 이를 토대로 7층 이상의 정삼각형에 대해서는 여러 번의 시도를 거치지 않고 쉽게 문제를 해결하고 그림으로 나타낼 수 있었다. 7층 이상의 정삼각형에 대해 여러 번의 시도를 거치지 않고 역삼각형을 만드는 방법을 찾기 위해서 정삼각형의 각 꼭지점에 생기는 작은 삼각형들을 분리할 수 있어야 하며, 여기에서 나타나는 패턴을 파악할 수 있어야 한다. 즉, V2 단계에서 이 학생은 V1 단계에서 형성한 구체적 이미지를 정교화 시키고, 이를 변형하여 역동적 이미지와 패턴 이미지를 형성했음을 알 수 있다.

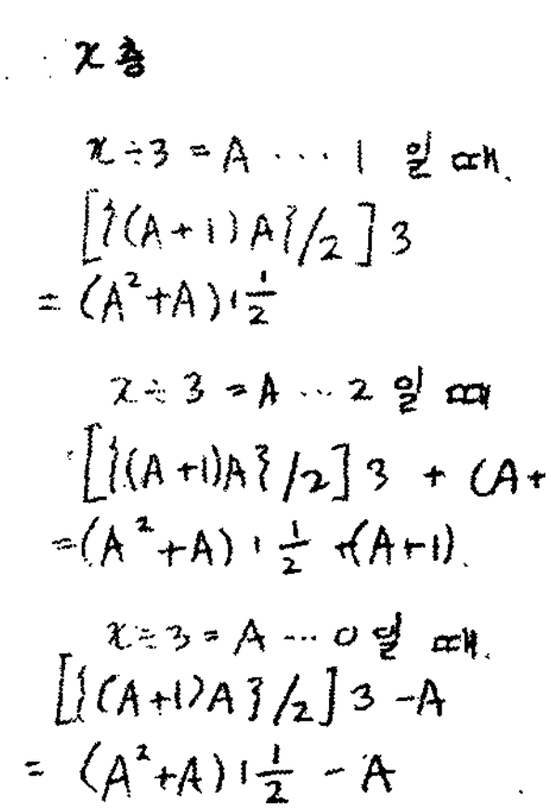
분석적 사고 단계 A2에서의 활동: 2차 이미지의 정당화

이 학생은 [그림 Ⅳ-3]으로부터 [그림 Ⅳ-4]과 같은 일반식을 구한 후 문제 해결 과정에 대하여 다음과 같이 설명하였다.

연구자: 자 선생님에게 이것([그림 Ⅳ-4]의 식)을 어떻게 구했는지 설명해 볼까. 제일 위에 있는 것부터 설명을 해볼까.

학생A: 여기([그림 Ⅳ-3])에서요 (4층, 7층, 10층을 가리키며)이거하고 이렇게 되어있는데요. 이것들(4층, 7층, 10층)을 맞춰서 보니까요 변마다 이렇게 하나씩 추가가 되어서요. 여기서(층의 수를) 3으로 나누었을 때 나머지가 1인 것은요 공평하게 전부 다 똑같이 움직여야 해요, 끝(각 꼭지점)에서요. 그래 가지구요 3으로 나누면요 그 몫이 나오는데요, 이게 밑변이 되어서요, 그 밑변을 이용해서 이 삼각형에 있는 바둑돌의

개수를 구한 다음에 거기에 곱하기 3을 해서요 이 개수를 구한 거예요.



[그림 Ⅳ-4] 학생A가 구한 일반식

학생A와의 면담 내용을 통하여 알 수 있듯이, 시각적 사고 V2 단계에서의 활동에 기초하여 [그림 Ⅳ-3]에 있는 7개의 정삼각형에서 4층, 7층, 10층을 먼저 분리해 냈다. 그리고 4층, 7층, 10층이 모두 층의 수를 3으로 나누었을 때 나머지가 1이라는 공통된 성질을 갖는다는 것을 발견하고 4층, 7층, 10층에서 파악한 패턴에 더 강한 확신을 갖게 되었다. 즉, 학생A는 A2 단계에서 이전에 형성한 이미지를 정당화 하였다.

