한국수학사학회지 제21권 제4호(2008년 11월), 87 - 104

피보나치 수열의 일반화에 관한 고찰

제주대학교 수학과 **양영오**
yangyo@cheju.ac.kr
과학영재교육원 **김태호**
thk5594@naver.com

본 연구에서는 유명한 피보나치 수열을 일반화하는 $g-$피보나치 수열 $\{g_n\}=\{a,\ b,\ a+b,\ a+2b,\ 2a+3b,\ 3a+5b,\ \cdots\}$의 여러 가지 성질과 특성을 조사한다. 특히, $g-$피보나치 수열의 합에 관한 항등식과 제 n항 g_n(비네의 공식의 일반화)을 구체적으로 구한다. 또한 피보나치 수열에 관한 카타란의 항등식의 일반화된 항등식과 A. Tagiuri의 항등식을 구하고 g_n과 파스칼 삼각형과의 관계식과 $g-$피보나치 수 g_n이 얼마나 빨리 커지는가를 조사한다. 아울러 $g-$피보나치 수열의 초항과 둘째 항이 서로 소일 때 연속하는 두 항은 서로 소이며, 연속하는 두 항의 비율 $\{\frac{g_{n+1}}{g_n}\}$은 황금비 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$로 수렴함을 밝히고자 한다.

주제어 : 피보나치 수열, $g-$피보나치 수열, 비네의 공식, 심슨의 항등식, 카타란의 항등식, 황금비

I. 서론

수학에서는 가장 간단하고 단순하면서도 심오한 이론을 가진 문제가 가장 좋은 문제이며 수학의 아름다움을 추구하는 대상이 된다. 중세의 수학에서 일상생활의 간단한 문제 중의 하나인 토끼번식 문제에서 파생된 피보나치 수열이 그 대표적인 예이다. 그럼에도 불구하고 현재 우리 나라에는 피보나치 수열과 관련된 연구자료가 그리 많지 않다. 또한 고등학교 수학 교과서에서 사고력과 문제 해결 능력을 신장시키기 위하여 피보나치 수열이 연구과제 또는 수학산책 난에 단편적으로 소개되고 있는 실정이다.

피보나치수열의 개념은 1202년에 간행된 피보나치(Leonardo Fibonacci, 1170 피사

(?)~1240 이후)의 유명한 저서 〈산반서(算盤書, Liber abaci)〉 에 나오는 다음과 같은 간단한 토끼쌍의 번식 문제에서 파생되었으며, '피보나치 수열'이란 용어는 19세기 프랑스 수학자 에두아르뤼카가 처음으로 사용했다.

"새로 태어난 암수 한 쌍의 토끼가 들판에 있다고 하자. 토끼들은 태어나서 1개월만 지나면 성장해서 어미가 되고, 그후 매월 암수 한 쌍의 새끼를 낳는다. 이 새끼도 2개월이 되면 마찬가지로 매월 암수 한 쌍의 새끼를 낳는다고 가정한다(단, 질병 등으로 절대 죽는 일은 없다고 가정하자). 지금부터 일년 후 한 쌍의 토끼로부터 토끼는 몇 쌍이 되는가?"

위의 문제로부터 수열 1, 1, 2, 3, 5, 8, ⋯, $x, y, x+y, \cdots$를 얻을 수 있다. 이 수열은 유럽에 알려진 최초의 점화수열로서 각 항은 앞선 두 항들의 합이다. 또한 피보나치 수열은 하나의 수열로서 아름답고 독특한 많은 성질들을 가지고 있다. 특히, 대표적인 성질의 예로 연속하는 두 항은 서로 소이고, 연속하는 항의 비율은 황금비로 수렴하며, 황금비는 아름다움(美)의 표현 대상이며, 문화예술 분야의 역사적 발전에 커다란 영향을 주고 밀접하게 관련이 있었다고 본다. 이 수열의 일반항 F_n은 이차방정식 $t^2-t+1=0$의 두 근 α, β을 이용하여 다음과 같은 거듭제곱 차로 표현할 수 있다.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) \quad 단,\ \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

또한 피보나치 수열의 제1항부터 제n항까지의 제곱의 합은 제n항과 제(n+1)항의 곱 F_nF_{n+1}과 같으며 이 성질을 이용하여 등각나선을 작도할 수 있다. 아울러 모든 자연수는 서로 다른 피보나치 수들의 합으로 쓸 수 있다. 그리고 이 수열은 자연현상(꽃잎・가지의 수와 배열, 솔방울, 꽃씨의 배열, 잎차례, 수벌의 가계도, 조개의 나선형, 벌의 이동, 빛의 반사 등)이나 건축(파르테논 신전, 이집트의 피라미드 등의 건축), 예술(레오나르도 다빈치의 그림, 미켈란제로의 조각 등), 음악(피아노 건반), 증권시장(주가의 변동 그래프), 일상생활(벽돌쌓기, 계단 오르기, 일렬로 의자에 앉기, 동전 교환 등) 등의 많은 분야에서 응용되고 있음을 잘 알고 있다.

음이 아닌 정수 a, b에 대하여 수열

$$a,\ b,\ a+b,\ a+2b,\ 2a+3b,\ 3a+5b,\ 5a+8b,\ \cdots$$

즉,

$$g_1=a,\ \ g_2=b,\quad g_n=g_{n-1}+g_{n-2}\quad (n\geq 3)$$

을 $g-$피보나치 수열 또는 일반화된 피보나치 수열(generalized Fibonacci sequence)이라고 하자. 예를 들어, $a=b=1$일 때 위 수열 $\{g_n\}$은 유명한 피보나치수열 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ⋯이 된다. 또한 $a=2, b=3$일 때 위 수열은 2, 3, 5, 8, ⋯이 된다. $a=2, b=1$일 때 위 수열은 2, 1, 3, 4, 7, 11, ⋯ 즉,

$$L_1 = 2,\ L_2 = 1,\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

이 되며, 이 수열은 루카스 수열(Lucas sequence)이라 한다.

