

마이크로스트립 구조 해석을 위한 Closed-Form 그린 함수

Closed-Form Green's Function for the Analysis of Microstrip Structure

양승우 · 김성진 · 김건우* · 이택경

Seung-Woo Yang · Sung-Jin Kim · Gun-Woo Kim* · Taek-Kyung Lee

요 약

평면형 구조에서 공간 영역 그린 함수를 구하기 위해서는 무한 Sommerfeld 적분을 계산하여야 한다. 무한 적분을 짧은 시간에 계산하기 위한 실수축 적분 방법(real axis integration method)은 주파수와 거리에 대해 넓은 범위에 걸쳐 매우 정확한 방법이지만 관측점의 수직 성분 z 가 변하게 되면, 근사의 과정을 반복해야 하는 비효율성과 z 가 커질수록 파수 영역 함수의 변화가 심해져 정확한 근사가 어렵다는 단점이 있다. 본 논문에서는 페루프 적분 경로를 이용하여 파수 영역 함수를 근사화 함으로써 일반적인 마이크로스트립 구조에서 기존의 결과에 비해 정확한 closed-form 그린 함수를 구하는 방법을 제시하였다.

Abstract

In the layered medium, the Sommerfeld integral must be evaluated to calculate a space domain Green's function. The real axis integration method provides stable and accurate results over wide ranges of the observation distance and the signal frequency. But this method has the inefficiency of approximation when the field point z is changed. Also, as the amplitude of z increases, the change of the spectral domain function is more rapidly. Therefore, the approximation is difficult when z becomes larger. In this paper, we propose a method to calculate an accurate closed-form Green's function for microstrip structure by using the closed-loop integration path.

Key words : Green's Function, Closed-Form, Sommer-Feld, Raim, Pole

I. 서 론

모멘트 법(Method of Moments: MoM)^[1]은 평면 구조의 전자기 산란과 복사 문제를 모델링 하는데 가장 유명하고 정확한 방법이다. 최근에 마이크로파 및 밀리미터파 집적 회로의 전송 선로로서 마이크로스트립이나 코플래너 도파로(Coplanar Waveguide: CPW)의 사용이 증가하고 있으며, 모멘트 법은 이런 구조를 해석하는데 효율적이고 정확한 방법이다. 모멘트 법은 미분 혹은 적분 방정식과 같은 방정식을 행렬 방정식(matrix equation)으로 변환시키는 방법으로 적분 방정식과 모멘트 법을 결합한 수치 해석 기

법을 공간 영역 해석법(Spatial Domain Integral Equation: SDIE)이라고 한다^{[1],[2]}. 이 방법은 복잡한 기하 구조에 대해서도 적용할 수 있고 물리적인 해석이 가능하다는 장점이 있지만 무한 적분으로 표현되는 Sommerfeld 적분을 포함하고 있어 많은 계산 시간이 요구된다. 적분 방정식은 안정된 결과를 얻기 위해 MPIE(Mixed Potential Integral Equation)를 사용한다.

마이크로스트립 구조를 해석하는데 MOM을 적용하기 위해서는 적분 식에 포함된 공간 영역의 그린 함수를 구하여야만 한다. 공간 영역의 그린 함수는 파수 영역의 그린 함수로부터 구할 수 있으나, 그것은 Sommerfeld 적분을 포함하고 있어 공간 영역의

「이 연구는 2006학년도 삼성탈레스(주)의 MRBA 개발사업의 연구비의 지원으로 연구되었음.」

한국항공대학교 항공전자 및 정보통신공학부(School of Electronics, Telecommunication and Computer Engineering, Korea Aerospace University)

* (주)삼성탈레스(Samsung Thales Co., Ltd.)

· 논문 번호 : 20070906-097

· 수정완료일자 : 2008년 1월 10일

그린 함수를 구하기 위해서는 오랜 계산 시간이 필요하다. 따라서 빠른 해석을 하기 위해서는 그린 함수의 계산 시간을 줄이는 것이 필수적이다. Sommerfeld 적분의 계산 시간을 줄이기 위해 근사화를 통해 closed-form으로 바꾸는 방법에 대한 연구들이 진행되어 왔다^{[3]~[6]}. 대표적인 방법으로 복소 영상법(Complex Image Method: CIM)과 2단계 근사화법 등이 있다. 복소 영상법은 관측점이 전원점에서 멀리 떨어진 경우나 가까이에 있을 때 비교적 정확한 결과를 나타낸다. 그러나 중간거리에서의 해는 상당한 오차를 포함한다. 여기서의 오차는 두 가지로 하나는 복소 영상법에서 지수함수를 근사화 하는데 사용하는 prony 방법 자체에 대한 오차이며, 다른 하나는 원래의 적분 경로에 의한 오차이다. 따라서 Prony 방법에서의 오차를 해결하기 위해 좀 더 정확한 지수함수로의 근사화 방법인 GPOF 방법을 이용한다^[11]. 2단계 근사화법은 관측점이 가까이에 있는 경우에 한해서 정확한 결과를 얻을 수 있다. 그러나 관측점과 전원점 사이의 거리가 멀어질수록 2단계 근사화 방법에 의한 해가 더 많은 오차를 포함한다. 이때의 오차 또한 복소 영상법에서의 오차와 마찬가지로 정확한 적분 경로를 벗어나는 데 따른 오차이며, pole을 계산해 주지 않는 한 원거리로 갈수록 오차는 점점 커진다. 따라서 2단계 근사화 방법은 복소 영상법을 적용하기 곤란한 여러 층으로 이루어져 있는 작은 크기의 구조에 이용하는 것이 유리하며, 특히 pole에 의해 영향을 별로 받지 않는 얇은 두께의 다층 구조에서 이용하는 것이 유리하다. 그러나 두 방법 모두 관측점이 중간 정도의 위치에 존재하는 경우에 대해서는 정확하지 못한 결과를 얻게 된다. 따라서 이 방법들은 변형된 적분 경로상에서 근사를 하게 되므로 적분 결과에 오차를 포함하고 있다. 따라서 최근 본래의 적분 경로를 벗어나지 않고 실수축을 따라 근사하는 실수축 적분 방법(Real Axis Integral Method: RAIM)이 개발되었다. 이 방법은 크게 유수정리를 이용한 표면파 pole의 추출과 복소 영상(complex image) 및 실영상(real image)를 구하는 과정으로 이루어져 있으며, 주파수와 거리에 대해 넓은 범위에 걸쳐 매우 정확한 결과를 낼 수 증명하였다^{[7],[9]}. 하지만 앞서 제안한 방법들은 관측점의 수직 성분 z 가 변하게 되면, 각각의 z 에 대해 근사의 과정을 반복해야 하는

비효율성을 가진다. 그 이유는 표면파 pole을 추출할 때 온전하지 않은 유수정리를 사용하기 때문에 원래의 피적분 함수에 다음과 같은 그 영향을 남기게 되는데,

$$G = G_P + \int_{-\infty}^{\infty} [\bar{G} - P_F] H_0^{(2)}(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho}$$

여기서 G 는 구하고자 하는 공간 영역 그린 함수, G_P 는 pole 성분을 추출한 그린 함수, \bar{G} 는 본래의 피적분 함수인 파수 영역 그린 함수이다. 여기서 피적분 함수를 지수함수로 근사하고, Sommerfeld identity를 이용하여 구하고자 하는 공간 영역의 그린 함수를 구하게 된다. 하지만 z 가 변하게 되면, 위식의 P_F 가 z 에 따라 다른 값을 가지기 때문에 각각의 z 에 대해서 위 무한적분을 풀기 위한 지수함수로의 근사가 반복된다. 뿐만 아니라, 여기에서 파수 영역 함수 \bar{G} 는 z 가 커질수록 그 변화가 심해지는 특성을 지닌 함수이기 때문에, z 가 커져 변화가 매우 심해지면 정확한 근사를 하기 어렵다는 단점이 있다.