시각적 사고 단계 V3에서의 활동: 3차 이미지 형성

Vi 단계에서의 그림은 Ai에서의 분석적 사고에 의해 변형을 시도하면서 새로운 그림으로변하고 새로운 구성을 이끌어낼 수 있다(Zazkis et. al, 1996). A2에서 발견한 4층, 7층, 10층이 모두 층의 수가 3으로 나누었을 때 나머지가 1이라는 공통된 성질을 갖는다는 사실을 통하여 학생은 V2에서 생성된 이미지에 정당성을 확보하게 되었다. 따라서 이것은 V3 단계로의 이동을 촉진하였다. V3 단계에서 학생은 각 꼭지점에 형성된 삼각형에 한 층의 바둑돌이 추가되면서 변의 길이가 늘어난다는 역동적 이미지와 4층, 7층, 10층의 각 꼭지점에서 공통적으로 이런 현상이 나타난다는 패턴 이미지를 구체화하고 이들 사이를 유용하게 이동하고 있음을 위의 면담 내용을 통하여 알 수 있다. 즉, 정당성을 확보한 이미지는 학생에게 문제 해결을 위한 유용한 도구로 이용되고 있다.

분석적 사고 단계 A3에서의 활동: 일반식 도출

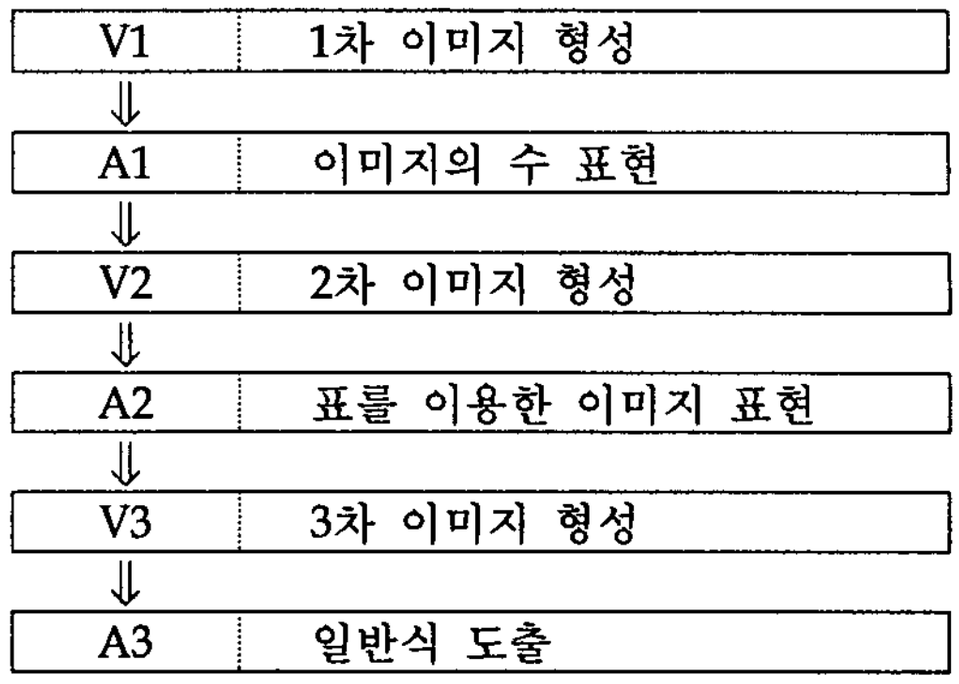
이 학생은 층의 수가 x인 정삼각형에 대해 $x \div 3 = A \cdots 1$ 인 경우, 즉 4층, 7층, 10층과 같은 정삼각형에서 이동해야 하는 전체 바둑돌의 개수를 구하기 위해 자연수의 합을 구하는 공식을 사용하였다. 정삼각형의 한 꼭지점에 A층의 삼각형이 만들어지며, 이것은 세 꼭지점에서 동일하다는 것을 이용하여 일반식 $[(A+1)A/2]\times 3$을 어렵지 않게 구하였다. 여기에서 이 학생이 정삼각형의 각 꼭지점에서 바둑돌이 삼각형을 이루면서(시각적 분석), 삼각형의 각 층의 바둑돌의 개수가 1개, 2개, 3개, ... 라는 것을 확인하여(시각적 분석) 자연수의 합을 구하는 공식으로 나아갔다면(분석적 사고) 시각적 사고를 기반으로 하여 분석적 사고로 나아갔다고 할 수 있다. 만약 자연수의 합을 구하는 공식을 알고 그것을 적용할 수 있는 전형적인 상황이라고 판단하여(분석적 사고) 삼각형을 층으로 나누는 새로운 이미지를 구성했다면(시각적 사고) 분석적 사고를 주로 하되 일부 시각적 사고가 관련된다고 할 수 있다. 이와 같이 사고의 방향을 구분하기도 어렵거니와 이 단계에서의 사고가 정확하게 시각적이거나 분석적이라고 판정하기는 어려웠다. Zazkis et. al.(1996)은 시각적 사고와 분석

적 사고가 점점 더 서로 밀접해지고 통합되면서 사고자 자신과 관찰자 모두 이 둘 사이의 움직임에 대한 인식과 구별이 어렵다고 하였는데 본 연구에서도 이와 같은 사실을 확인할 수 있었다. 이 학생은 [그림 Ⅳ-3]으로부터 4층부터 10층까지의 모든 정삼각형을 이동하는 바둑돌에서 나타나는 패턴에 따라 세 그룹으로 나누었다. 즉, (층의 수)÷3을 했을 경우 나머지가 0, 1, 2인 층에서 서로 다른 패턴이 나타난다는 것을 인식하고 [그림 Ⅳ-4]과 같이 세 그룹으로 나누어 일반식을 구하였다.