본 연구의 목적은 유명한 피보나치 수열을 일반화하는 $g-$피보나치 수열을 중심으로 피보나치 수열에서 성립하는 여러 가지 성질과 특성을 일반화하는 데 있다. 특히, $g-$피보나치 수열의 합에 관한 항등식과 제 n항 g_n을 구체적으로 구한다. 이 식은 비네의 공식이라 불리는 피보나치 수열의 제 n항 F_n의 일반식이다. 그리고 피보나치 수열에 관한 카타란의 항등식의 일반화된 항등식과 A. Tagiuri의 항등식 등을 구하고 g_n과 파스칼 삼각형과의 관계식과 $g-$피보나치 수 g_n이 얼마나 빨리 커지는가를 조사한다. 아울러 $g-$피보나치 수열의 초항과 둘째 항이 서로 소일 때 연속하는 두 항은 서로 소이며, 연속하는 항의 비율은 황금비로 수렴함을 밝히고자 한다.

Ⅱ. $g-$피보나치 수열의 특성

1. 합에 관한 항등식

$g-$피보나치 수열의 점화식 $g_1 = a,\ g_2 = b,\ g_n = g_{n-1} + g_{n-2} \quad (n \geq 3)$을 이용하거나 변형하여 다음 결과를 쉽게 얻을 수 있다.

【정리 1】 (1) $g-$피보나치 수열의 제1항부터 제n항까지의 합은 제$(n+2)$항에서 b를 뺀 값과 같다. 즉, 피보나치 수의 처음 n항의 합을 계산하면 다음과 같다.

$$g_1 + g_2 + \cdots + g_n = g_{n+2} - b$$

(2) $g-$피보나치 수열의 제1항부터 제$(2n-1)$항까지의 홀수 번째 항 n개의 합은 바로 그 다음 항인 제$2n$항과 $a-b$의 합과 같다. 즉, 홀수의 첨수를 갖는 피보나치 수들의 합은

$$g_1 + g_3 + g_5 + \cdots + g_{2n-1} = g_{2n} + a - b$$

이다.

(3) $g-$피보나치 수열의 제2항부터 제$2n$항까지의 짝수 번째 항 n개의 합은 바로 그 다음 항인 제$(2n+1)$항에서 a를 뺀 값과 같다. 즉, 짝수의 첨수를 갖는 피보나치 수들의 합은

$$g_2 + g_4 + g_6 + \cdots + g_{2n} = g_{2n+1} - a$$

이다.

(4) (교대부호를 가지는 $g-$피보나치 수들의 합)

$$g_1-g_2+g_3-g_4+\cdots+(-1)^{n+1}g_n=(-1)^{n+1}g_{n-1}+(2a-b)$$

(5) $g-$피보나치 수열의 제1항부터 제n항까지의 제곱의 합은 제n항과 제$(n+1)$항의 곱에 a^2-ab를 더한 값과 같다. 즉,

$$g_1^2+g_2^2+\cdots+g_n^2=g_ng_{n+1}+a^2-ab$$

(6) 임의의 자연수 $n\geq 3$에 대하여

$$g_n^2+3g_{n-1}^2+2(g_{n-2}^2+g_{n-1}^2+\cdots+g_2^2+g_1^2)=g_{n+1}^2+2(a^2-ab)$$

【정리 2】 (1) **(심슨의 항등식 일반화)** 임의의 자연수 $n\geq 2$에 대하여

$$g_{n+1}g_{n-1}-g_n^{\ 2}=(-1)^n(a^2+ab-b^2)$$

즉,

$$g_n^{\ 2}=g_{n+1}g_{n-1}+(-1)^{n+1}(a^2+ab-b^2)$$

(2) 임의의 자연수 $n\geq 3$에 대하여

$$g_{n-2}g_{n+2}-g_n^2=(-1)^{n+1}(a^2+ab-b^2)$$

즉, $g_n^2=g_{n+2}g_{n-2}+(-1)^n(a^2+ab-b^2)$

(3) 임의의 자연수 $n\geq 3$에 대하여

$$g_{n-1}g_{n+1}-g_{n-2}g_{n+2}=2(-1)^n(a^2+ab-b^2)$$

【증명】 (1) $n=2$일 때는 위 식은 명백하다. $n=k$일 때 위의 식이 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned}(-1)^k(a^2+ab-b^2) &= g_{k-1}g_{k+1}-g_k^2\\ &= g_{k+1}(g_{k-1}+g_k)-g_k(g_k+g_{k+1})\\ &= g_{k+1}g_{k+1}-g_kg_{k+2}\\ &= -(g_kg_{k+2}-g_{k+1}^2)\end{aligned}$$

즉,

$$(-1)^{k+1}(a^2+ab-b^2)=g_kg_{k+2}-g_{k+1}^{\ \ 2}$$

따라서 주어진 등식은 $n=k+1$에 대하여도 성립하므로 수학적 귀납법에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

(2) 위의 (1)에 의하여

$$g_{n-2}g_{n+2}-g_n^2=g_{n-2}(g_{n+1}+g_n)-g_n(g_{n-2}+g_{n-1})$$

$$
\begin{aligned}
&= g_{n-2}g_{n+1} - g_n g_{n-1} \\
&= g_{n-2}(g_{n-1}+g_n) - (g_{n-2}+g_{n-1})g_{n-1} \\
&= g_{n-2}g_n - g_{n-1}^2 \\
&= g_{n-2}g_n + g_{n-1}g_n - g_{n-1}g_n - g_{n-1}^2 \\
&= g_n(g_{n-1}+g_{n-2}) - g_{n-1}(g_n+g_{n-1}) \\
&= g_n^2 - g_{n-1}g_{n+1} = (-1)^{n+1}(a^2+ab-b^2)
\end{aligned}
$$

따라서 주어진 등식이 증명된다.

