한국수학사학회지 제21권 제4호(2008년 11월), 153 - 168

수학사의 한 넓이 문제에 대한 초등 수학 우수아의 풀이 다양성 탐색1)

진주교육대학교 수학교육과 **장혜원**
hwchang@cue.ac.kr

이 연구는 수학교육에서 문제해결의 중요성에 근거하여 초등 수학 우수아들의 문제 푸는 방법에 대해 조사하였다. 조선시대 수학책인 <산학입문>에서 발췌하여 수정한 문제인 노끈의 넓이 구하는 문제가 주어질 때 84명의 초등 수학 우수아의 반응 및 풀이 과정을 분석하여 분류하였다. 이 중 정답을 얻은 학생들(73.8%)이 사용한 접근 방법은 크게 수치적 접근과 재구성 접근의 두 가지로 나뉜다. 두 접근은 다시 각각 세 가지, 여섯 가지 방법으로 세분할 수 있어 각각의 특징을 학생 사례와 함께 고찰하였다. 그 중 동양 수학사에서 이용된 방법을 포함하여 도형의 재구성을 통한 방법은 특히 주목할 만하다. 전체 정답자의 절반에 가까운 수가 수치적 접근을 이용하였음에도 불구하고 동일 문제에 대한 다양한 풀이를 관찰할 수 있었고, 그 분석을 통해 학생들의 사고 특징을 파악할 수 있었다.

주제어: 문제해결, 수학사, 초등 수학 우수아, 풀이 다양성, 수치적 접근, 재구성 접근

0. 서론

문제해결은 1980년대 이후 수학교육의 가장 중요한 목표 중 하나이다. 미국의 Agenda for action에서 문제해결의 중요성을 강조하기 시작한 이후로 세계 각국의 수학교육의 주도적인 흐름을 문제해결 지향이라는 한 마디로 특징지을 수 있음은 결코 과장이 아니다. 이러한 사실은 [13]에 포함된 세계 14개국의 수학 문제해결 교육과 관련한 논문들을 통해서 다시 한번 확인할 수 있다.

이러한 세계적인 동향은 우리나라에서도 예외가 아니다. 제6차 교육과정기의 문제해결에 대한 강조에 이어 제7차 교육과정기에는 문제해결에 의사소통, 표현, 고차적

1) 이 논문은 The 31st Annal Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education의 short oral communications에서 발표한 연구를 기초로 작성한 것임.

사고와 같은 요소를 첨가하여 수학적 힘의 신장이라는 목표로 확대되었다. 더욱이 우리나라는 문제해결을 각 단원의 마지막 단계에서 단원학습 내용의 동화와 적용을 위한 문제 상황 속에서 도구적 성격으로 이용하는 차원과 별도로, 하나의 주제 영역인 '문자와 식'의 주요 내용으로 선정하여 문제해결 과정 및 전략의 학습을 직접 수업 목표로 다룰 정도의 적극성을 보이고 있다.

수학교육에서 문제해결 활동의 교육적 가치에 대한 합의에 기초하여 일관되게 나타나는 문제해결 교육의 현상 중 하나는 학생들에게 다양한 풀이 방법을 경험시키는 것이다. Polya의 이론에서 네 단계 문제해결 과정 중 답을 얻기까지의 세 단계만으로는 부족하고 이미 이용한 전략과 다른 방법을 생각해보는 반성이 포함된 넷째 단계가 왜 강조되어야 하는지에 대한 설명으로 뒷받침되는 현상이다. 이는 Polya의 이론이 문제해결 '교육론'으로서 교육적 측면을 강조하는 이유이기도 하다. 곧, 문제해결 교육에서 다양한 전략을 사용하여 문제를 풀도록 하는 것은 문제해결 활동의 목표가 단순히 답을 얻는 것에 있지 않고 그 활동을 통해 다양한 사고 전략, 의사소통력, 타당화 능력 등을 지도하는 데까지 확장됨을 보여준다.

뿐만 아니라 문제해결 능력의 증진을 목적으로 다양한 문제해결 전략을 지도하고자 하는 연구에서 가정하는 바는, 학생들에게 다양한 문제해결 전략을 사용할 수 있는 능력을 갖추도록 하는 것이 문제를 잘 푸는 데 충분하다는 것이다([9], p.61). 물론 훌륭한 문제해결자가 되기 위해서는 이밖에도 메타인지능력, 정의적 성향 등이 또 다른 변인으로 작용하는 것이 분명하지만, 다양한 문제해결 전략의 경험 역시 훌륭한 문제해결자가 되기 위해 매우 중요한 요소로 간주되는 것이다. 다양한 문제해결 전략을 이용하여 문제에 접근해보는 경험은 다른 변인들의 조력에 힘입어 시너지효과를 얻을 수 있다는 견해이다.

이렇듯 유능한 문제해결자가 되기 위해 필요한 다양한 문제해결 방법의 경험을 위해 교사 또는 교과서 개발자는 학생 수준에 맞추어 문제를 제시하고 학생으로 하여금 몇 가지 전략을 이용하여 문제를 풀게 하고 그 교수 상황을 이용하여 문제해결 방법의 다양성을 파악하도록 한다. 그때 이용하는 전략은 교육과정에서 주어진 것으로서 학생들의 활동으로 기대되는 풀이 접근 방법들이다. 그러나 교사가 기대하는 것 이상의 다양한 해결 방법이 가능하다. 가장 간단한 기본 연산인 덧셈에도 사용되는 전략은 하나 이상이다([5], p.20). 더욱이 문제해결 활동의 조건이 되는 장애 요인을 내포한 문제에 대한 해를 찾는 과정에서 해결자가 취할 수 있는 경로는 다양할 것이 분명하다. Grouws([8])는 문제해결이 수학 교육의 중심 주제로 등장한 80년대 초반의 문제해결에 대한 연구 주제를 일곱 가지로 분류하였는데 대부분의 연구가 문제해결시 학생들이 사용한 전략을 조사하는 것이었다. 학생들의 실제 풀이 과정에 대한 관심과 연구는 문제해결 교육의 중심 생각으로부터 필연적인 것이라 할 수 있다.