학생A는 4층의 정삼각형을 역삼각형으로 만들기 위해 움직여야 하는 바둑돌에 대한 구체적 이미지를 형성하고 이를 수로 표현하면서 분석적 사고로 이동하였다. 4층, 5층, 6층에 대한 문제를 해결하면서 구체적 이미지를 정교화하고, 구체적 이미지를 정교화 하는 과정을 통하여 역동적 이미지와 패턴 이미지를 형성하였다. 이때 형성된 역동적 이미지와 패턴 이미지는 분석적 사고를 통하여 정당성을 확보하고 정교화 되었다. 이렇게 정당성을 확보하고 정교화 된 이미지는 일반식의 형식화를 가능하게 했다.

2. 학생B의 문제 해결 과정

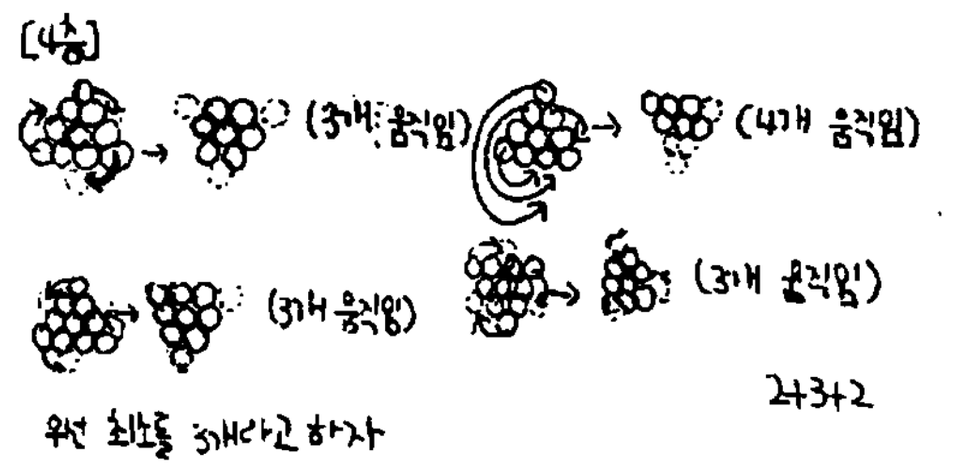
[그림 Ⅳ-5]은 학생B의 문제 해결 과정에서 나타난 시각적 사고 단계와 분석적 사고 단계에서의 활동 내용을 정리한 것이다. 이 학생의 경우 시각적 사고에서 분석적 사고로, 분석적 사고에서 시각적 사고로 이동하면서 다양한 이미지를 형성하였다. 그리고 학생A와는 달리 분석적 사고를 통하여 이전의 시각적 사고에서 형성한 이미지를 정교화 하거나 구체화하지 않고 새로운 이미지를 형성하여 문제를 해결하였다.



[그림 Ⅳ-5] 학생B의 문제 해결 과정

시각적 사고 단계 V1에서의 활동: 1차 이미지 형성

[그림 Ⅳ-6]는 학생B가 4층의 정삼각형에서 이동시켜야 하는 최소의 바둑돌의 개수를 알아보는 과정에서 그린 그림이다. 이 학생도 학생A와 마찬가지로 이동하는 최소의 바둑돌의 개수를 구하기 위해 그림을 이용하여 여러 가지 방법으로 시도하였다. 그러나 그림을 통하여 알 수 있듯이 이 학생은 움직이는 바둑돌에 대한 이미지 뿐 아니라 남아있는 바둑돌에 대한 구체적 이미지도 함께 형성하였다.