(3) 위의 (1)에서 위 식 (2)을 빼면 $g_{n-1}g_{n+1} - g_{n-2}g_{n+2} = 2(-1)^n(a^2+ab-b^2)$ 을 얻을 수 있다. ■

위의 두 성질

$$g_{n+1}g_{n-1} - g_n^2 = (-1)^n(a^2+ab-b^2)$$

$$g_{n-2}g_{n+2} - g_n^2 = (-1)^{n-1}(a^2+ab-b^2)$$

에서 변변 더해주면 다음 성질을 얻을 수 있다.

$$g_{n-1}g_{n+1} + g_{n-2}g_{n+2} = 2g_n^2$$

위의 두 정리에서 $a=b=1$일 때 피보나치 수열의 성질을 다음과 같이 얻을 수 있다.

【따름정리 3】

(1) $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$

(2) $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$

(3) $F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$

(4) $F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \cdots + (-1)^{n+1}F_n = (-1)^{n+1}F_{n-1} + 1$

(5) $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$

(6) $F_n^2 + 3F_{n-1}^2 + 2(F_{n-2}^2 + F_{n-1}^2 + \cdots + F_2^2 + F_1^2) = F_{n+1}^2$

(7) **(심슨의 항등식)** 임의의 자연수 $n \ge 2$에 대하여

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

(8) 임의의 자연수 $n \ge 3$에 대하여

$$F_{n-2}F_{n+2}-F_n^2=(-1)^{n+1}$$

(9) 임의의 자연수 $n\geq 3$에 대하여

$$F_{n-1}F_{n+1}-F_{n-2}F_{n+2}=2(-1)^n$$

2. 일반항 구하기

1) 피보나치 수열의 일반항을 이용하기

$g-$피보나치 수열 $a,\ b,\ a+b,\ a+2b,\ 2a+3b,\ 3a+5b,\ \cdots$ 즉,

$$g_1=a,\ g_2=b,\quad g_n=g_{n-1}+g_{n-2}\quad (n\geq 3)$$

의 제 n항 g_n을 피보나치 수열 $\{F_n\}$의 항을 이용하여 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$g_1=a,\ g_2=b,\ g_3=a+b=F_a a+F_2 b,\ g_4=a+2b=F_2 a+F_3 b,$$

$$g_5=2a+3b=F_3 a+F_4 b,\ g_6=3a+5b=F_4 a+F_5 b,\ \cdots$$

일반적으로 $F_0=F_2-F_1=0$, $F_{-1}=F_1-F_0=1$로 정의하면 수학적 귀납법에 의하여 $g-$피보나치 수열의 일반항 g_n을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$g_{n+1}=F_{n-1}a+F_n b\quad (n=0,1,2,3,\cdots)$$

또는

$$g_n=F_{n-2}a+F_{n-1}b\quad (n=1,2,3,\cdots).$$

$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$로 두면 피보나치 수열의 제 n항 F_n은

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]\qquad (n\geq 1)$$

로 주어진다. 이것은 프랑스 수학자 비네(Jacques Philippe Marie Binet, 1786 - 1856)가 1843년에 발견한 공식으로 비네의 공식이라 한다.[1] 이 비네의 공식을 $g_{n+1}=F_{n-1}a+F_n b$에 대입하면 $\alpha\beta=-1$이므로 다음과 같이 $g-$피보나치 수열의 일반항 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} g_{n+1}&=F_{n-1}a+F_n b=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})a+\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)b \\ &=\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^{n-1}(a+\alpha b)-\frac{1}{\sqrt{5}}\beta^{n-1}(a+\beta b) \end{aligned}$$

1) 반면 슈뢰더(Schroeder, 1984)는 이 공식을 1718년에 드 므와브르(A. De Moivre)가 이미 발견하였으며, 그로부터 10년 후 베르누이(Nicolas Bernoulli)가 증명했다고 단언하고 있다.

또는

$$g_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n(b-\beta a)-\frac{1}{\sqrt{5}}\beta^n(b-\alpha a)\quad (n=0,1,2,3,\cdots)$$

$c=a+\alpha b,\ d=a+\beta b,\ \ l=b-\beta a,\ m=b-\alpha a$로 두면 $\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$이므로

$$cd=a^2+(\alpha+\beta)ab+\alpha\beta b^2=a^2+ab-b^2$$

$$lm=(b-\beta a)(b-\alpha a)=b^2-(\alpha+\beta)ab+\alpha\beta a^2=b^2-ab-a^2$$

이다. g_n을 간략하게 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$g_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\{\alpha^{n-2}(a+\alpha b)-\beta^{n-2}(a+\beta b)\}=\frac{1}{\sqrt{5}}\{\alpha^{n-2}c-\beta^{n-2}d\}$$

또는

$$g_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\{\alpha^{n-1}(b-\beta a)-\beta^{n-1}(b-\alpha a)\}=\frac{1}{\sqrt{5}}\{\alpha^{n-1}l-\beta^{n-1}m\}$$

【정리 4】 $g-$피보나치수열의 일반항은 다음과 같다.

$$g_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\{\alpha^{n-1}(b-\beta a)-\beta^{n-1}(b-\alpha a)\}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

또는

$$g_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\{\alpha^{n-2}(a+\alpha b)-\beta^{n-2}(a+\beta b)\}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

2) 일반항 직접 구하기

$g-$피보나치 수열의 점화식 $g_{n+1}=g_{n-1}+g_n$에서 $t^2=1+t$로 두면, 이 방정식의 두 근은 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$이고 $\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$이다.