이런 문제를 해결하기 위해 본 논문에서는 새로운 방법을 제시하였고, 그 방법의 효율성과 계산의 정확성을 증명하였다. 제시하는 방법은 본래의 k_{ρ} 평면의 적분 경로를 k_z 평면으로 변환하여 적분 경로를 단음으로서, 본래의 SIP(Sommerfeld Integration Path)를 k_z 의 실수축을 따르는 적분과 표면파 pole 성분으로 완전히 따로 분리함으로써 문제를 해결하였다. 위의 기존의 방법들에 존재하던 피적분 함수의 pole에 대한 영향이 존재하지 않게 된다. 이렇게 얻어진 공간 영역 그린 함수는 관측점 z 에 대한 변수를 포함하고 있어 z 가 변하여 근사를 다시 수행할 필요가 없게 되어 계산의 효율성을 얻게 된다. 본 논문은 5장으로 구성되며, II에서는 실수축 적분 방법의 문제점을 알아보고, III에서는 제안하는 방법을, IV은 수치 해석 결과를 설명하고, V에서 결론을 내었다.

II. 실수축 상 적분에 의한 그린 함수

이 논문은 일반적인 마이크로스트립 구조의 해석을 위한 공간 영역 그린 함수를 얻기 위해 효율적이고 정확한 새로운 방법을 제시한 논문이다. 마이크로스트립 구조는 그림 1과 같이 기판 위의 수평 전기 다이폴(horizontal electric dipole)이 존재하는 구조

로 가정할 수 있다. 여기서 기판의 두께는 d , 비유전율은 ϵ_r 이다. 도체의 두께는 무시 가능할 정도로 얇다고 가정한다. 구하고자 하는 공간 영역 그린 함수는 파수 영역 그린 함수로부터 얻어지며, 파수 영역 그린 함수는 평면형 다층구조에서 해석적으로 구할 수 있다^[10]. 이때 벡터 및 스칼라 포텐셜 공간 영역 그린 함수는

$$G_{AA}^{xx} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{G}_{AA}^{xx} H_0^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \quad (1)$$

$$G_{qe} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{G}_{qe} H_0^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \quad (2)$$

이고, 여기서

$$\overline{G}_{AA}^{xx} = \frac{\mu_0}{2jk_{z0}} [e^{-jk_{z0}|z-z'|} + R_{TE} e^{-jk_{z0}(z+z')}] \quad (3)$$

$$\overline{G}_{qe} = \frac{1}{2jk_{z0}\epsilon_0} [e^{-jk_{z0}|z-z'|} + (R_{TE} + R_{qe})e^{-jk_{z0}(z+z')}] \quad (4)$$

$$R_{TE} = \frac{R_{TE}^{0,1} - e^{-2jk_{z1}d}}{1 - R_{TE}^{0,1} e^{-2jk_{z1}d}},$$

$$R_{TM} = \frac{R_{TM}^{0,1} + e^{-2jk_{z1}d}}{1 + R_{TM}^{0,1} e^{-2jk_{z1}d}}$$

$$R_{qe} = \frac{k_{z0}^2}{k_\rho^2} (R_{TE} + R_{TM}) \quad (5)$$

$$R_{TE}^{0,1} = \frac{k_{z0} - k_{z1}}{k_{z0} + k_{z1}}, \quad R_{TM}^{0,1} = \frac{\epsilon_r k_{z0} - k_{z1}}{\epsilon_r k_{z0} + k_{z1}} \quad (6)$$

이며, $k_{z0}^2 + k_\rho^2 = k_0^2$, $k_{z1}^2 + k_\rho^2 = \epsilon_r k_0^2 = k_1^2$ 이다. 여기서 $H_0^{(2)}$ 는 0차 2종의 Hankel 함수이고, z 와 z' 은 관측점과 전원 점의 z 방향 위치를 나타내며, $R_{TE}^{0,1}$ 과 $R_{TM}^{0,1}$ 은 각각 TE 모드와 TM 모드의 Fresnel 반사계수를 나타내고, \overline{G}_{AA}^{xx} 와 \overline{G}_{qe} 는 벡터 및 스칼라 포텐셜 파수 영역 그린 함수로 \overline{G}_{AA}^{xx} 는 x 방향 전원에 의한 파수 영역 벡터 포텐셜의 x 방향 성분을 나타낸다.

식 (1)과 (2)의 무한적분 내의 피적분 함수는 2종류의 특이점을 포함하고 있다. 하나는 R_{TE} 혹은 $R_{TE} + R_{qe}$ 의 분모가 0이 되는 위치에서 pole 특이점이 발생하고, 또 다른 하나는 피적분 함수에서 이중값을 가지는 함수 $k_{z0} = \sqrt{k_0^2 - k_\rho^2}$ 에 의해 $k_\rho = k_0$ 에서 branch point 특이점이 발생한다. 이런 특이점

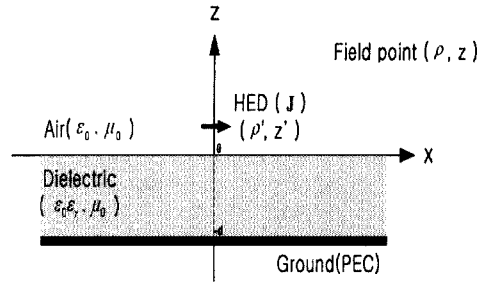


그림 1. 마이크로스트립 구조의 해석을 위한 기판 위의 HED
Fig. 1. HED above substrate for the analysis of microstrip structure.

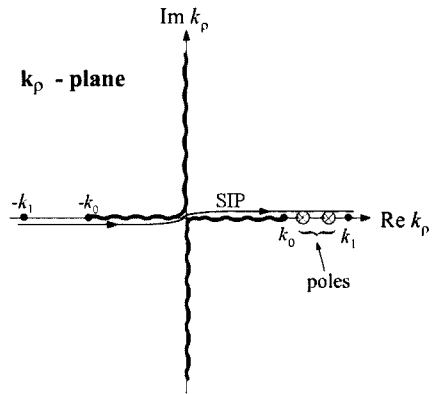


그림 2. 복소 k_ρ 평면에서의 Sommerfeld 적분 경로 (SIP)
Fig. 2. The SIP on the complex k_ρ plane.

때문에 적분을 풀기 위해 이전에는 그림 2와 같은 적분 경로로 적분이 수행되었으나, 그 계산 시간이 너무 오래 걸려 근사를 통해 계산 시간을 줄이는 방법들이 연구되었다. 주된 방식은 피적분 함수를 지수함수의 형태로 근사하여, 다음의 잘 알려진 Sommerfeld Identity를 이용하여 계산하는 방식이고, r 은 전원과 관측점 사이의 거리를 나타낸다.

$$\frac{e^{-jk_\rho r}}{r} = -\frac{j}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jk_z |z|}}{k_z} H_0^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \quad (7)$$

대표적인 방법이 실수축 적분 방법(RAIM)이고, 크게 표면과 pole 추출, 복소 영상 추출 그리고 실영상 추출로 이루어진다^[7]. 근사를 하기 위해서는 함수가 평탄한 함수가 되어야 하지만, 위의 피적분 함수

는 특이점들을 포함하고 있어 특이점에서 발산을 일으키므로 근사에 어려움이 있다. 따라서 이런 특이점을 추출해 주는 과정이 필수적이다.