[그림 Ⅳ-6] 4층의 역삼각형 해법(학생B)

분석적 사고 단계 A1에서의 활동: 이미지의 수 표현

이 학생은 [그림 Ⅳ-6]에서와 같이 4회의 시도에서 바둑돌을 3개 움직여야 하는 경우가 3회, 4개 움직여야 하는 경우가 1회 나오자 최소의 움직이는 바둑돌의 개수를 3개라고 결정

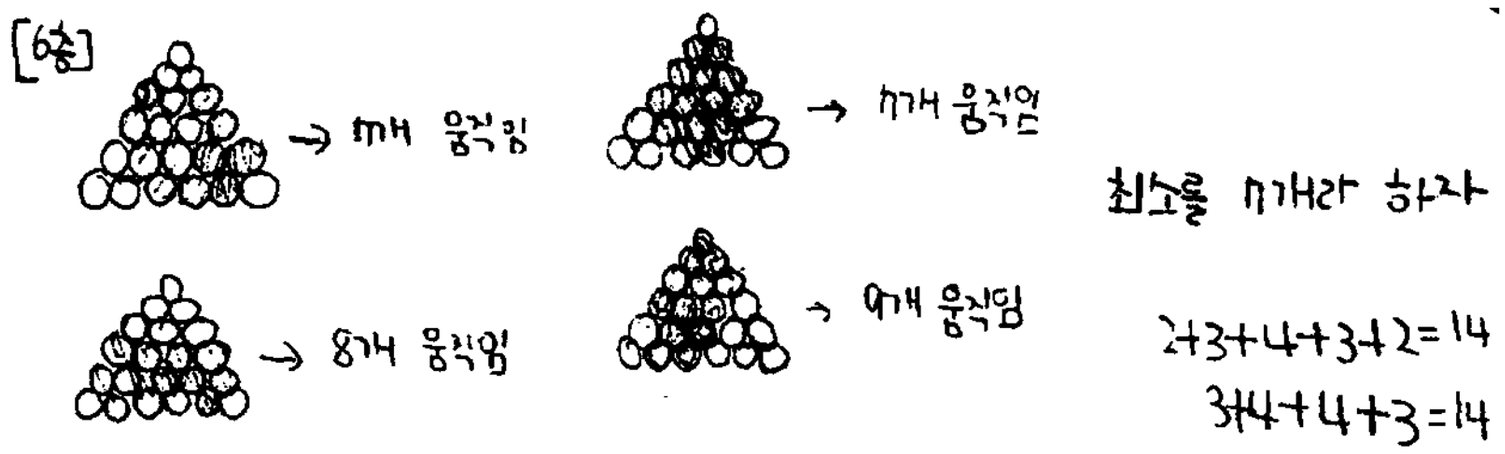
하였다. 그리고 움직이는 바둑돌의 개수와 함께 남아있는 바둑돌의 개수를 2+3+2라고 기록하였다. 학생은 이동하는 바둑돌과 남아있는 바둑돌에 대한 시각적 자료를 수로 나타내고, 수의 크기를 비교하여 최소의 개수를 결정하는 등의 분석적 사고를 하였다. 이것은 시각적 사고(V1) 단계에서의 활동에 기초하여 분석적 사고(A1) 단계로 이동했음을 설명해 준다. 이 학생은 5층 이상의 정삼각형에 대해서도 4층의 정삼각형에서와 마찬가지로 여러 가지 방법으로 시도한 후 가장 적게 나오는 바둑돌의 개수를 최소의 바둑돌의 개수로 결정하였다.

시각적 사고 단계 V2에서의 활동: 2차 이미지 형성

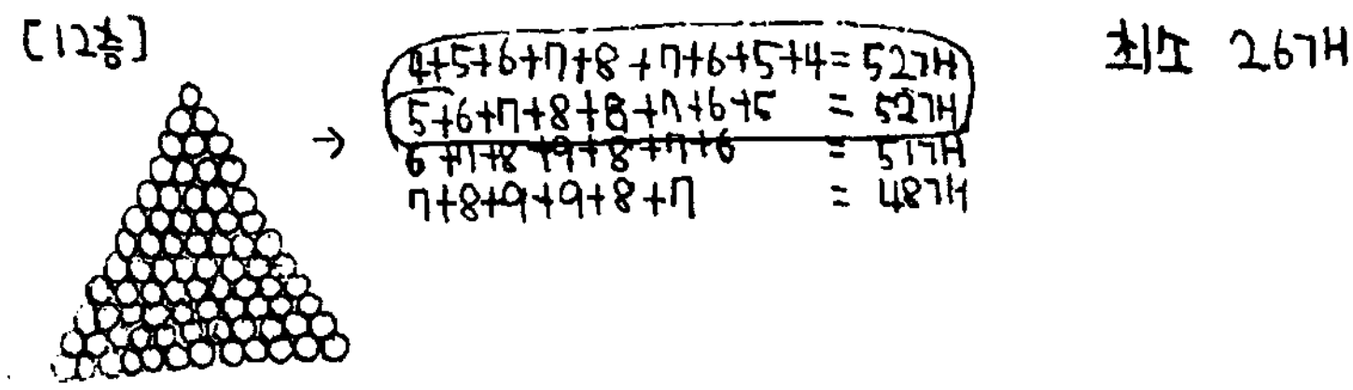
[그림 Ⅳ-7]과 [그림 Ⅳ-8]은 각각 6층과 12층의 정삼각형에 대한 문제를 해결하기 위해 학생B가 그린 그림이다. [그림 Ⅳ-7]을 통해 알 수 있듯이 이 학생은 처음에 움직이는 바둑돌에 초점을 두었다. 그러나 점점 더 남아 있는 바둑돌로 초점이 이동하고 있음을 [그림 Ⅳ-8]을 통해 알 수 있다. 그래서 남아있는 바둑돌의 최대 개수를 구한 후 전체 바둑돌의 개수에서 이것을 빼는 방식으로 최소의 움직이는 바둑돌의 개수를 구하였다. 이때 학생은 [그림 Ⅳ-7]에서와는 달리 모든 경우에 대해 그림의 이용 없이, 남아 있는 바둑돌을 각 층으로 분리하여 인식했으며, 이와 함께 각 층의 바둑돌의 수가 점점 증가하다가 다시 점점 감소한다는 것을 파악하고 있었다. 즉, 학생은 남아 있는 바둑돌에 대한 구체적 이미지를 정교화 시키면서, 바둑돌을 각 층으로 분리하여 다룰 수 있는 역동적 이미지와 이 바둑돌에 대한 패턴 이미지를 생성하였다.