$g_{n+1}=g_{n-1}+(\alpha+\beta)g_n$이므로

$$g_{n+1}-\alpha g_n=\beta g_n+g_{n-1}\quad 즉,\quad g_{n+1}-\alpha g_n=\beta(g_n-\alpha g_{n-1})$$

이 된다. 따라서 수열 $\{g_{n+1}-\alpha g_n\}$은 초항이 $g_2-\alpha g_1$이고 공비가 β인 등비수열이므로

$$g_{n+1}-\alpha g_n=(g_2-\alpha g_1)\beta^{n-1}$$

그런데 $g_1=a,\ g_2=b$이고 $g_2-\alpha g_1=b-\alpha g_1=b-\alpha a$이므로

$$g_{n+1}-\alpha g_n=(b-\alpha a)\beta^{n-1}\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad ①$$

또한 $g_{n+1}=g_{n-1}+g_n=g_{n-1}+(\beta+\alpha)g_n$이므로

$$g_{n+1}-\beta g_n=\alpha(g_n-\beta g_{n-1})$$

이 된다. 마찬가지 방법에 의하여 $g_{n+1}-\beta g_n=(g_2-\beta g_1)\alpha^{n-1}$ 즉,

$$g_{n+1}-\beta g_n=(b-\beta a)\alpha^{n-1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad ②$$

②-①하면

$$(\alpha-\beta)g_n=\alpha^{n-1}(b-\beta a)-\beta^{n-1}(b-\alpha a)$$

$\alpha-\beta=\sqrt{5}$이므로 $g-$피보나치 수열의 일반항은 다음과 같다.

$$g_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\alpha^{n-1}(b-\beta a)-\beta^{n-1}(b-\alpha a)\right] \quad (n=1,2,3,\cdots) \quad \cdots\cdots \quad ③$$

3) 특성방정식에 의한 일반항 구하기

$g-$피보나치 수열의 특성방정식은 $r^2-r-1=0$이므로 서로 다른 실근

$$r_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\alpha, \quad r_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\beta$$

를 갖는다. 그러므로 $g-$피보나치 수열의 일반항은

$$g_n=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}=c_1\alpha^{n-1}+c_2\beta^{n-1}$$

이고 초기값 $g_1=a, g_2=b$를 이용하면 다음과 같은 연립방정식을 구할 수 있다.

$$a=c_1+c_2, \quad b=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)c_1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)c_2=\alpha c_1+\beta c_2$$

이 연립방정식을 풀면 $c_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(b-\beta a)$, $c_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}(b-\alpha a)$이다. 따라서

$$g_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}(b-\beta a)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}(b-\alpha a)\right]$$

또는

$$g_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\alpha^{n-1}(b-\beta a)-\beta^{n-1}(b-\alpha a)\right] \quad \cdots\cdots\cdots \quad ④$$

특히, $a=b=1$일 때 $\alpha+\beta=1$이므로

$$g_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^{n-1}(1-\beta)-\frac{1}{\sqrt{5}}\beta^{n-1}(1-\alpha)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n} - \beta^{n}) = F_{n}$$

와 같이 피보나치 수열의 제 n항 F_n을 얻을 수 있다.

또한 $a=2,\ b=1$일 때 $1-2\beta=\sqrt{5},\quad 1-2\alpha=-\sqrt{5}$이므로 모든 자연수 $n=1,2,3,\cdots$에 대하여

$$g_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[\alpha^{n-1}(1-2\beta)-\beta^{n-1}(1-2\alpha)] = \alpha^{n-1}+\beta^{n-1}$$

와 같이 루카스 수열의 제 n항 $L_n=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}$을 얻을 수 있다.

다음 성질은 카타란(Catalan)이 1886년에 증명한 피보나치 수열에 관한 카타란의 항등식과 심슨의 항등식을 일반화한 항등식이다.

【정리 5】 (**카타란의 항등식의 일반화**) 임의의 자연수 r, n $(r\leq n)$에 대하여

$$g_{n-r}g_{n+r} - g_n^2 = (-1)^{n-r-1}(a^2+ab-b^2)F_r^2 \qquad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

【증명】 $a+\alpha b=c,\ a+\beta b=d$로 두면 $\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$이므로