2-1 실수축 적분 방법(RAIM)

피적분 함수를 근사하기 위한 실수축 적분 방법은 크게 표면과 pole 추출, 복소 영상 추출 그리고 실 영상 추출로 이루어진다. 이 과정은 피적분 함수인 파수 영역 그린 함수에 존재하는 특이점을 제거하고 근사하는 과정이다. Pole은 식 (1)과 (2)의 R_{TE} , $R_{TE} + R_{qe}$ 의 분모가 0이 되는 존재하며, 이러한 pole 추출은 복소영상법과 마찬가지로 유수정리를 이용하여 구할 수 있다³⁾. 파수 영역 그린 함수 \tilde{G} 로부터 추출된 표면과 pole을 이용하여 구한 공간 영역 그린 함수를 G_P , 표면과 pole을 추출해 낸 나머지 함수를 \tilde{G}' 이라 하면, pole을 추출한 공간 영역 그린 함수는

$$G = G_P + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}' H_0^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \quad (8)$$

여기서

$$\tilde{G}' = a \left[\frac{e^{-jk_\rho |z-z'|} + R e^{-jk_\rho (z+z')}}{k_{z0}} - P_F \right] \quad (9)$$

$$P_F = \sum_i \frac{2k_{\rho p(i)}}{k_\rho^2 - k_{\rho p(i)}^2} \lim_{k_\rho \rightarrow k_{\rho p(i)}} (k_\rho - k_{\rho p(i)}) \cdot \frac{R}{k_{z0}} e^{-jk_\rho (z+z')} \quad (10)$$

$$G_P = b \sum_i \lim_{k_\rho \rightarrow k_{\rho p(i)}} (k_\rho - k_{\rho p(i)}) \cdot H_0^{(2)}(k_{\rho p(i)} \rho) k_{\rho p(i)} \frac{R}{k_{z0}} e^{-jk_\rho (z+z')} \quad (11)$$

이 된다. 여기서 $k_{\rho p(i)} = \sqrt{\epsilon_r k_0^2 - \left(\frac{k_{z0}}{d}\right)^2}$ 가 되고, $k_{\rho p(i)}$ 는 피적분 함수의 분모가 0이 되는 부분에서의 복소평면 k_ρ 의 실축에 위치한 I번째 표면과 pole의 위치를 나타낸다. 페루프를 형성하지 않은 유수정리를 사용하기 때문에 식 (9)에서와 같이 원래의 피적분 함수에 pole에 대한 영향 P_F 가 남게 된다. 여기서 i 는 각각의 파수 영역 그린 함수에 포함된 pole의 개수를 나타내고, a, b, R 은 벡터 포텐셜 그린 함수일 경우 각각 $a = \mu_0/2j$, $b = -\mu_0/4$, $R = R_{TE}$ 이고, 스칼라 포텐셜 그린 함수일 경우 $a = 1/2j$

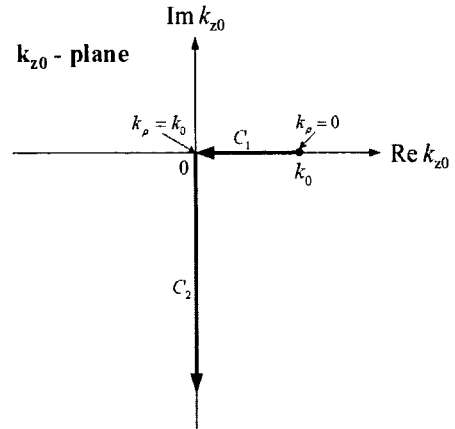


그림 3. 복소 k_{z0} 평면에서의 적분 경로
Fig. 3. The integration path on the complex k_{z0} plane.

ϵ_0 , $b = -1/4 \epsilon_0$, $R = R_{TE} + R_{qe}$ 이다. 함수 \tilde{G}' 는 표면과 pole이 제거된 함수이므로 발산하는 부분은 없어지지만, $k_\rho = k_0$ 인 branch point에서는 1차 미분이 무한대이므로 함수가 급격히 변화하여 근사가 곤란하다. RAIM에서는, 이 지점에서 근사가 정확히 이루어지기 위해, 피적분 함수가 해석적인 해를 가질 수 있도록 만들기 위해 복소 k_ρ 평면의 함수 \tilde{G}' 을 복소 k_{z0} 평면의 함수로 변환하여 해석적인 함수로 만들어 준 후 그림 3과 같이 두 부분의 적분 경로로 나눠 문제를 해결하였다. 적분 경로 C_1 과 C_2 는 각각 실수축과 허수축에 해당하는 적분 경로이며, 적분 경로 C_2 에 대해서는 지수함수로 적분 경로 C_1 에 대해서는 코사인 함수로 각각 근사화 한다. 복소 k_{z0} 평면에서의 적분을 수행하기 위해 $H = k_{z0} \tilde{G}'$ 을 만족하는 해석적인 함수 H 를 사용하여 함수를 근사한다.

첫 번째 단계로 적분 경로 C_2 에서 데이터를 샘플링하여 다음의 GPOF(Generalized Pencil of Function Method)을 적용시키면

$$H' = b_0 + \sum_{i=1}^M b_i e^{-\beta_i k_{z0}} \quad (12)$$

과 같이 지수함수 형태로 근사된다. 여기서 H' 은 적분 경로 C_2 에서 함수 H 를 근사화한 함수를 나타내며, b_i, β_i 는 시변정수 i 의 함수에서 k_ρ 에 대한 함수로 변환하는 과정에서 구해지는 복소수이다. $b_0 = \lim_{k_\rho \rightarrow \infty} H$ 이고 H' 에 Sommerfeld Identity를 적용하면 다

음의 경로 C_2 에 대한 공간 영역 그린 함수를 구할 수 있다.

$$G_{\alpha} = c_1 \left[b_0 \frac{e^{-jk_0 \rho}}{\rho} + \sum_{i=1}^M b_i \frac{e^{-jk_0 \sqrt{\rho^2 + (-j\beta_i)^2}}}{\sqrt{\rho^2 + (-j\beta_i)^2}} \right] \quad (13)$$

여기서 계수 c_1 은 벡터 포텐셜 스칼라 포텐셜에 대해서 각각 $\mu_0/4\pi$ 와 $1/4\pi\epsilon_0$ 이고, 함수의 형태가 복소 거리 β_i 를 갖는 복소 전원의 합 형태이므로 복소 영상(complex image) 부분이라고 한다.