분석적 사고 단계 A2에서의 활동: 표를 이용한 이미지의 표현

학생은 V2 단계에서의 활동을 토대로 분석적 사고로 이동하였다. 그러나 A2 단계에서의 활동은 학생A와는 달리 V2 단계에서 형성한 이미지를 정당화시키기 위한 사고가 아니라

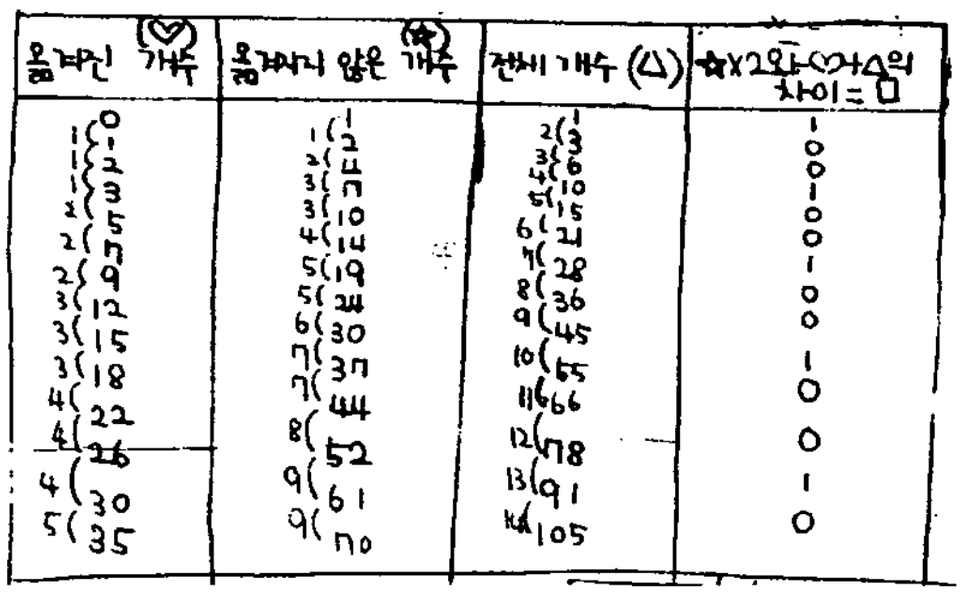


[그림 Ⅳ-7] 6층의 역삼각형 해법(학생B)



[그림 Ⅳ-8] 12층의 역삼각형 해법(학생B)

V2 단계에서의 활동을 정리하는 수준에 그치고 있다. 그래서 학생은 14층까지의 정삼각형 모두에서 움직이지 않는 바둑돌의 개수와 움직이는 바둑돌의 개수를 [그림 Ⅳ-8]과 같은 방법으로 기록한 후, 둘 사이에서 나타나는 관계를 찾고자 노력하였다. 학생은 수 감각을 이용하여 옮겨진 개수가 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3 등으로 증가하고 있으며, '(옮겨지지 않는 바둑돌의 개수)×2'와 '(옮겨진 바둑돌의 개수)+(바둑돌의 전체 개수)'의 차가 일정한 값을 갖는다는 것을 찾아내고 이것을 [그림 Ⅳ-9]의 표와 같이 정리하였다.



[그림 Ⅳ-9] 문제 해결을 위해 14층까지 정리한 표(학생B)

시각적 사고 단계 V3에서의 활동: 3차 이미지 형성

다음은 학생B가 문제를 해결한 후 이루어진 면담 내용의 일부이다.