$$cd = a^2+(\alpha+\beta)ab+\alpha\beta b^2 = a^2+ab-b^2$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}
g_{n-r}g_{n+r} - g_n^2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}[\alpha^{n-r-2}c-\beta^{n-r-2}d]\frac{1}{\sqrt{5}}[\alpha^{n+r-2}c-\beta^{n+r-2}d] \\
&\quad -\frac{1}{5}[\alpha^{n-2}c-\beta^{n-2}d]^2 \\
&= \frac{1}{5}[\alpha^{2n-4}c^2-\alpha^{n-r-2}\beta^{n+r-2}cd-\alpha^{n+r-2}\beta^{n-r-2}cd+\beta^{2n-4}d^2] \\
&\quad -\frac{1}{5}[\alpha^{2n-4}c^2-2\alpha^{n-2}\beta^{n-2}cd+\beta^{2n-4}d^2] \\
&= \frac{1}{5}[-\alpha^{n-r-2}\beta^{n+r-2}cd-\alpha^{n+r-2}\beta^{n-r-2}cd+2\alpha^{n-2}\beta^{n-2}cd] \\
&= \frac{1}{5}[(-1)^{n-r-1}(\alpha^{2r}+\beta^{2r})+2(-1)^{n-2}]cd \\
\\
&= \frac{1}{5}cd[(-1)^{n-r-1}\{(\alpha^{r}-\beta^{r})^2+2\alpha^{r}\beta^{r}\}+2(-1)^{n}] \\
&= \frac{1}{5}cd[(-1)^{n-r-1}5F_r^2+2(-1)^{n-1}+2(-1)^{n}] \\
&= \frac{1}{5}cd[(-1)^{n-r-1}5F_r^2] = (-1)^{n-r-1}F_r^2 cd \\
&= (-1)^{n-r-1}(a^2+ab-b^2)F_r^2
\end{aligned}$$

■

위 성질에서 n 대신 $n+r$로 대입하면 카타란의 항등식의 일반화와 동일한 항등식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$g_n g_{n+2r} - g_{n+r}^2 = (-1)^{n-1}(a^2+ab-b^2)F_r^2 \qquad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

또는

$$g_n g_{n+2r} + (-1)^n(a^2+ab-b^2)F_r^2 = g_{n+r}^2 \qquad \cdots\cdots\cdots ⑦$$

【따름정리 6】 (1) **(피보나치 수열에 관한 카타란의 항등식)** 임의의 자연수 r, n $(r \le n)$에 대하여

$$F_{n-r}F_{n+r} - F_n^2 = (-1)^{n-r-1}F_r^2 \qquad \cdots\cdots\cdots ⑧$$

또는

$$F_{n-r}F_{n+r} + (-1)^{n-r}F_r^2 = F_n^2$$

또는

$$F_nF_{n+2r} + (-1)^nF_r^2 = F_{n+r}^2 \qquad \cdots\cdots\cdots ⑨$$

(2) 임의의 자연수 r, n $(r+1 \le n)$에 대하여

$$F_{n-r-1}F_{n+r+1} + (-1)^{n-r-1}F_{r+1}^2 = F_n^2$$

(3) 임의의 자연수 r, n $(r+1 \le n)$에 대하여

$$F_{n-r}F_{n+r} + F_{n-r-1}F_{n+r+1} + (-1)^{n-r-1}F_{r+2}F_{r-1} = 2F_n^2$$

(4) 임의의 자연수 $n \ge 2$에 대하여

$$F_{n-1}F_{n+1} + F_nF_{n+1} = 2F_n^2$$

【증명】 (1) 위의 성질 5에서 $a=b=1$일 때 $g_n = F_n$이므로 위의 피보나치 수열에 관한 카타란의 항등식을 얻을 수 있다.
(2) 위 항등식 (1)에서 r 대신 $r+1$로 치환하면 주어진 항등식을 얻을 수 있다.
(3) 항등식 (1)과 항등식 (2)을 더하면

$$\begin{aligned}(-1)^{n-r}F_r^2 + (-1)^{n-r-1}F_{r+1}^2 &= (-1)^{n-r-1}[F_{r+1}^2 - F_r^2] \\ &= (-1)^{n-r-1}(F_{r+1}+F_r)(F_{r+1}-F_r) \\ &= (-1)^{n-r-1}F_{r+2}F_{r-1}\end{aligned}$$

이므로 주어진 항등식을 얻을 수 있다.
(4) 위 항등식 (3)에서 $r=1$로 놓으면 주어진 항등식을 얻을 수 있다. ■

위 성질 5의 증명과 같은 방법에 의하여 다음 항등식을 얻을 수 있다.

【정리 7】 **(카타란의 항등식의 일반화)** 음이 아닌 임의의 정수 n, r, s에 대하여

$$g_n g_{n+r+s} - g_{n+r} g_{n+s} = (-1)^{n+1}(a^2+ab-b^2)F_r F_s \quad \cdots\cdots\cdots ⑩$$

여기서 일반성을 잃지 않고 $r<s$를 가정할 수 있다.

사실 $r=s$일 때 항등식 ⑩은 카타란의 항등식의 일반화 ⑥이 된다. 위의 성질에서 $a=b=1$일 때 $g_n=F_n$이므로 영이 아닌 임의의 정수 n, r, s에 대하여 피보나치 수열에 관한 카타란의 항등식의 일반화

$$F_n F_{n+r+s} - F_{n+r} F_{n+s} = (-1)^{n+1} F_r F_s \quad \cdots\cdots\cdots ⑩$$

을 얻을 수 있다. 즉, 항등식 ⑩은 카타란의 항등식을 한다. 이 항등식은 D. Everman, A. E. Danese, K. Venkannayah에 의하여 공식화되었다.

또한 $a=2, b=1$일 때 $g_n=L_n$이므로 항등식 ⑩은

$$L_n L_{n+r+s} - L_{n+r} L_{n+s} = (-1)^{n+1} 5F_r F_s \quad \cdots\cdots\cdots ⑪$$

이 된다.

위의 성질 7에서 $r=s$, $m=n+r$로 놓으면 다음 성질 8의 각 항등식 (1), (2)을 얻을 수 있다.