이에 본 연구에서는 한 문제에 대해 다양한 방식으로 접근하는 풀이 가능성의 교육적 가치에 근거하여 학생들의 문제해결 방법의 다양성을 살펴보고자 한다. 특히 수학

교육에서 수학사의 활용이라는 측면에서 조선시대 수학책의 평면도형의 넓이 구하는 문제 중 도형의 분할 및 재구성을 통한 변형을 요구하는 한 문제를 제시하여 초등 수학 우수아들이 어떻게 문제를 해결하는지 알아봄으로써 그들의 문제 풀이 방법의 다양성을 탐색할 것이다. 그리고 그 다양성을 교수학적으로 활용할 수 있는 가능성에 대해 논의할 것이다.

1. 이론적 배경

본 연구 주제와 관련한 이론적 배경으로서 두 가지 측면을 고려할 수 있다. 교수실제와 관련하여 국내외 교육과정을 통해 다양한 문제해결 전략의 사용을 언급한 내용을 고찰하고, 문제의 원천으로서 수학사를 이용하는 것과 관련하여 수학 교수를 위한 수학사의 활용을 다룰 것이다.

(1) 교육과정에 나타난 다양한 문제해결 전략의 사용

다양한 문제해결 전략을 유발시키는 교육적 가치는 교육 실제를 대변하는 교육과정에서도 쉽게 발견된다.

우선, 우리나라 제7차 교육과정에 따르면 각 단계에서 다음과 같은 내용이 지도된다([1]).

3-나:(심화)하나의 문제를 다양한 전략으로 해결할 수 있다.

4-나, 5-가:(심화)하나의 문제를 두세 가지 방법으로 해결하고, 그 방법을 비교할 수 있다.

5-나, 6-가, 6-나: 문제 해결의 여러 가지 방법을 비교하여 문제 해결을 위한 적절한 방법을 선택할 수 있다.

이에 따라 수학 교과서에서는 각각의 문제해결 전략을 학습하고 나서, 5-가, 6-가 단계에서 '여러 가지 방법으로 문제를 풀어 봅시다'를 통해 같은 문제에 대해 두 가지 이상의 전략을 이용하여 풀어보는 경험을 하게하고, 5-나, 6-나 단계에서는 '문제 해결 방법을 비교하여 봅시다'와 '문제를 여러 가지 방법으로 해결하고 비교하여 봅시다'를 통해 다양한 전략 중 보다 적절한 방법을 선택하는 활동까지 확장하고 있다([2]).

미국 NCTM의 Principles & standards for school mathematics([12])에서는 K-12의 모든 학생들에게 적용되는 문제해결 규준의 하나로서 '문제를 풀기 위해 여러 가지 적절한 전략을 채택하여 적용할 수 있어야한다'고 하였다.

영국의 경우, 내용 영역별로 첫 번째 능력인 문제해결을 다루는데 특정 내용 영역을 생략하고 표현하면 1-2학년에 해당하는 key stage 1의 관련 내용은 다음과 같다 ([6]).

- 문제에 대한 유연성 있는 접근법을 개발하고 어려움을 극복하기 위한 방법을 찾는다.
- 문제를 풀 때 여러 가지 접근을 시도하고 어려움을 극복하는 방법을 찾는다.

한편 3-6학년에 해당하는 key stage 2에서는 다음과 같은 내용을 다룬다([6]).

- 어떠한 어려움도 극복하기 위해 문제에 접근하는 다양한 방법을 찾는다.
- 어려움을 극복하기 위해 대안적인 접근을 시도하는 것을 포함하여 문제에 유연하게 접근한다.

프랑스의 경우에는, 1, 2학년에 해당하는 cycle 2에서 문제해결과 관련한 다섯 가지 학습능력 중 다음의 두 가지가 포함된다([11], p.14).

- 개별적인 풀이 절차를 시도하여 완성한다.
- 자신이 만든 것과 다른 절차가 가능하다는 것을 인정하고 그 절차를 이해하려고 노력한다.

한편 3, 4, 5학년에 해당하는 cycle 3에는 일곱 가지 능력 중 다음이 포함된다([10], p.13).

- 자신 또는 동료가 만든 해법의 타당성에 대해 토론한다. (이것은 학생들이 문제해결 방법이 유일하지 않다고 생각하며, 따라서 교사는 여러 가지 방법을 수용한다는 것을 가정한다.)

공통적으로 개인에 따른 문제 풀이의 다양성을 적극적으로 수용하고 있다. 나아가 자신이 이용한 방법의 타당성에 대한 토론을 통해 수학적 능력을 개발하고자 하는 의도가 드러나 있는 경우도 있는데, 이는 수학적 추론 및 수학적 의사소통과도 직결되는 의미 있는 교육적 활동을 야기시킬 것이다.