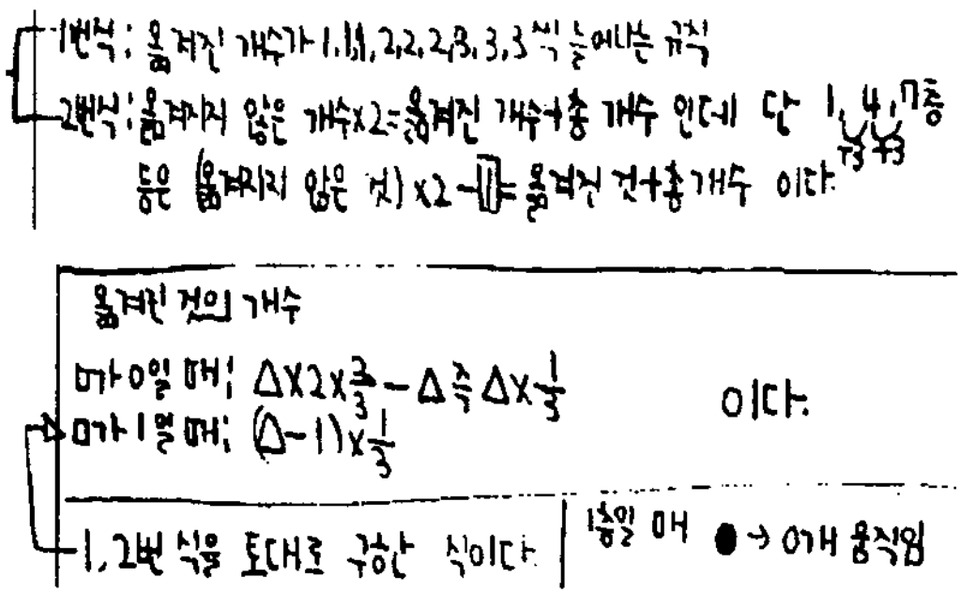
연구자: ([그림 Ⅳ-10]의 식을 가리키며)이게 어떻게 나왔는지 한번 설명해 볼까?

학생B: 이렇게요 여기([그림 Ⅳ-9]의 표)에서요 이게('(옮겨지지 않는 바둑돌의 개수)×2'와 '(옮겨진 바둑돌의 개수)+(바둑돌의 전체 개수)') 1, 0, 0, 1, 0, 0 이렇게 되잖아요. 그래서 이걸(1층, 4층, 7층, 10층, 13층을 의미함)로 먼저 식을 구해봤는데.....(생략)

이 학생은 [그림 Ⅳ-9]의 표를 작성한 후 14층까지의 그림을 다시 관찰하지 않고 이 표에서 나타나는 수 패턴을 이용하여 문제를 해결하고자 하였다. A2에서 이전에 형성된 이미지를 정당화하지 못해 V2에서 형성한 남아 있는 바둑돌에 대한 이미지를 정교화 시키거나 구체화시키지 않고 [그림 Ⅳ-9]의 표에서 수를 이용하여 새로운 이미지를 형성하였다. 그래서 학생은 1층, 4층, 7층 등과 같이 층의 수를 3으로 나누어 1이 남는 경우와 그렇지 않은 경우로 구분하였다.

분석적 사고 단계 A3에서의 활동: 일반식 도출

학생은 V3에서 형성한 패턴 이미지를 이용하여 1층, 4층, 7층 등과 같이 층의 수를 3으로 나누어 1이 남는 경우와 그렇지 않은 경우로 구분한 후 수 감각을 이용하여 각각에 대해 [그림 Ⅳ-10]과 같은 일반식을 구하였다.



[그림 Ⅳ-10] 학생B가 구한 일반식

학생B는 학생A와 마찬가지로 4층의 정삼각형을 역삼각형으로 만들기 위해 바둑돌에 대한 구체적 이미지를 형성하고 이를 수로 표현하면서 분석적 사고로 이동하였다. 5층 이상의 정삼각형에 대한 문제를 해결하면서 남아있는 바둑돌에 대한 구체적 이미지를 정교화 하고, 구체적 이미지를 정교화 하는 과정을 통하여 역동적 이미지와 패턴 이미지를 형성하였다. 형

성된 이미지를 분석적 사고 단계에서 표를 이용하여 표현하였으나 정당화 시키지 못했다. 그래서 수 패턴을 이용한 새로운 이미지를 형성했으나 이 이미지 역시 정당화 과정을 거치지 않으면서 단순히 수 감각을 이용한 일반식을 도출하게 되었다.