【정리 8】 (1) $g_n g_{n+2r} - g_{n+r}^2 = (-1)^{n+1}(a^2+ab-b^2)F_r^2$

(2) $g_{m-r} g_{m+r} - g_m^2 = (-1)^{m-r+1}(a^2+ab-b^2)F_r^2$

또는

$$g_m^2 - g_{m-r} g_{m+r} = (-1)^{m-r}(a^2+ab-b^2)F_r^2$$

【정리 9】 (**A. Tagiuri의 항등식**) 음이 아닌 임의의 정수 k, m, t에 대하여

$$g_m g_t - g_{m-k} g_{t+k} = (-1)^{m-k}(a^2+ab-b^2)F_k F_{k+t-m} \quad \cdots\cdots\cdots ⑩$$

【증명】 $a+\alpha b=c,\ a+\beta b=d$로 두면 $g_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\{\alpha^{n-2}c-\beta^{n-2}d\}$이므로

$$g_m g_t = \frac{1}{5}[\alpha^{m+t-4}c^2 - (\alpha^{m-2}\beta^{t-2} + \alpha^{t-2}\beta^{m-2})cd + \beta^{m+t-4}d^2]$$

$$g_{m-k} g_{t+k} = \frac{1}{5}[\alpha^{m+t-4}c^2 - (\alpha^{m-k-2}\beta^{t+k-2} + \alpha^{t+k-2}\beta^{m-k-2})cd + \beta^{m+t-4}d^2]$$

이다.

$$\alpha^{m-k-2}\beta^{t+k-2} - \alpha^{m-2}\beta^{t-2} = \alpha^{m-k-2}\beta^{t-2}(\beta^k - \alpha^k),$$

$$\alpha^{t-2}\beta^{m-2} - \alpha^{t+k-2}\beta^{m-k-2} = \alpha^{t-2}\beta^{m-k-2}(\beta^k - \alpha^k)$$

이므로

$$g_m g_t - g_{m-k} g_{t+k} = \frac{1}{5} cd(\beta^k - \alpha^k)[\alpha^{m-k-2}\beta^{t-2} - \alpha^{t-2}\beta^{m-k-2}]$$

이다. $\alpha\beta = -1$이므로

$$\begin{aligned}\alpha^{m-k-2}\beta^{t-2} - \alpha^{t-2}\beta^{m-k-2} &= (\alpha\beta)^{m-k-2}(\beta^{k+t-m} - \alpha^{k+t-m}) \\ &= (-1)^{m-k-2}(\beta^{k+t-m} - \alpha^{k+t-m}) \\ &= (-1)^{m-k-1}\sqrt{5}F_{k+t-m}\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}g_m g_t - g_{m-k} g_{t+k} &= \frac{1}{5} cd(\beta^k - \alpha^k)(-1)^{m-k-1}\sqrt{5}F_{k+t-m} \\ &= (-1)^{m-k} cdF_k F_{k+t-m}\end{aligned}$$

이므로 주어진 항등식이 성립한다. ■

n개의 서로 다른 대상물에서 r개를 택할 수 있는 방법의 수를 n개의 대상물에서 r개를 선택하는 조합의 수라 하고 ${}_nC_r$ 또는 $\binom{n}{r}$로 나타내고

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

로 계산할 수 있다. 위 공식으로부터 ${}_kC_i + {}_kC_{i+1} = {}_{k+1}C_{i+1}$을 얻을 수 있다.

【정리 10】 임의의 자연수 n에 대하여 다음이 성립한다.

$$g_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{r} g_{r+1}$$

【증명】 $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$은 이차방정식 $x^2 - x - 1 = 0$의 두 근일 때

$$g_{r+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}[\alpha^r(b - \beta a) - \beta^r(b - \alpha a)] \quad (r \geq 1)$$

이고, $\alpha^2 = \alpha + 1$, $\beta^2 = \beta + 1$이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}g_{2n+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}[\alpha^{2n}(b - \beta a) - \beta^{2n}(b - \alpha a)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\{(\alpha+1)^n(b - \beta a) - (\beta+1)^n(b - \alpha a)\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\alpha^r(b - \beta a) - \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\beta^r(b - \alpha a)\right\} \\ &= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{1}{\sqrt{5}}[\alpha^r(b - \beta a) - \beta^r(b - \alpha a)] \\ &= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} g_{r+1}\end{aligned}$$

■

3. 황금비와의 관계

【정리 11】 $a_n = \dfrac{g_{n+1}}{g_n}$ 이면 다음 결과를 얻을 수 있다.

(1) 만약 $a \le b$이면 모든 자연수 $n \ge 2$에 대하여 $1 \le a_n \le 2$이다.

(2) 수열 $\{a_n\}$은 황금비 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$에 수렴한다. 즉, $g-$피보나치 수열에서 이웃하는 항 g_n, g_{n+1}의 비 g_{n+1}/g_n의 극한은 황금비

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{g_{n+1}}{g_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

이다.

(3) 임의의 자연수 $k > 1$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g_{n+k}}{g_n} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k = \alpha^k$$

이다.

【증명】 (1) $a_n = \dfrac{g_{n+1}}{g_n} = 1 + \dfrac{1}{a_{n-1}}$ 이고 모든 n에 대하여 $g_{n+1} \ge g_n$이므로 $a_n \ge 1$이다. 또한 $2 - a_{n+1} = 2 - (1 + \dfrac{1}{a_n}) = 1 - \dfrac{1}{a_n} \ge 0$ $(n \ge 1)$이므로 모든 자연수 $n \ge 2$에 대하여 $a_n \le 2$이다. 따라서 모든 자연수 $n \ge 2$에 대하여 $1 \le a_n \le 2$ 이다.