두 번째 단계는 경로 C_1 에서 H-H'의 데이터를 샘플링하여 다음의 코사인 함수로 근사하는 것이다.

$$H - H' = d_0 + \sum_{n=1}^N d_n \cos \left[\frac{(2n-1)\pi}{2k_0} k_{z0} \right], \quad 0 \leq k_{z0} \leq k_0 \quad (14)$$

여기서 $d_0 = \lim_{k_{z0} \rightarrow k_0} [H - H']$ 이다. 적분공식을 이용하여 공간 영역 그린 함수를 구하면

$$G_{\alpha} = c_2 \left[d_0 \frac{\sin(k_0 \rho)}{\rho} + \sum_{n=1}^N d_n \frac{\sin(k_0 r_n)}{r_n} \right] \quad (15)$$

여기서 $r_n = \sqrt{\rho^2 + \left[\frac{(2n-1)\pi}{2k_0} \right]^2}$ 이고, 계수 c_2 는 벡터 퍼텐셜과 스칼라 퍼텐셜에 대해서 각각 $\mu_0/4\pi$ 와 $1/4\pi\epsilon_0$ 이다. 이 경우는 일거리를 갖는 전원의 합 형태이므로 실영상(real image) 부분이라고 한다. 따라서 RAIM에서는 공간 영역의 그린 함수를 다음과 같이 pole 성분, 복소 영상, 실영상에 대한 공간 영역 그린 함수의 합으로 구한다.

$$G = G_P + G_{\alpha} + G_{\alpha} \quad (16)$$

2.2 고찰

RAIM 방식은 관측점과 전원 점의 수직 성분 z 와 z' 의 존재 여부에 따라 근사를 하기 전과 하고 난 후 두 부분으로 나눌 수 있다. 근사가 이루어지기 전, pole 성분을 추출하고 난 후의 z 와 z' 이 존재하는 파수 영역 그린 함수 식인 식 (9)와 근사를 하고 난 후의 식인 식 (13), (15)를 비교하여 보면 z 와 z' 성분을 포함하고 있는 피적분 함수식인 식 (9)를 한꺼번에 근사를 하기 때문에 결과식인 식 (13), (15)에서 z 와 z' 성분이 사라져 버림을 확인할 수 있다. 결국

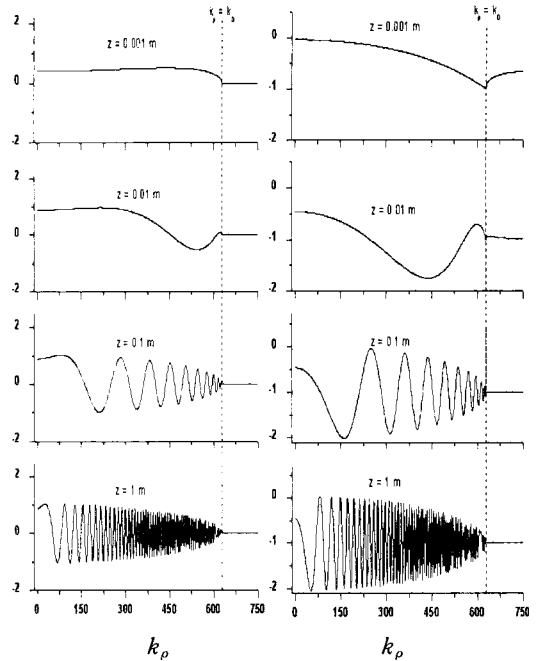


그림 4. z 변화에 따른 파수 영역 함수 $k_{z0} \tilde{G}_A^{xx}$

Fig. 4. The $k_{z0} \tilde{G}_A^{xx}$ for different z .

z 또는 z' 성분이 변하게 되면, pole을 추출하고 남아있는 함수 G 의 값이 변하기 때문에 공간 영역의 그린 함수를 구하기 위해서는 z 와 z' 이 변할 때마다 같은 근사과정을 반복해야 하는 문제가 발생하게 된다. 또, 식 (9)의 파수 영역 그린 함수는 그림 4와 같이 z 가 커질수록 파수 영역의 그린 함수가 빠르게 변화하는 것을 알 수 있다. 따라서 z 와 z' 가 커질수록 함수의 변화가 커져서 파수 영역에서 그린 함수를 정확하게 근사화 시키기가 어렵고, 우리가 최종적으로 구하고자 하는 공간 영역의 그린 함수를 정확하게 계산할 수 없다.

z 와 z' 성분을 포함하고 있는 피적분 파수 영역 함수식인 식 (9)를 한꺼번에 근사하는 이유는 바로 pole 성분 추출에 있다. 폐경로 적분이 아니므로 온전한 유수정리를 사용할 수 없기 때문에 pole을 추출하고 나서는 그 영향 P_F 가 원래의 파수 영역 함수 식에 식 (9)처럼 남아 있게 된다. 그림으로 인해서 어쩔 수 없이 전체 피적분 함수를 근사함으로써 이런 문제들이 발생하게 된다. 이런 문제를 해결하기 위해 본 논문에서는 새로운 closed-form 그린 함수를 구하는 방법을 제시하였다. 다음 장에 그 방법을 설

명하겠다.

III. 제안된 방법

제안하는 방법은 그림 5와 그림 6으로 설명할 수 있다. 그림 5는 $k_{z0} = \sqrt{k_0^2 - k_\rho^2}$ 에 의해 그림 2의 k_ρ 평면상의 SIP를 k_{z0} 평면으로 변환한 그림이다. 여기서 적분 경로를 닫게 되면 그림 6과 같이 되는데, 이것으로 제안하는 방법을 설명할 수 있다. 그림 6과 같이 적분을 닫아 버리면 페루프 적분 경로는 C_1 에 대한 적분, C_2 에 대한 적분 그리고 SIP에 대한 적분의 합이 되고, 또 pole을 포함하는 폐경로 적분에 대해서는 온전한 유수정리(Cauchy's theorem)가 적용되므로 전체 폐경로 적분은 유수정리에 의해 표면파 pole 성분 G_P 가 된다. 여기서 경로 C_2 에 대한 적분은 radiation 조건에 의해 0이 되어 결국 공간 영역 그린 함수는

$$G_{A^x, qe} = - \int_{SIP} = \int_{C_1} + \oint_{pole} = G_{C_1} + G_P \quad (17)$$

이 된다. 결국 구하고자 하는 공간 영역의 그린 함수는 pole에 의한 공간 영역 그린 함수에 k_{z0} 평면에서의 경로 C_1 을 따르는 적분을 통해 얻어진 공간 영역 그린 함수의 합으로 구할 수 있다. 이와 같이 페루프 적분 경로를 사용함으로써 pole 성분을 독립적으로 추출할 수 있음을 확인하였다. 따라서 제안된 방법의 closed-form 그린 함수를 얻는 과정은 다음과 같

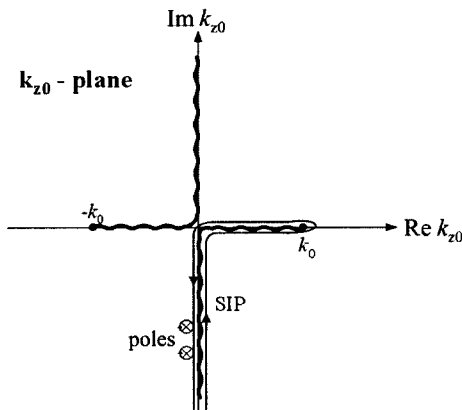


그림 5. 복소 k_{z0} 평면에서의 SIP
Fig. 5. The SIP on the complex k_{z0} plane.

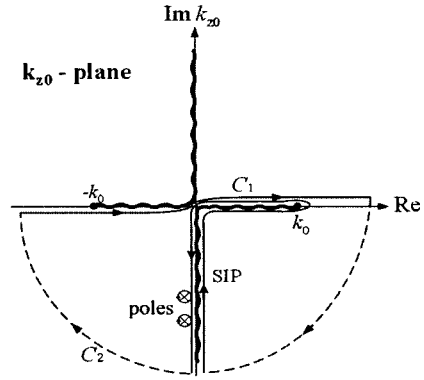


그림 6. 제안된 방법에 대한 복소 k_{z0} 평면에서의 적분 경로
Fig. 6. The integration path of proposed method on the complex k_{z0} plane.