(2) 수학 교수를 위한 수학사의 활용

수학을 가르치기 위한 효과적인 방법의 일환으로 수학사를 적극적으로 활용하는 것

에 대한 수학교육 공동체 내의 합의가 있어 왔다. 수학교육 연구에서 수학사의 교육적 활용에 대한 필요성 및 이점에 대해 많은 논의가 있어왔고, 결과적으로 근거하는 이유는 서로 다를지라도 이 이슈는 대부분의 연구자들과 교사들에게 긍정적으로 받아들여지고 있는 것이 사실이다. 더 적극적으로 개념의 역사적 발달과 심리적 발달간의 평행성에 기초한 수학 교수-학습 원리로서의 역사발생적 원리나 수학교육의 주요 개념인 인식론적 장애 등은 수학교육과 수학사의 공통 부분을 근거로 하여 생성된 결과물이다. 뿐만 아니라 수학이 기성 지식체가 아닌 구성 과정중의 지식이라는 인식론 자체의 변화는 실제로 학교 수학에서 수학사의 중요성을 강조하도록 이끌며, 예컨대 다음 인용문은 오늘날까지 이어지는 그러한 추세를 잘 드러낸다.

> 수학사를 알지 못하는 교사는 수학적인 기술을, 그것을 야기시킨 문제와 아이디어 또는 그로부터 발생한 더 심오한 발달과 관련 없이 고립적으로 가르치기 쉽다…위대한 수학자들 사이의 논쟁에 대해 아는 것은 교실에서의 건전한 비판과 토론을 유도할 것이며 원리의 파악으로 이끌 것이다…학생들에게 오늘날 최종 산물로 배우는 것 중 많은 것이 수세기에 걸친 열띤 논쟁의 결과라는 것을 전달하는 것이 중요하다…수학은 수학사를 배경으로 할 때만 적절하게 지도될 수 있다(영국 교육부 (1958); [7], p.3 재인용).

수학사를 수학교육에 이용하는 것이 바람직하다는 사실이 일단 수용되고 나면, 과연 무엇을 어떻게 해야 하는가? 이제 활용 방안에 대한 좀 더 구체적인 논의가 불가피하다. 수학사를 연대에 따라 포괄적으로 조망하여 얻는 통찰은 수학사적 안목을 갖추는데 기여하며 수학사를 교육적으로 이용하려는 교사에게 필수 조건처럼 간주되곤 한다. 그러나 그러한 통찰이 수학사를 어떻게 이용할 것인가 하는 질문에 대한 구체적이고 직접적인 해결책을 보장하지는 못한다. 수학사에 대해 총체적으로 다루고 있는 무거운(내용뿐만 아니라 물리적으로도) 책자를 처음부터 끝까지 주파하는 것은 쉬운 일이 아니며, 설령 끝까지 읽어나가는 인내심을 지녔다 해도, 그 적용으로서 활용 방안을 구체화하는 것 역시 쉽지 않다는 것은 수학사에 관심을 가진 교사라면 한번쯤 경험해본 일일 것이다. 수학사를 섭렵하는 것과 그것을 구체적으로 수학 교수에 활용하는 것은 별개의 문제라고 할 수 있다.

본 연구에서는 수학사를 수학 교육에서 활용하는 방안의 하나로 수학사의 한 문제를 이용하고자 한다. 구체적으로 조선시대 수학책에 나오는 문제를 초등 수학 우수아에게 제시할 것인데, 이때 우수아라는 특정 대상의 선정에 대해서는 다음 인용문에서 주목하는 바와 같이 수학적 능력이 탁월한 학생들에게는 수학사의 활용이 더욱 효과적일 것이라는 기대에 근거하여 설명할 수 있다.

> …[학습 성취도가 높은 학생들은] 또한 수학에 대한 책을 읽어 과거 위대한 수학자

들의 연구에 대해 뭔가를 배우도록 격려되어야 한다.…배우고 있는 주제들의 역사적 배경을 참조함으로써 그 중요성을 설명하는 것을 도울 수 있고 수준 A과정에 흥미와 깊이를 더할 수 있다(Cockcroft Report(1982); [7], p.3 재인용).

뿐만 아니라 수학사를 활용한 수학 수업은 다루는 내용의 범위에 있어 교과 과정을 벗어나기 쉽고 더욱이 수학적 탐구를 위해 그것이 조장되는 경향마저 있는데, 바로 이러한 특성이 수학 성취도가 높은 학생들에게 유효할 것으로 판단된다.

이상의 고찰에 근거하여 초등 수학 우수아에게 수학사에서의 문제를 제공하는 것은 지적 호기심을 유발시킬 수 있으며 그 결과로서 문제에의 다양한 접근 방식 및 해결 방법을 기대할 수 있다.

2. 연구 절차

(1) 연구 대상

본 연구의 대상은 경상남도에 소재한 32개 초등학교의 6학년 학생 84명으로, 2006년 J대 수학경시대회에 참가한 학생들이다. 이들은 학교장의 추천을 받은 학교당 3명 이내의 학생이므로, 교내의 6학년 학생 중 수학 성적 3위 이내에 해당하는 것으로 볼 수 있다.

(2) 연구 절차

연구자는 조선시대의 수학책에서 발췌한 한 문제를 데이터만 변형시켜 경시대회 문제의 다른 문제들과 함께 제시하였다. 총 문항 수는 23개로 시험 시간은 70분으로 한정되었다. 따라서 개인마다 본 연구에서 다룬 문제에 할당한 시간은 다르며, 시험에 포함된 다른 문제의 난이도가 이 문제에 몰두하는 시간에 영향을 미쳤을 것이라는 점은 본 연구 결과 해석에 제한점으로 고려되어야 한다. 즉 본 연구의 문제 위주로 충분한 시간이 주어졌을 때 좀 더 다양한 결과를 기대해볼 수 있다.