V. 결론 및 논의

Zazkis et. al.(1996)은 시각적 사고와 분석적 사고가 독립적으로 존재하는 것이 아니라 상호 의존적으로 작용한다고 주장하면서 이는 다양한 문제 상황 속에서 계속적인 확인이 필요하다고 제안하였다. 본 연구에서는 대수 일반화 과제를 해결하는 수학영재 학생들의 문제 해결 과정을 분석하였다. Kosslyn(1983)에 따르면 이미지는 한번 생성된 이후에 계속적으로 조작되면서 변형된다고 하였다. 본 연구에서는 또한 이미지의 생성과 변형이 어떻게 이루어지는지 확인할 수 있었다. 그리고 시각적 사고와 분석적 사고 사이에서 이미지의 역할을 조사하고 이를 통하여 시각적 사고와 분석적 사고가 어떻게 상호작용하는지 살펴보고자 하였다.

학생A의 사례를 통하여 알 수 있듯이 구체적 이미지는 분석적 사고를 거치면서 역동적 이미지와 패턴 이미지의 형성이 일어나는 시각적 사고로 나아가고, 또다시 이를 정당화 하는 분석적 사고로 이어졌다. 분석적 사고 단계에서 정당화 과정을 거친 이미지는 문제 해결을 위한 유용한 도구가 되어 일반식을 형식화하는데 큰 역할을 하였다. 즉, 구체적 이미지가 생성된 이후 이미지의 변형과 역동적 이미지 및 패턴 이미지의 생성은 시각적 사고와 함께 분석적 사고의 영향을 받아 이루어짐을 알 수 있었다. 그리고 이와 동시에 이미지는 시각적 사고와 분석적 사고의 상호 작용을 위한 매개체 역할을 하고 있음을 알 수 있었다. 그러나 이것이 시각적 사고에서 분석적 사고로, 분석적 사고에서 시각적 사고로 나아가는데 영향을 미치는 요소가 이미지만 존재한다는 것을 의미하지는 않는다.

학생B의 사례를 통하여 한번 형성된 이미지가 정교화 되고 구체화되어 문제 해결을 위한 유용한 도구로 활용되기 위해서는 계속적인 분석적 사고를 통하여 이미지를 정당화하는 과정이 이루어져야 함을 알 수 있다. 학생B의 사례에서, 남아 있는 바둑돌에 대해 형성된 이미지는 이후 분석적 사고에서 적절한 정당화 과정을 거치지 못해 더 이상 정교화 되지 못하면서 문제 해결을 위한 유용한 도구로 역할을 하지 못했다. 따라서 학생은 수 패턴에 대한 새로운 이미지를 형성해야 했다. 그러나 새롭게 형성된 이미지 역시 정당화 과정을 거치지 못해 학생B는 수 감각을 이용하여 일반식을 도출했다. 즉, 생성된 이미지가 관계적 이해를 동반하고 문제 해결을 위한 강력한 도구로 활용되기 위해서는 분석적 사고 단계에서 정당화가 이루어져야 함을 알 수 있다.

학생들은 문제를 해결하기 위해 바둑돌에 대한 구체적 이미지를 형성하였다. 이렇게 형성된 구체적 이미지는 분석적 사고 과정을 거치면서 정교화 되고, 정당화 과정을 거치면서 역동적 이미지와 패턴 이미지를 형성하는 토대가 되었다. 구체적 이미지의 생성과 정교화와 정당화는 시각적 사고와 함께 분석적 사고가 작용하면서 이루어짐을 알 수 있다.

여러 연구(Brown & Presmeg, 1993; Presmeg, 1986b; Presmeg, 1992; Wheatley, 1997)에서 역동적 이미지와 패턴 이미지의 중요성을 강조하였다. 본 연구에서 학생들은 역동적 이미지와 패턴 이미지를 형성하고 이를 자유롭게 오가며

최소의 바둑돌의 개수에 대한 일반식을 구하였다. 즉, 역동적 이미지와 패턴 이미지가 사고를 형식화 하는데 중요한 역할을 하고 있음을 확인하였다. 여러 연구자들은 또한 구체적 이미지가 수학 학습의 관계적 이해에 크게 도움이 되지 못한다는 결과를 제시하였다. 그러나 시각적 사고에서 분석적 사고로 나아가기 위해 학습자는 우선 문제에 적절한 구체적 이미지를 형성하는 것이 필요함을 확인할 수 있었다. 문제가 되는 것은 구체적 이미지 자체가 아니라 학습자가 구체적 이미지를 생성한 이후 분석적 사고를 거쳐 이를 정교화 하고 정당화 하지 못하거나 역동적 이미지와 패턴 이미지로 변형시키지 못한다는 것이다. 그리고 이렇게 구체적 이미지를 토대로 형성된 역동적 이미지와 패턴 이미지는 계속해서 분석적 사고를 통하여 정당화 시키는데 실패한다는 것이다. 따라서 적절한 이미지의 생성과 정교화 및 이미지의 변형을 자극하고 분석적 사고를 통하여 이를 정당화 시킬 수 있는 능력을 향상시키도록 도울 수 있는 교수학적 고려가 이루어져야 하며, 이를 위해 이미지의 생성과 변형 및 역할에 대한 깊이 있는 연구가 계속적으로 이루어져야 할 것이다.