다. 첫 번째 단계에서는 표면파 pole 성분에 의한 공간 영역 그린 함수를 구하는 단계이고, 두 번째 단계는 파수 영역의 그린 함수를 k_{z0} 평면으로 변환하여 경로 C_1 에서 지수함수로 근사하는 과정이다. 근사된 함수는 Sommerfeld Identity를 이용하여 공간 영역 그린 함수를 구할 수 있다.

3-1 표면파 Pole 성분 공간 영역 그린 함수 G_P

표면파 pole 성분에 의한 공간 영역 그린 함수 G_P 는 유수정리를 사용하여 구하고, 그 결과는 RAIM의 식 (11)과 같다. 하지만 여기서는 온전한 유수정리를 사용하기 때문에 본래의 피적분 함수인 파수 영역 그린 함수에 RAIM과 같이 pole에 대한 영향을 남기지 않는다. 그 결과를 다시 쓰면

$$G_P = b \sum_i \lim_{k_\rho \rightarrow k_{\rho(i)}} (k_\rho - k_{\rho(i)}) \cdot H_0^{(2)}(k_{\rho(i)} \rho) k_{\rho(i)} \frac{R}{k_{z0}} e^{-j k_{z0}(z+z')} \quad (18)$$

이 된다. 마찬가지로, 여기서 i 는 각각의 파수 영역 그린 함수에 포함된 pole의 개수를 나타내고, $k_{\rho(i)}$ 는 pole의 위치를 나타내며 b, R 은 벡터 포텐셜 그린 함수일 경우 각각, $b = -\mu_0/4, R = R_{TE}$ 이고, 스칼라 포텐셜 그린 함수일 경우 $b = -1/4 \epsilon_0, R = R_{TE} + R_{qe}$ 이다.

3-2 k_{z0} 평면의 경로 C_1 에서 공간 영역 그린 함수 G_{C_1}

두 번째 단계는 파수 영역 그린 함수 G 를 k_ρ 평면상에서 k_{z0} 평면으로 변환하여 경로 C_1 을 따르는 적분을 수행하는 단계다. k_{z0} 평면에서 경로 C_1 에 대한 벡터 및 스칼라 포텐셜에 대한 공간 영역 그린함수를 G_{A,C_1}^{xx} , G_{qe,C_1} 이라고 하자. k_ρ 평면상의 공간 영역 그린 함수 식인 식 (1)과 (2)를 k_{z0} 평면으로 변환하기 위해 다음의 수식을 적용하면

$$\frac{dk_\rho}{dk_{z0}} = (\sqrt{k_0^2 - k_{z0}^2})' = -\frac{k_{z0}}{k_\rho} \quad (19)$$

다음과 같이 k_{z0} 평면상의 공간 영역 그린 함수 식으로 변환된다.

$$G_{A,C_1}^{xx} = -\frac{\mu_0}{8\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-jk_{z0}|z-z'|} + R_{TE} e^{-jk_{z0}(z+z')}] \cdot H_0^{(2)}(k_\rho \rho) dk_{z0} \quad (20)$$

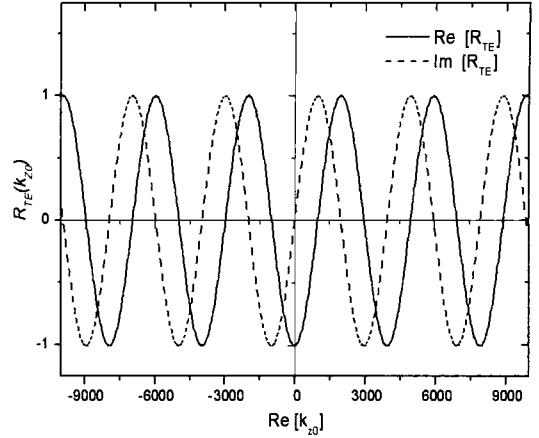
$$G_{qe,C_1} = -\frac{1}{8\pi j \epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jk_{z0}|z-z'|} + (R_{TE} + R_{qe}) e^{-jk_{z0}(z+z')} \cdot H_0^{(2)}(k_\rho \rho) dk_{z0} \quad (21)$$

공간 영역 그린 함수를 구하기 위해 Sommerfeld identity를 적용하기 위해서는 피적분 함수에 포함된 반사계수 R_{TE} 와 $R_{TE} + R_{qe}$ 가 지수함수의 형태로 근사되어야 함을 확인할 수 있다. 근사를 하기 위해서는 함수가 특이점을 갖지 않는 평탄한 함수여야 한다. 그림 6에서처럼 반사계수에 포함된 pole 특이점은 경로 C_1 상에 존재하지 않고 첫 번째 단계에서 유수정리를 이용하여 구하였다. 그리고 경로 C_1 상에 존재하는 것처럼 보이는 branch point 특이점은 피적분 함수 전체에 대한 특이점으로, 근사하려는 함수 R_{TE} 와 $R_{TE} + R_{qe}$ 는 본래 k_{z0} 에 대한 함수로써 그림 7과 같이 branch point 특이점을 갖지 않는 함수 특성을 갖는다. 함수 R_{TE} 와 $R_{TE} + R_{qe}$ 는 주기함수의 특성을 가지기 때문에 지수함수로의 근사에는 Fourier 급수를 이용한다.

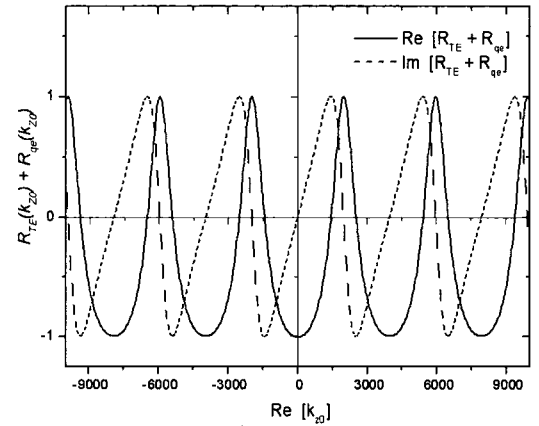
식 (20)과 (21)의 Hankel 함수는

$$H_0^{(2)}(k_\rho \rho) = H_0^{(2)}(\sqrt{k_0^2 - k_{z0}^2} \rho) \quad (22)$$

가 되어 $k_{z0} > k_0$ 에서 지수 함수적으로 감소하는 특성을 가지는 함수가 되어 유향거리 $W = Lk_0$ 에서



(a) R_{TE}



(b) $R_{TE} + R_{qe}$

그림 7. $k_0 = 157.079$, $k_1 = 232.986$ 일 때 함수

Fig. 7. The functions for $k_0 = 157.079$ and $k_1 = 232.986$.

Fourier 급수를 이용하여 함수를 근사할 수 있다. 그림 7은 주파수 $f = 7.5$ GHz, 기판 두께 $d = 0.789$ mm, 비유전율 $\epsilon_r = 2.2$ 에서의 k_{z0} 평면의 실수축을 따르는 함수 R_{TE} 와 $R_{TE} + R_{qe}$ 를 나타낸 그림이다.