(2) $g-$피보나치 수열의 일반항 공식은

$$g_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[\alpha^{n-1}(b-\beta a) - \beta^{n-1}(b-\alpha a)] \quad 단,\ \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

로 주어짐을 알 수 있다. 또한 $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right| < 1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n = 0$이다. 따라서

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} \frac{g_{n+1}}{g_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(b-\beta a) - \beta^n(b-\alpha a)}{\alpha^{n-1}(b-\beta a) - \beta^{n-1}(b-\alpha a)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha(b-\beta a) - \beta(b-\alpha a)\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}}{(b-\beta a) - (b-\alpha a)\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}} \\
&= \frac{\alpha(b-\alpha a) - \beta(b-\alpha a)\cdot 0}{(b-\alpha a) - 0} = \alpha
\end{aligned}$$

(3) $g-$피보나치 수열의 일반항 공식과 위 (2)의 증명과 같은 방법에 의하여

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{g_{n+k}}{g_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+k-1}(b-\beta a)-\beta^{n+k-1}(b-\alpha a)}{\alpha^{n-1}(b-\beta a)-\beta^{n-1}(b-\alpha a)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^k(b-\beta a)-\beta^k(b-\alpha a)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}}{(b-\beta a)-(b-\alpha a)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}} \quad (\because \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|<1) \\ &= \frac{\alpha^k(b-\beta a)-\beta^k(b-\alpha a)\cdot 0}{(b-\beta a)-0}=\alpha^k\end{aligned}$$

■

"첨수가 증가함에 따라 피보나치 수는 얼마나 빨리 커지는가"라는 질문을 제기하는 것은 당연하다. 비네의 공식을 이용하여 다음 정리는 이 질문에 대해서도 충분하게 완벽한 해답을 제시하고 있다.

【정리 12】 $g-$피보나치 수 g_n은 초항이 $\frac{b-\beta a}{\sqrt{5}}$, 공비가 α인 등비수열의 제 n 항 a_n과 가장 가까운 정수이다.

【증명】 $g-$피보나치 수 g_n과 a_n의 차의 절대값 $|g_n-a_n|$이 항상 $\frac{1}{2}$보다 작다는 것을 증명하면 충분하다. 그런데

$$\begin{aligned}|g_n-a_n| &= \left|\frac{1}{\sqrt{5}}[(b-\beta a)\alpha^{n-1}-(b-\alpha a)\beta^{n-1}]-(b-\beta a)\frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{5}}\right| \\ &= |b-\alpha a|\frac{|\beta|^{n-1}}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

이고, $\beta=-0.618\cdots$이므로 $|\beta|<1$이다. 따라서 임의의 자연수 n에 대하여 $|\beta|^{n-1}<1$이고, 또한 $\sqrt{5}>2$이므로 $\frac{|\beta|^{n-1}}{\sqrt{5}}<\frac{1}{2}$이다. 그러므로 정리의 증명은 끝난다. ■

극한에 관한 이론으로부터 이 정리의 증명을

$$\lim_{n\to\infty}|g_n-a_n|=0$$

으로 바꾸어 증명할 수 있을 것이다.

【정리 13】 (1) $a, b\in \mathrm{N}$일 때 모든 자연수 $n\ge 5$에 대하여

$$g_n>\alpha^{n-4}a+\alpha^{n-3}b=\alpha^{n-4}(a+\alpha b)$$

(2) 모든 자연수 $n\ge 4$에 대하여 $g_n<\alpha^{n-3}(a+\alpha b)$

【증명】 (1) $n=5$일 때 좌변은 $g_5=2a+3b$이고 우변은 $\alpha a+\alpha^2 b$이다.

$$2>\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\alpha,\ 3>\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\alpha^2,\ 2a+3b>\alpha a+\alpha^2 b$$

이므로 주어진 부등식은 성립한다.

$n=6$일 때 우변은 $g_6=3a+5b$, 좌변은 $\alpha^2 a+\alpha^3 b$이다. 위와 같이

$$3>\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\alpha^2,\ 5>2+\sqrt{5}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3=\alpha^3$$

이고 $3a+5b>\alpha^2 a+\alpha^3 b$이므로 주어진 부등식은 성립한다.

$k\le n$을 만족하는 모든 자연수 $k\ge 5$에 대하여 $g_k>\alpha^{k-4}a+\alpha^{k-3}b$이 성립한다고 가정하자. α는 방정식 $x^2-x-1=0$의 해이므로 $\alpha^2=\alpha+1$이다. 가정에 의하여

$$g_{n-1}>\alpha^{n-5}a+\alpha^{n-4}b,\quad g_n>\alpha^{n-4}a+\alpha^{n-3}b$$

이므로 변변 더하면 $g_{n+1}=g_{n-1}+g_n>\alpha^{n-3}a+\alpha^{n-2}b$을 얻는다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 $n\ge 5$에 대하여 성립한다.

(2) 위의 (1)의 증명과 같은 방법으로 증명할 수 있다. ■

【정리 14】 a와 b가 서로 소일 때 연속하는 $g-$피보나치 수 g_n과 g_{n+1}은 서로 소이다. 즉, g_n과 g_{n+1}의 최대공약수는 1이다. 즉 $\gcd(g_n, g_{n+1})=1$.