시험 완료 후 작성한 답안지는 수거하여 채점하였으며 본 연구의 문제에 대한 풀이 절차와 답안을 분석하였다. 우선 오답 또는 무응답으로부터 정답지를 분류하고, 정답지의 접근 방식을 학생들이 기록한 풀이 절차에 나타난 특징에 따라 <표 1>과 같이 분류하였다.

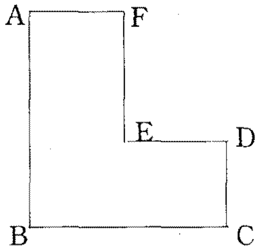
한편 지필 시험지에 기록한 풀이 절차만으로 학생의 사고 과정을 읽어낼 수 없는 경우에는 해당 학생을 별도로 개별 면담하여 학생 스스로 자신의 풀이 과정을 설명하

게 함으로써 해결 아이디어를 파악하였다.

(3) 활용 문제

본 연구에서 이용한 문제는 다음과 같다.

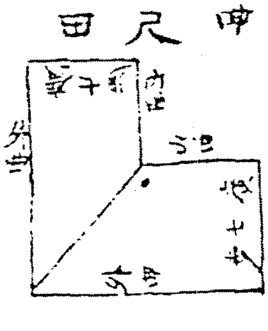
다음 도형에서 변 AF와 변 CD는 각각 4*cm*, 점 A에서 점 B를 지나 점 C까지는 22*cm*, 점 F에서 점 E를 지나 점 D까지는 14*cm*라고 한다. 도형의 넓이를 구하시오.[2]



[그림 1] 곡척전

이 문제는 18세기의 조선시대 실학자인 황윤석(黃胤錫, 1729-1791)이 저술한 <산학입문(算學入門)>에 나오는 곡척전의 넓이를 구하는 것과 관련된다([3]). 이 밭의 모양은 곧 ㄱ자 모양의 도형인 노몬(gnomon)을 말한다. 총 4개의 길이 즉, 외곡 ABC, 내곡 DEF, 끝변 AF와 CD의 길이가 주어지고 넓이를 구하는 방법을 설명한다. 이 도형의 넓이를 구하는 것은 어느 변의 길이가 주어지는가에 따라 초등수학 교육과정에 포함될 가능성이 있지만[3] 원전에 주어진 조건과 풀이만으로는 교육과정 내의 특정 지식과의 관련보다는 도형의 형태 및 변형에 대한 통찰력을 요구하는 문제로 보는 것이 타당하다.

내곡 12보, 외곡 26보, 두 끝의 너비가 각각 7보이다. 제전에서 비스듬한 변이 서로 이어져 있어 본래 제전이다. 두 끝의 너비가 같으면 이 방법을 이용한다. 내곡은 제전의 윗변, 외곡은 아랫변, 끝의 너비는 높이이다. 내곡과 외곡을 더하면 38보이고 한 끝의 너비 7보를 곱하여 2로 나누면 넓이이다. 만약 두 끝의 너비가 같지 않으면 제전의 방법을 써서 두 개의 반제전으로 하여 넓이를 구한다.



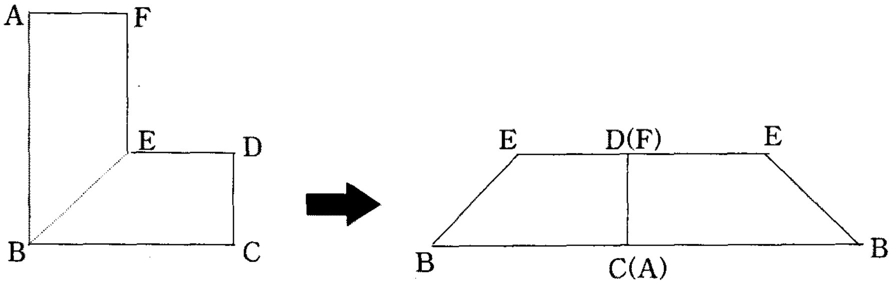
[그림 2] 원전의 곡척전

[그림 1]에서의 기호를 이용하면 문제에서 주어진 조건은 DEF=12, ABC=26, AF=CD=7이다. 이 도형을 본래 제전(사다리꼴)이라 한 근거는 도형 내부에 그려진 선

2) 연구 대상을 고려하여 원래 문제에서는 A, B, C 대신 ㄱ, ㄴ, ㄷ으로 기호화하였다.

3) 실제로 수학 5-가 단계에서는 직사각형을 이용한 도형의 넓이 구하는 문제로, 4개의 변 BC, CD, DE, EF가 주어질 때 이 모양의 넓이 구하는 방법을 다룬다([2], p.91).

분을 따라 자른 후 윗부분을 회전시켜 두 끝이 맞닿도록 나머지 부분에 이어 붙임으로써 새롭게 얻은 도형이 사다리꼴임을 말한 것이다. 이제 노몬이 사다리꼴로 변형되었고 그렇게 하면 내곡은 사다리꼴의 윗변, 외곡은 아랫변, 끝은 높이가 되므로(그림 3) 주어진 데이터를 이용하여 쉽게 넓이를 구할 수 있다.



[그림 3] 노몬을 변형하여 얻는 사다리꼴

이와 같이 원전의 해법을 얻기 위해서는 기하학적 통찰력을 요구한다. 즉 노몬을 분해하여 사다리꼴로 재결합할 수 있는 능력이다. 대수적 식을 이용하는 것이 어려울 것으로 예상되는[4] 초등학생들이 산술적 해법 외에 어떤 접근을 취할 수 있을지, 수학 우수아들의 특성상 뛰어난 통찰력의 발현 등을 기대해본다.