근사 과정은 각각의 반사계수를 기함수(odd)와 우함수(even)로 나누어 기함수는 sin함수로, 우함수는 cos함수로 근사하는 방법이다. 벡터 포텐셜에 대한 반사계수 R_{TE} 와 스칼라 포텐셜에 대한 반사계수 $R_{TE} + R_{qe}$ 에 대한 근사과정은 같기 때문에 반사계수를 R 이라 하여 근사과정을 설명하도록 하겠다. 반사계수 R 를 다음과 같이 우함수(even)와 기함수(odd)의 합으로 놓으면

$$R = R_e + R_o \quad (23)$$

이 되고, 여기서 각각의 우함수(even)와 기함수(odd)는 다음과 같다.

$$R_e(k_{z0}) = \frac{[R(+k_{z0}) + R(-k_{z0})]}{2}, \quad 0 \leq k_{z0} \leq W \quad (24)$$

$$R_o(k_{z0}) = \frac{[R(+k_{z0}) - R(-k_{z0})]}{2}, \quad 0 \leq k_{z0} \leq W \quad (25)$$

여기서, W 는 데이터를 샘플링한 구간을 나타낸다. 이와 같이 반사계수 R 의 데이터를 샘플링한 우함수(even)를 \cos 함수로 근사하고, 기함수(odd)를 \sin 함수로 근사하면

$$R_e = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(\frac{n\pi}{W} k_{z0}\right) \quad (26)$$

$$R_o = \sum_{n=1}^N b_n \sin\left(\frac{n\pi}{W} k_{z0}\right) \quad (27)$$

이고, 여기서 각각의 계수들은 푸리에 계수 구하는 공식에 의하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$a_0 = \frac{1}{W} \int_0^W R_e(k_{z0}) dk_{z0} \quad (28)$$

$$a_n = \frac{2}{W} \int_0^W R_e(k_{z0}) \cos\left(\frac{n\pi}{W} k_{z0}\right) dk_{z0} \quad (29)$$

$$b_n = \frac{2}{W} \int_0^W R_o(k_{z0}) \sin\left(\frac{n\pi}{W} k_{z0}\right) dk_{z0} \quad (30)$$

따라서 구하고자 하는 반사계수 R 은 식 (25)와 (26)의 합으로 근사되고, 지수함수 형태로 만들기 위해 오일러 공식을 적용하여 반사계수 R 을 다시 쓰면

$$R = a_0 + \sum_{n=1}^N \left[c_n e^{j\frac{n\pi}{W} k_{z0}} + d_n e^{-j\frac{n\pi}{W} k_{z0}} \right] \quad (31)$$

이고, 여기서

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, \quad d_n = \frac{a_n + jb_n}{2} \quad (32)$$

이다. 따라서 파수 영역 그린 함수는

$$\overline{G}_{C_1} = e^{-jk_{z0}|z-z'|} + a_0 e^{-jk_{z0}(z+z')}$$

$$+ \sum_{n=1}^N \left[c_n e^{-jk_{z0}\left((z+z') - \frac{n\pi}{W}\right)} + d_n e^{-jk_{z0}\left((z+z') + \frac{n\pi}{W}\right)} \right] \quad (33)$$

이 된다. 피적분 함수인 파수 영역 그린 함수가 지수함수 형태로 근사되었으므로 Sommerfeld identity를 적용하여 공간 영역 그린 함수 G_{C_1} 을 구하면

$$G_{C_1} = \frac{e^{-jk_0\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}}{\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}} + a_0 \frac{e^{-jk_0\sqrt{\rho^2+(z+z')^2}}}{\sqrt{\rho^2+(z+z')^2}} + \sum_{n=1}^N \left(c_n \frac{e^{-jk_0 r_n}}{r_n} + d_n \frac{e^{-jk_0 l_n}}{l_n} \right) \quad (34)$$

이 된다. 여기서

$$r_n = \sqrt{\rho^2 + \left((z+z') - \frac{n\pi}{W}\right)^2}, \quad l_n = \sqrt{\rho^2 + \left((z+z') + \frac{n\pi}{W}\right)^2} \quad (35)$$

이고, 계수 a' 은 벡터 포텐셜 공간 영역 그린 함수 G_{A,C_1}^{xx} 에 대해서는 $\mu_0/4\pi$ 이고, 스칼라 포텐셜 그린 함수 G_{ϕ,C_1} 에 대해서는 $1/4\pi\epsilon_0$ 을 갖는다. 따라서 구하고자 하는 공간 영역 그린 함수는 식 (19)에 의해 pole에 대한 공간 영역 그린 함수식인 식 (18)과 경로 C_1 에 대한 공간 영역 그린 함수식인 식 (32)의 합에 의해 구할 수 있다.

3-3 고찰

계산된 결과를 살펴보면 RAIM과 마찬가지로 방법으로 pole 성분을 추출하는 것처럼 보이나, 제안하는 방법은 적분 경로를 완전히 닫아 버림으로서 온전한 유수정리를 사용하게 되어, RAIM의 결과인 식 (9)처럼 pole 성분을 추출하였을 때 나머지 파수 영역 그린 함수에 pole의 영향이 존재하지 않고, 식 (17)처럼 pole 성분과 나머지 항이 분리되어 계산된다. 적분 경로를 닫지 않는 기존의 방법은 관측점과 전원점의 수직 성분 z 와 z' 를 변수로 갖는 pole 성분 P_F 가 나머지 파수 영역 그린 함수에 영향을 미치게 되고, 이런 파수 영역 그린 함수를 기타 방법으로 근사하여 공간 영역 그린 함수를 구하기 때문에 관측점이 변하게 될 경우 이런 근사의 과정을 반복하게 된다. 반면 제안하는 방법은 적분 경로를 닫아 줌으로서 온전한 유수(residue)를 구할 수 있게 됨으로서 각 경로에 대한 적분으로 각각 분리해 낼 수 있었다. Pole

성분에 대한 결과식인 식 (18)과 적분 경로 C_1 에 대한 공간 영역 그린 함수 결과식인 식 (32)을 살펴보면 변수 z 와 z' 에 대한 영향이 고려되어 있어 다시 근사를 하지 않고, 결과 식만을 이용하여 변화하는 z 와 z' 에 대한 공간 영역 그린 함수를 구할 수 있음을 확인할 수 있다.

IV. 계산 결과

지금까지 설명한 페루프 적분 경로를 이용한 closed-form 그린 함수 방법을 이용하여 일반적인 마이크로스트립 구조에 대한 그린 함수를 구하고, 기존의 방법과 비교하였다. 기판의 두께는 $d=0.789$ mm, 비유전율 $\epsilon_r=2.2$ 로 가정하고, 주파수와 관측거리 등

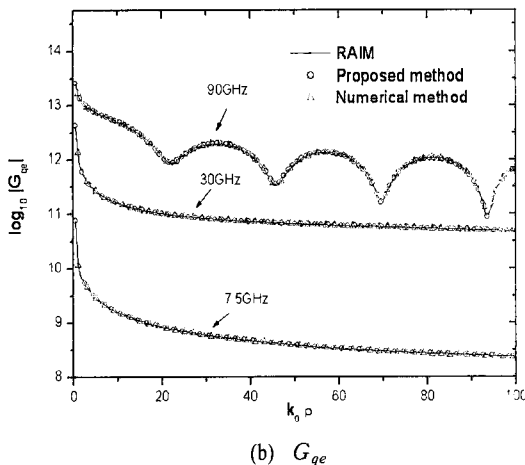
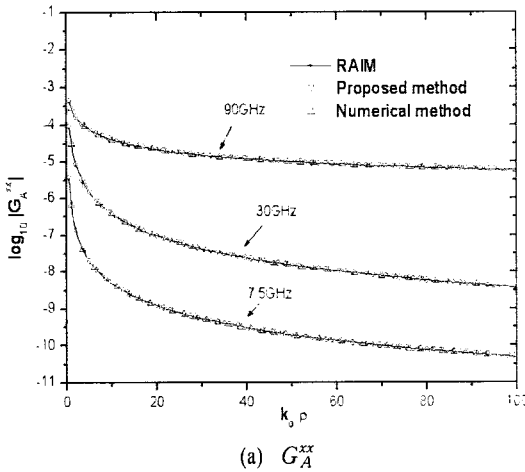


그림 8. 관측점의 $z=0$ 에서 공간 영역 그린 함수
Fig. 8. The amplitudes for observation point $z=0$.