【증명】 d가 g_n과 g_{n+1}을 나누는 1보다 큰 자연수라 하자. 이때 $g_{n-1}(=g_{n+1}-g_n)$도 d로 나누어진다. 이 사실과 $g_n-g_{n-1}=g_{n-2}$에 의하여 g_{n-2}도 d로 나누어진다. 이런 과정을 계속하여 반복하면 $d|g_{n-3}, d|g_{n-4}, \cdots$ 이고 결국 d는 $g_1=a, g_2=b$도 나눈다. 가정에 의하여 이는 모순이 되므로 $d=1$이다. 따라서, g_n과 g_{n+1}의 최대공약수는 1이다. 즉 $\gcd(g_n, g_{n+1})=1$이다. ■

Ⅲ. 결 론

피보나치 수열의 많은 성질에 관한 체계적이고 종합적인 조사를 통하여 이 수열은 하나의 수열로서 재미있는 많은 성질을 가지고 있고 많은 분야에 응용되고 있음을 알 수 있다. 그러므로 이 수열은 수학에 대한 흥미를 유발하고 수학의 사고력과 문제해결능력을 신장할 수 있는 좋은 교수 · 학습자료가 되리라 생각된다. 또한 실생활에 다양하게 응용의 실제 예를 통해 수학의 중요성을 인식할 수 있다고 판단된다. 이런 점

에서 이 수열은 가장 간단하고 단순하면서도 심오한 이론을 가진 수열이다.

본 연구에서는 수학적 사고의 확대 일환으로 피보나치 수열을 일반화하는 $g-$피보나치 수열을 중심으로 피보나치 수열에서 성립하는 여러 가지 성질과 특성을 일반화하였다. 특히, $g-$피보나치 수열의 합에 관한 항등식과 제 n항 g_n의 구체적인 일반식을 구한다. 이 일반항 g_n은 이차방정식 $t^2-t+1=0$의 두 근 α, β과 초항 a, 둘째항 b에 의하여 결정된다는 것을 알 수 있었다. 이 식은 비네의 공식이라 불리는 피보나치 수열의 제 n항 F_n의 일반식이다. 또한 피보나치 수열에 관한 카타란의 항등식의 일반화된 항등식과 A. Tagiuri의 항등식 등을 구하고 $g-$피보나치 수열의 초항과 둘째항이 서로 소일 때 연속하는 두 항은 서로 소이며, $g-$피보나치 수열의 연속하는 항의 비율은 황금비로 수렴함을 밝힌다. 이렇게 일반화하고 사고를 확장함으로써 피보나치 수열의 많은 성질은 $g-$피보나치 수열의 성질들의 특수한 경우에 해당된다.

끝으로, 이 연구는 2008학년도 과학영재교육원 수학반 사사과정의 일환으로 이루어졌으며, 이 연구는 $g-$피보나치 수열에 대한 여러 가지 성질들을 체계적으로 정리·증명하고 일반화시킴으로서 고등학교 수학교과 수열과 파스칼 삼각형, 수학적 귀납법, 정수 단원 등의 학습자료 또는 영재교육을 위한 참고교재로서의 가치를 지닐 수 있다고 판단된다. 이를 통하여 학생들의 수학적 사고력과 문제해결 능력을 신장시키는 데 도움이 되고 중등 수학교육의 연구자료 또는 교사들의 지침서가 되리라 생각된다.

참고 문헌

1. 김병소, 식물은 알고 있다, 경문사, 2003
2. 칼 B. 보이어, 유타 C. 메르츠바흐(양영오, 조윤동 번역), 수학의 역사(상, 하), 2000, 경문사
3. 이광연, 자연의 수학적 열쇠, 피보나치수열, 프로네시스, 2006
4. 고등부 세미나팀, 피보나치 수열(1), 수학사랑 10호(1997) 22-29
5. 고등부 세미나팀, 예술과 건축에 숨어있는 피보나치 수열, 수학사랑 11(1998) 18-27
6. 고등부 세미나팀, 다양한 피보나치 수의 예를 찾아서, 수학사랑 12(1998) 20-24
7. 고등부 세미나팀, 음악과 피보나치 수열, 수학사랑 13호(1998) 16-20
8. R. A. Dunlap, *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*, World Scientific, 1997
9. S. E. Ganis, *Notes on the Fibonacci Sequence*, Amer. Math. Soc. Monthly, Vol. 66, (1959), 129-130.

10. J. Guest, *A Variant to Fibonacci's sequence*, Austral. Math. Teacher, vol. 16, 1960, pp. 11-15

11. A. F. Horadam, *A generalized Fibonacci sequence*, Amer. Math. Monthly 68(1961), 455-459

12. J. Morgado, *Some remarks on an identity of Catalan concerning the Fibonacci numbers*, Portugalle Math. 39(1980), 341 -348

13. K. S. Rao, *Some Properties of Fibonacci Numbers*, Amer. Math. Soc. Monthly, 60(1953), 680-684.

A Study on Generalized Fibonacci Sequence

Dept. of Mathematics, Cheju National University **Young Oh Yang**
Institute of Science Education for Gifted Students, Cheju National University **Tae Ho Kim**

<Abstract> In this paper we investigate several properties and characteristics of the generalized Fibonacci sequence

$$\{g_n\} = \{a,\ b,\ a+b,\ a+2b,\ 2a+3b,\ 3a+5b,\ 5a+8b,\ \cdots\}.$$

This concept is a generalization of the famous Fibonacci sequence. In particular we find the identities of sums and the nth term g_n in detail. Also we find the generalizations of the Catalan's identity and A. Tagiuri's identity about the Fibonacci sequence, and investigate the relation between g_n and Pascal's triangle, and how fast g_n increases. Furthermore, we show that g_n and g_{n+1} are relatively prime if a and b are relatively prime, and that the sequence $\{\frac{g_{n+1}}{g_n}\}$ of the ratios of consecutive terms converges to the golden ratio $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Key Words : Fibonacci sequence, g-Fibonacci sequence, Binet's formular, Simson's identity, Catalan's identity, golden ratio

2000 Mathematical Subject Classification : 01A35, 11B39, 40A05

접수일 : 2008년 9월 30일 수정일 : 2008년 11월 5일 게재확정일 : 2008년 11월 17일