그런데 이 방법은 두 끝의 길이가 같기 때문에 가능한 것이며 만약 같지 않다면 두 개의 사다리꼴로 나누어 각각 구하여야 함을 설명하였다. 다만 이렇게 구하려 하면 내곡, 외곡, 두 끝의 길이에 대한 정보만으로는 노몬이 일의적으로 정해지지 않기 때문에 문제의 조건이 부족함을 보충 설명하는 것이 타당하며, 원문에는 그것이 빠져 있기 때문에 정보의 여분과 부족과 관련하여 교육적으로 이용할 수 있는 또 한번의 기회로 여겨진다.

3. 연구 결과 및 분석

이 연구에서 학생들이 보여준 풀이 방법의 다양함은 크게 두 가지로 분류된다. 수치적 접근과 재구성 접근이다. 각 접근 방법에 따른 학생 수는 <표 1>과 같다.

4) 실제로, 연구자가 예비 초등 교사들에게 이 문제를 제시했을 때 대부분은 도형의 특정 부분을 문자로 놓고 주어진 데이터를 이용한 식을 세워 복잡한 대수식을 풀어가는 방법을 취하였다.

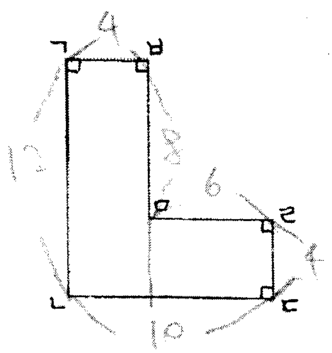
<표 1> 접근 방법에 따른 학생 수

방법		학생 수(명)	백분율(%)
수치적 접근	N1	28	33.3
	N2	10	11.9
	N3	1	1.2
재구성 접근	R1	2	2.4
	R2	8	9.5
	R3	9	10.7
	R4	2	2.4
	R5	1	1.2
	R6	1	1.2
오답 또는 무응답		22	26.2
합계		84	100

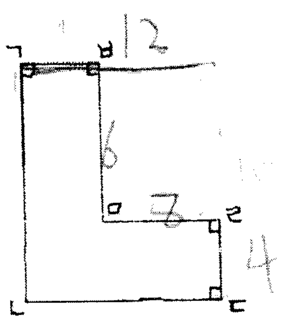
먼저 수치적 접근은 문제에 주어진 데이터에 의존하여, 그림으로부터 혹은 임의로 가정한 특별한 경우에 국한시켜 문제를 해결한 것을 의미한다. 이 접근은 보다 세부적으로 세 가지 경우로 나뉜다. 편의상 N1, N2, N3으로 부른다.

방법 N1은 그림과 관련 있는 한 가지 사례만을 생각하여 푼 경우이다. 예를 들어 내곡이 14라는 조건으로부터 EF를 8, DE를 6으로 간주하고, 따라서 두 끝이 4이고 외곡이 22라는 조건으로부터 AB를 12, BC를 10으로 간주하여 푼, 하나의 특별한 경우를 이용한 해법이다(그림 4).

방법 N2 또한 N1과 마찬가지로 특수한 한 가지 경우만을 고려하여 답을 얻었지만 고려한 데이터가 그림과 무관하다는 점에서 차이가 있다. 예를 들어 EF를 6, DE를 8로 생각한 사례가 있다(그림 5). 시각적으로 드러나는 길이의 상대적 크기는 전혀 고려되지 않은 경우이다.5)



[그림 4] 방법 N1의 사례



[그림 5] 방법 N2의 사례

방법 N3은 특별한 경우에 주목한다는 점에서는 앞의 두 방법과 마찬가지이지만 두 가지 이상의 경우를 고찰함으로써 일반화하려는 시도를 보여준다. 이 방법을 취한 단 한 명의 학생의 다음과 같은 표현이 이러한 분석을 입증한다.

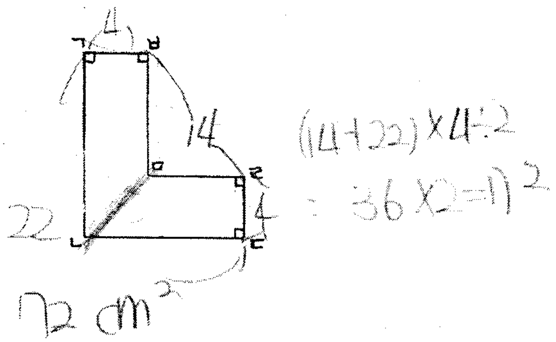
S: 8과 6, 9와 5,… 두 짝을 어떻게 잡더라도…

이 학생은 내곡 14를 두 변 8과 6으로도 생각해보고 9와 5로도 생각해보지만 두 변을 합이 14가 되도록만 하면 '어떻게 잡더라도' 결과가 같다는 것을 인식했음을 보여준다.

세 가지 방법 모두 특별한 경우의 수치에 의존하고 있기 때문에 일반성이 결여된 해법이지만 답을 얻는 데는 성공하였다.

또 다른 접근은 재구성 방법이다. 주어진 도형을 자르고 다시 이어 붙이는 활동을 통해 측도를 아는 다른 도형으로 변형시키는 것이다. 이 접근은 세부적으로 여섯 가지 방법으로 구별해볼 수 있다. 기호를 붙여 R1, R2, R3, R4, R5, R6로 지칭할 것이다.