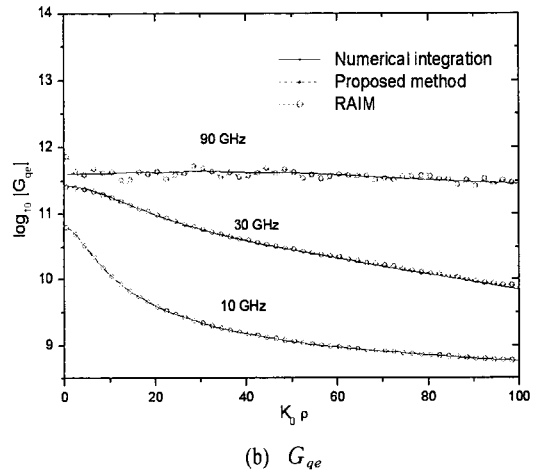
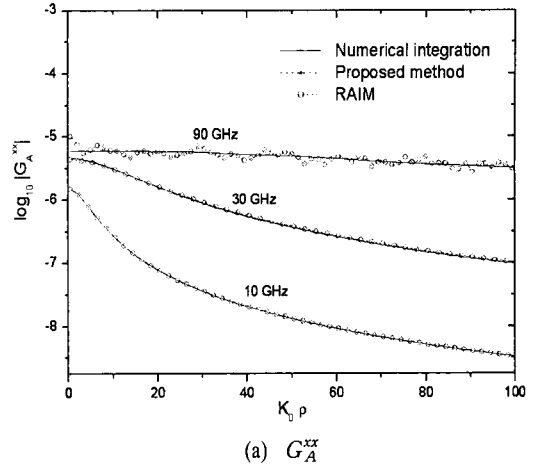


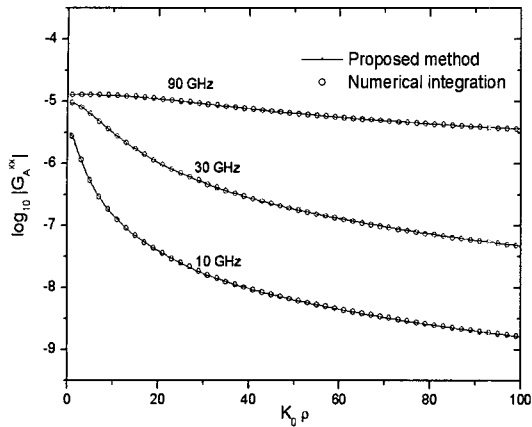
그림 9. $z=0.022$ m일 때, 공간 영역 그린 함수
Fig. 9. The amplitudes for $z=0.022$ m.

을 변화시켜 정확성을 시험하였다. 마이크로스트립의 도체 두께가 매우 얇기 때문에 무시 가능할 정도로 얇다고 가정하면 그림 1의 전원과 유전체의 사이의 거리는 0이라 할 수 있다. 이때, 전원 점의 수직 성분 z' 을 $z=0$ 인 평면에 존재한다고 가정하였다. 파수 영역의 그린 함수를 삼각함수로 근사하는데 있어 계수를 구하는 적분식인 식 (27)~(29)의 적분은 사다리꼴 적분 방법(trapezoidal method)을 사용하여 계산하였고, 삼각함수의 sum의 개수는 50개로 하였으며, 삼각함수 근사를 위한 반사계수의 sampling 구간 W 는 $3k_0$ 이상으로 정해주면 정확하게 공간 영역의 그린 함수가 근사됨을 확인하였다.

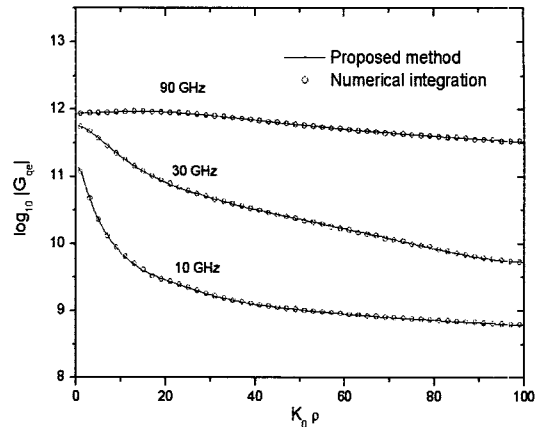
그림 8은 관측점의 수직 성분 $z=0$ 인 위치에 있다고 가정할 때, 변하는 관측거리 $k_0\rho$ 에 대해 벡터 포

텐셀과 스칼라 포텐셜에 대한 closed-form 공간 영역 그린 함수의 결과를 나타낸 그림으로 주파수 7.5

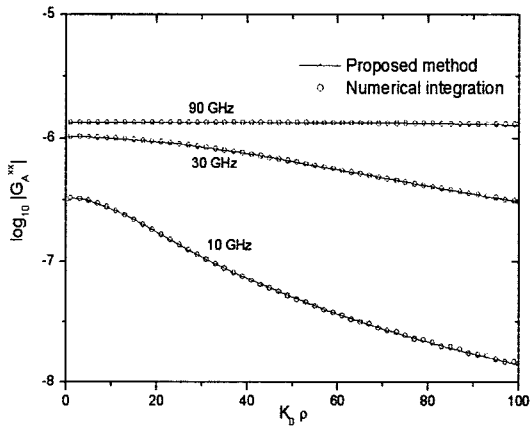
GHz, 30 GHz, 90 GHz에 대해서 수평거리에 따른 공간 영역 그린 함수를 수치적분 및 RAIM 결과와 비교