본 연구에서 논하는 이미지의 형성 및 변형, 그리고 시각적 사고와 분석적 사고 사이에서 이미지의 역할은 대수 일반화 과제를 통하여 살펴본 것으로 기하나 다른 분야의 과제를 이용한 연구도 함께 이루어져야 할 것이다. 그리고 이를 토대로 수학학습에서 이미지의 필요성 및 중요성에 대한 논의를 확장시켜 나가는 것이 필요할 것이다.

참고문헌

김성준(2004). **대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색**. 서울대학교 박사학위논문.

박은정(2006). **능력별 집단에 따른 수학 영재들의 패턴의 일반화 과정에 관한 연구**. 경인교육대학교 석사학위논문.

Alcock, L. & Simpson, A. (2004). Convergence of sequences and series: Interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics, 57*, 1-32.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215-241.

Aspinwall, L., Shaw, K. & Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and derivative. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 301-317.

Brown, D. & Presmeg, N. C. (1993). Types of imagery used by elementary and secondary school students in mathematical reasoning. *Proceedings of the 17th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, 81-89). Tsukuba, Japan.

Brown, D. & Wheatley, G. H. (1989). Relationship between spatial ability and mathematics knowledge. *Proceedings of the 11th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, NA* (pp. 143-148). New Brunswick, NJ, USA.

Clements, M. A. (1982). Visual imagery and school mathematics. *For the Learning of Mathematics, 2*(2), 2-39.

David, K. & Thomas, A. (2004). Visual salience of algebraic transformations. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(4), 224-257.

Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 33-48). Assisi, Italy.

Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 25-38). MAA Notes #19.

English, L. D. (1997). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images.* Mahwah, NJ:Lawrence Erlbaum Associates.

Gollwitzer, H. (1991). Visualization in differential equations. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 149-156). MAA Notes #19.

Johnson, M. (1987). *The body in the mind: The bodily basis of meaning, imagination, and reason.* The University of Chicago Press.

Kosslyn, S. M. (1983). *Ghosts in the mind's machine: Creating and using images in the brain.* New York: W. W. Norton Co.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children.* The University of Chicago Press.

Lakoff, G. & Núñez, R. E. (1997). The metaphorical Structure of mathematics: Sketching out cognitive foundationa for a mind-based mathematics. In L. D. English(Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (pp. 21-89). Mahwah, NJ:Lawrence Erlbaum Associates.

Lakoff, G. (1987). *Women, fire, and dangerous things.* The University of Chicago Press.

Presmeg, N. C. (1986a). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics, 17*, 297-311.

Presmeg(1986b). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics, 6*(3), 42-46.

Presmeg(1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 595-610.

Presmeg(1997). Generalization using imagery in mathematics. In L. D. English (Ed.). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (pp. 299-312). Mahwah, NJ:Lawrence Erlbaum Associates.

Wheatley, G. H. (1997). Reasoning with images in mathematical activity. In L. D. English (Ed.). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (pp. 281-298). Mahwah, NJ:Lawrence Erlbaum Associates.

Zazkis, R., Dubinsky, E. & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D_4 . *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 435-457.

The Role of Images between Visual Thinking and Analytic Thinking

Ko, Eun Sung (Korea National University of Education, Graduate School)
Lee, Kyung Hwa (Korea National University of Education)
Song, Sang Hun (Gyeongin National University of Education)

This research studied the role of images between visual thinking and analytic thinking to contribute to the ongoing discussion of visual thinking and analytic thinking and images in mathematics education. In this study, we investigated the thinking processes of mathematically gifted students who solved tasks generalizing patterns and we analyzed how images affected problem solving. We found that the students constructed concrete images of each cases and dynamic images and pattern images from transforming the concrete images. In addition, we investigated how images were constructed and transformed and what were the roles of images between visual thinking and analytic thinking. The results showed that images were constructed, transformed, and sophisticated through interaction of visual thinking and analytic thinking. And we could identify that images played central roles in moving from visual thinking to analytic thinking and from analytic thinking to visual thinking.

* key words : images(이미지), visual thinking(시각적 사고), analytic thinking(분석적 사고), the mathematically gifted(수학영재), 일반화(generalization)

논문접수 : 2008. 1. 31
심사완료 : 2008. 3. 17