방법 R1은 원전 <산학입문>에 있는 풀이와 일치하는 내용이다. 노몬을 BE[6]를 따라 잘라서 끝변을 맞대어 이어 붙인 사다리꼴로 변형한 다음, 새로 얻은 도형의 길이를 확인하여 사다리꼴의 공식을 이용하여 넓이를 구한 경우이다. [그림 6]에서 볼 수 있듯이 학생 K는 사다리꼴의 공식 $(14+22)\times4\div2$를 정확하게 이용하여 풀었다.



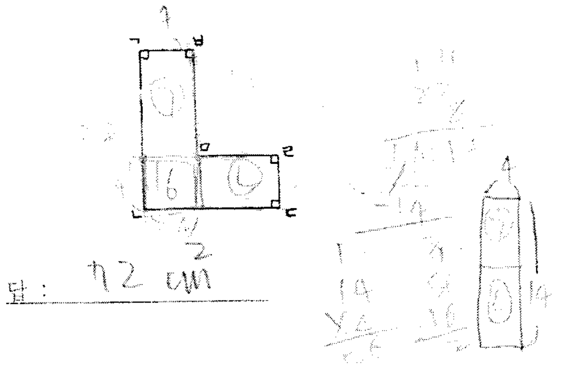
[그림 6] 학생 K의 풀이(R1)

방법 R2는 노몬을 세 개의 직사각형으로 나누고, 그 중 두 개(그림 7의 ㉠과 ㉡)를 하나의 직사각형으로 이어 붙이는 방법이다. [그림 7]은 재구성한 직사각형의 세로 14를 구한 다음, 넓이 56을 구하고 4×4 정사각형의 넓이를 더하였음을 보여준다. 즉

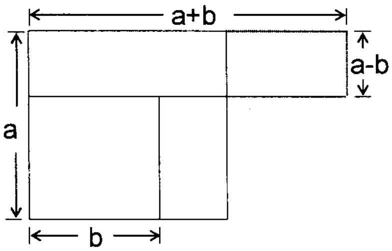
5) 이 경우는 문제에 주어진 수학적 정보와 도형 그림의 독립성을 잘 파악하고 있는 경우라는 해석도 가능하므로, 도형과 표현의 측면에서 좀 더 심도 있는 연구가 필요한 부분이다.

6) 본 연구의 문제에서는 원전과 달리 BE를 그어주지 않았다.

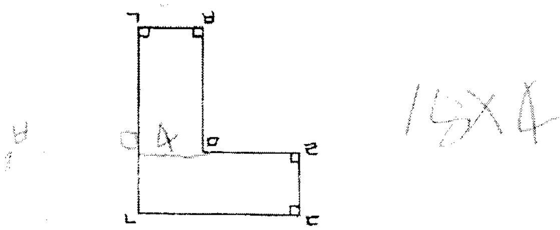
$(14 \times 4) + (4 \times 4)$로 구하였다.



[그림 7] 학생 S의 풀이(R2)



[그림 8] 조상의 방법



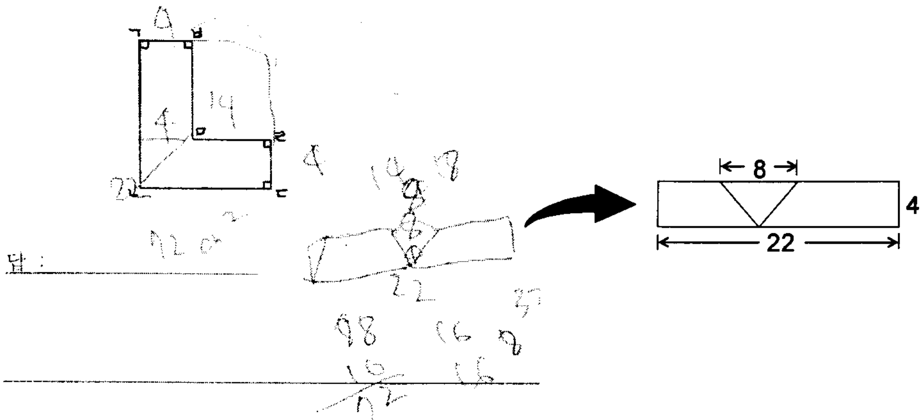
[그림 9] 학생 G의 풀이(R3)

방법 R3 역시 수학사의 문맥에 나오는 아이디어와 일치한다. 중국에서 가장 오래된 천문학책인 <주비산경>에 대해 주해한 <주비산경주>에서 조상(趙爽)은 [그림 8]을 이용하여 대수적 접근이 아니라 기하적 접근을 통해 공식 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$를 알아내고 이용하였다([4], pp.61-65).

학생 G의 풀이 접근은 도형의 재구성 방식 면에서 조상의 아이디어와 매우 유사하다. [그림 9]에서 학생이 그린 보조선을 따라 잘라서 윗부분인 직사각형을 뉘여 아래 직사각형에 이어 붙임으로써 노몬을 새로운 직사각형으로 변형시킨 것이다. 학생이 쓴 식 18×4는$(22-4) \times 4$로 생각한 것이다.

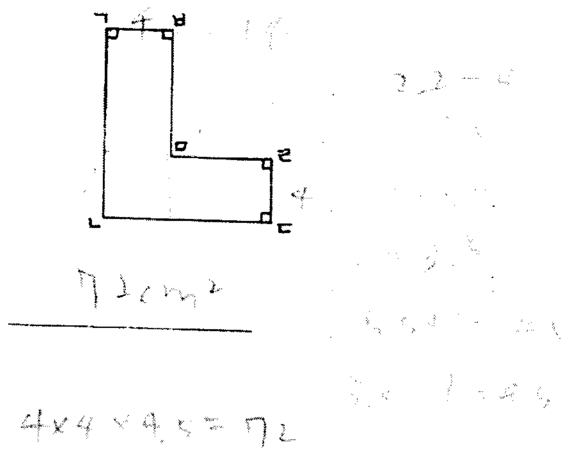
방법 R4는 주어진 도형 노몬을 BE를 따라 두 개의 사다리꼴로 자른 후 외곽을 곧게 폄으로써 삼각형 부분만큼 잘린 직사각형으로 재구성한 것이다(그림 10). 학생의 풀이를 정리하면, $(22 \times 4) - (8 \times 4 \div 2)$로 쓸 수 있다.

방법 R5에 있어서는 처음에 지필 답안지에 대한 분석만으로는 학생이 어떻게 풀었는지 파악하기 어려웠다. 그래서 학생의 풀이에 대한 설명을 듣고자 면담을 요청하였다. 학생의 설명을 통해 그의 풀이는 노몬에 4×4 정사각형이 4.5개 있다(실제로는 4×4 정사각형 네 개와 4×2 직사각형 한 개라는 표현이 정확하다)는 생각에 기초한



[그림 10] 학생 J의 방법(R4)

것임을 알 수 있었다. 내곡 14를 따른 두 개의 분리된 직사각형들 속에 들어있는 4×4 정사각형의 개수를 $14 \div 4 = 3.5$로 계산해내고, 또 하나의 4×4 정사각형이 있으므로 노몬에는 4.5개의 정사각형이 있는 것으로 생각한 것이다. 따라서 $4 \times 4 \times 4.5$로 계산하였다(그림 11).

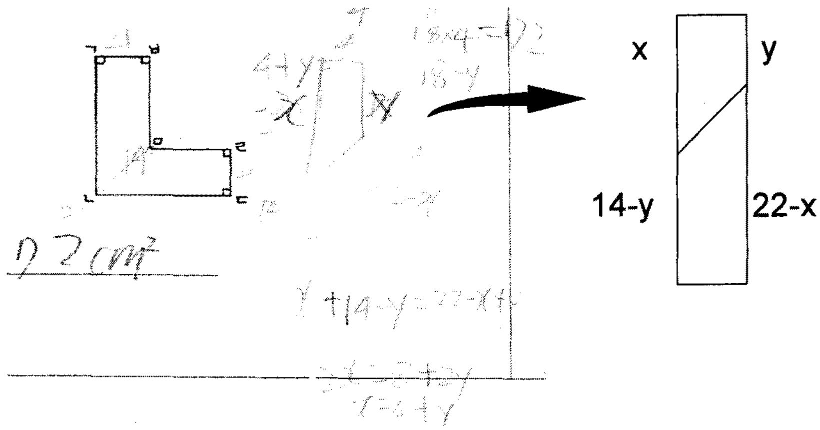


[그림 11] 학생 H의 방법(R5)

방법 R6은 두 변수 x와 y를 이용하였다. 학생들이 보여준 방법 중에는 유일하게 문자를 사용함으로써 대수적 특성을 내재한 해법이다. 보조선 BE을 따라 자른 후, 두 개의 사다리꼴 중 EBCD를 뒤집어 나머지 사다리꼴에 이어 붙이면 [그림 12]에 있는 바와 같은 직사각형을 얻는다. 그림에 표시한 문자식과 길이 관계로부터 다음 방정식을 얻을 수 있다.

$x + (14 - y) = 22 - x + y$

이 식을 간단히 하여 $x=y+4$를 얻고 윗식의 좌변 또는 우변에 대입하여 직사각형의 세로 18을 얻고 가로 4와 곱하여 72를 얻은 것이다.



[그림 12] 학생 L의 방법(R6)

4. 결론 및 논의

84명의 학생들이 보인 풀이 방법을 분석한 결과, 전체 대상의 약 $\frac{1}{4}$에 해당하는 학생이 오답을 말하거나 답하지 못하였고 46%가 수치적 접근을 이용하였다는 사실에도 불구하고, 초등 수학 우수아들이 이용한 해법은 연구자가 예상하지 못한 것을 포함하여 매우 다양함을 보였다. 특히 일부 학생들은 원전 <산학입문>의 해법인 R1이나 조상이 <주비산경 주>에서 사용한 아이디어와 같은 R3를 이용하기도 하였으며, 선행학습의 영향으로 추측되는 대수적인 특성이 함축된 방법을 이용한 학생도 한 명 있었다. 그러한 다양한 접근 방식에 대한 분석을 통해 학생들이 경험한 사고의 여러 측면을 확인할 수 있었다. 기하적 접근보다 산술적 접근에의 친숙함, 시각적 표현에 대한 집착 또는 무관심, 특별한 경우에 의존하여 추론하는 특수화의 사고, 하나 이상의 사례로부터 일반화를 시도, 도형의 시각적 변환(돌리기, 뒤집기 등) 등이다.

이 연구로부터 논의할만한 교수학적 함의점으로 두 가지를 말할 수 있다. 하나는 연구 결과로 얻은 문제해결의 다양성에 근거하여 교실 상황으로의 전이 가능성에 대한 것이다. 본 연구에서는 단지 학생들의 해결 활동 결과 및 분석에 근거하여 접근 방식의 다양성을 탐색하는 데서 그쳤지만, 이는 교실에서의 문제해결 활동으로 이어지는 것이 바람직하다. 활용 가능한 교수학적 활동 중 하나는 Polya의 문제해결 이론 중 반성 단계에서이다. 앞서 보았듯이 Polya의 이론이 '교육'이론임을 말해주는 단계

가 바로 반성 단계이다. 거기에는 풀이 방법이 다양한 문제에 대해 자신이 푼 방법 외의 다른 풀이 방법을 찾는 활동이 포함된다. 본 연구 상황을 교실 상황이라고 가정해보자. 교사가 제시한 한 문제에 대해 운이 좋으면 아홉 가지 풀이 방법이 학생들로부터 도출될 수 있다. 교실 수업은 개인의 풀이 방법을 발표하는 데서 그치지 않는다. 교육과정 고찰에서 보았듯이 자신이 생각한 방법과 다른 방법이 가능함을 인정하고 상호 이해하려고 노력하는 활동 속에서 수학은 답뿐만 아니라 풀이 방법이 유일하다는 잘못된 관념을 제거할 수 있다. 또한 자신이나 친구가 보인 방법의 타당성을 탐색하고 주장하는 활동을 통해 의사소통력 신장의 기회가 될 수 있다. 예컨대 수치적 접근을 한 학생은 그 특수성으로 인해 타당성에 대한 설명을 요구받을 수 있고 특히 방법 R2의 경우에는 시각적 표현과의 불일치에 대한 질문을 받을 수도 있다.

이러한 학생들의 수학적 논쟁은 두 번째 함의점인 문제해결 활동을 장려하기 위한 수학사 원전의 활용 가능성으로 이어진다. 흔히 수학사의 수학교육적 활용의 이점으로 언급되는, 인간 활동으로서의 수학적 친근함이나 역사 속 문제를 다루는 호기심 외에 역사 속 수학자들의 논쟁이 교실에서의 의견 대립 및 조율을 위한 논의의 장으로 이어지기를 기대하는 것이다. 이 연구를 통해 그러한 문제를 재구성하기 위한 학습 자료로서 수학사의 원전에 나오는 흥미로운 문제를 초등학생 수준에 적절하게 수정 제안하는 것은 교육적 가치가 있다고 말할 수 있다. 본 연구의 문제 제시는 완전히 현대적으로 각색된 것이었지만 원전의 그림(그림 2)을 그대로 제시함으로써 당시의 수학 용어, 해법, 접근 방식의 오류 등을 교수 자료로 이용하는 것과 관련하여 후속 연구가 요구된다. 특히 수학 우수아를 위한 문제 개발의 가능성은 영재자료 개발의 측면에서 더욱 열려있다고 할 것이다.

참고문헌

1. 교육부, 초등학교 교육과정. 대한교과서주식회사. 1998.
2. 교육인적자원부, 수학 5-가, 5-나, 6-가, 6-나. 대한교과서주식회사. 2002.
3. 황윤석, 이수신편 제22권 산학입문. 1774. 강신원, 장혜원 역(2006). 교우사.
4. 李儼, 杜石然, *中國數學*. 郭樹理, 倫華祥(역), Clarendon press. 1987.
5. Carpenter, T.P., Learning to add and subtract: an exercise in problem solving. In Silver, A.(Ed), *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. 1985.
6. Department of Education and Employment, *Mathematics: the national curriculum for England*. www.nc.uk.net. 1999.
7. Fauvel, J., Using history in mathematics education. *For the learning of mathematics* 11(2) (1991). pp.3-6

8. Grouws, D.A., The teacher and classroom instruction: neglected themes in problem-solving research. In Silver, A.(Ed), *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives.* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. 1985.
9. Lester, F.K., Methodological considerations in research on mathematical problem-solving instruction. In Silver, A.(Ed), *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives.* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. 1985.
10. Ministère de la Jeunesse, de l'Education nationale et de la Recherche Direction de l'enseignement scolaire, *Mathématiques: cycle des approfondissements.* Centre national de documentation pédagogique. 2002a.
11. Ministère de la Jeunesse, de l'Education nationale et de la Recherche Direction de l'enseignement scolaire, *Mathématiques: cycle des apprentissages fondamentaux.* Centre national de documentation pédagogique. 2002b.
12. NCTM, *Principles and standards for school mathematics.* http://standards.nctm.org. 2000.
13. Törner, G., Schoenfeld, A.H., & Reiss, K.M. (ed), Problem solving around the worlds: summing up the state of the art, *ZDM Mathematics education* 39 (2007).

Diversity of Problem Solving Methods about a Problem of Area from the History of Mathematics by High Achieving Elementary School Students

Dep.of Math. Education, Chinju National University of Education **Hye Won Chang**

This study investigates how high achievers solve a given mathematical problem. The problem, which comes from 'SanHakIbMun', a Korean mathematics book from eighteenth century, is not used in regular courses of study. It requires students to determine the area of a gnomon given four dimensions(4,14,4,22). The subjects are 84 sixth grade elementary school students who, at the recommendation of his/her school principal, participated in the mathematics competition held by J university. The methods used by these students can be classified into two approaches: numerical and decomposing-reconstructing, which are subdivided into three and six methods respectively. Of special note are a method which assumes algebraic feature, and some methods which appear in the history of eastern mathematics. Based on the result, we may observe a great variance in methods used, despite the fact that nearly half of the subject group used the numerical approach.

Key Words : problem solving, history of mathematics, high achieving students, diversity, numerical approach, decomposing-reconstructing approach

2000 Mathematical Subject Classification: 97C30, 97-03, 01A13

접수일 : 2008년 9월 29일 수정일 : 2008년 11월 10일 게재확정일 : 2008년 11월 22일