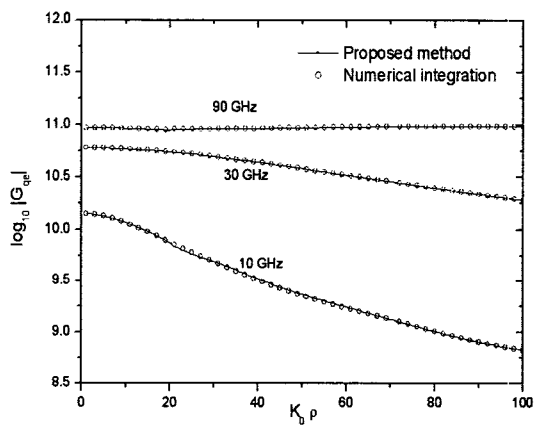
(a) $z = 0.01$ m



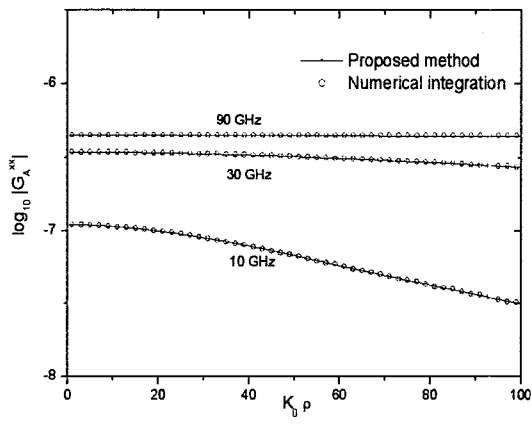
(a) $z = 0.01$ m



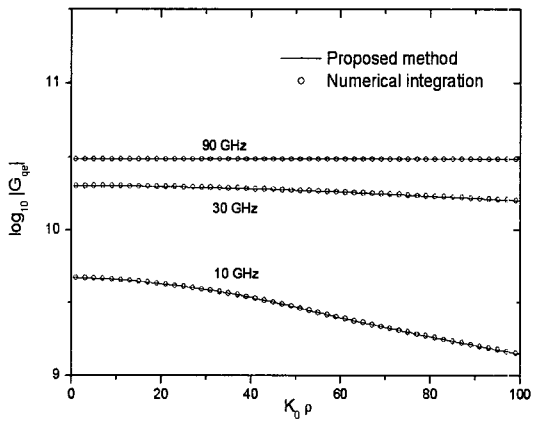
(b) $z = 0.1$ m



(b) $z = 0.1$ m



(c) $z = 0.3$ m



(c) $z = 0.3$ m

그림 10. 함수 G_A^{xx} vs. $k_0\rho$

Fig. 10. The function G_A^{xx} vs. $k_0\rho$.

그림 11. 함수 G_{ge} vs. $k_0\rho$

Fig. 11. The function G_{ge} vs. $k_0\rho$.

한 그림으로 주파수와 관측 거리 $k_0\rho$ 에 대해 넓은 범위에 걸쳐 매우 정확한 결과를 내고 있음을 확인

할 수 있다. 하지만 관측점의 수직 성분 z 가 변하게 되며, 그 결과가 달라진다. 그림 9는 관측점의 수직

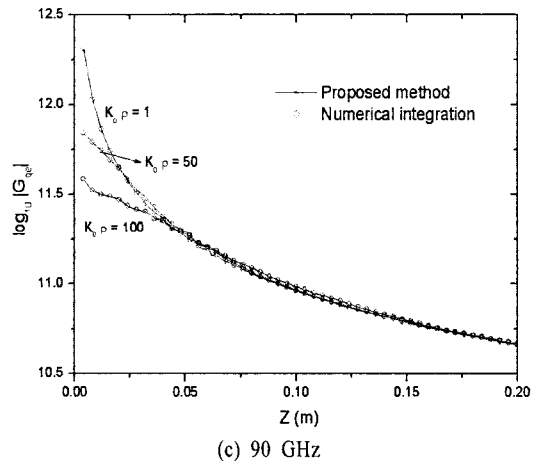
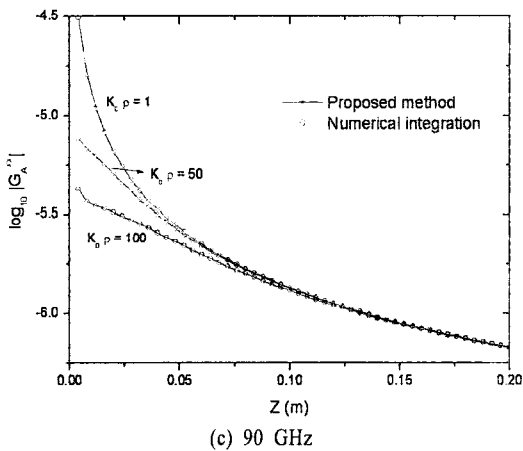
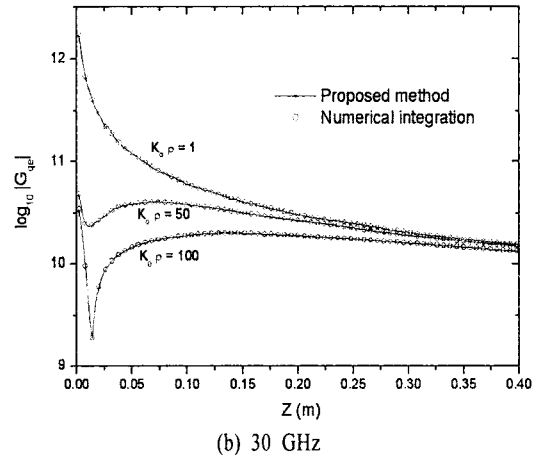
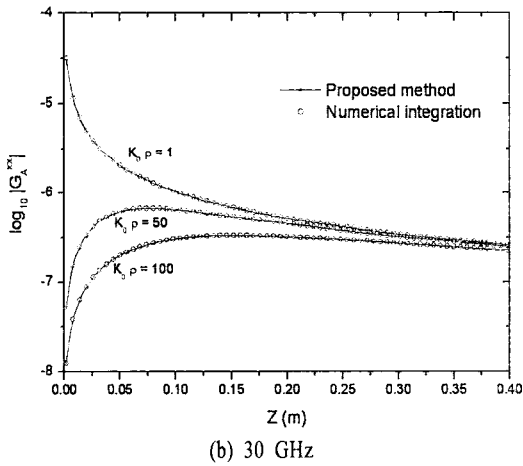
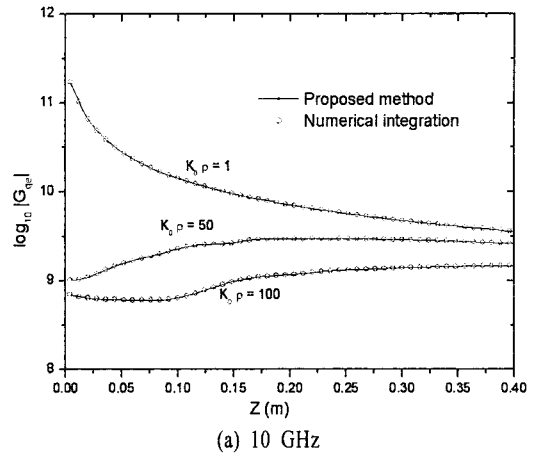
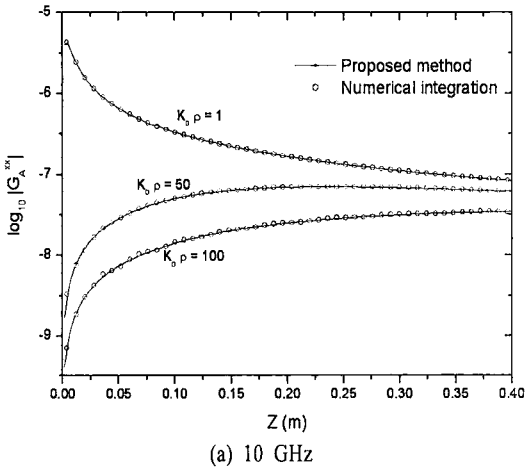


그림 12. 함수 G_A^{xx} vs. z
Fig. 12. The function G_A^{xx} vs. z .

그림 13. 함수 G_{qe} vs. z
Fig. 13. The function G_{qe} vs. z .

성분 $z=0.022$ m 일 때, 주파수를 10, 30, 90 GHz로 각각 고정하고 전원 점과 관측점 사이의 x-y 평면상의 거리 $k_0\rho$ 변화시키면서 구한 벡터 포텐셜과 스칼라 포텐셜 공간 영역 그린 함수로 RAIM, 수치적분, 제안하는 방법의 결과를 비교한 그림으로 z 가 임의의 값을 가질 때, 주파수가 커질수록 RAIM 결과 값이 오차가 발생함을 확인할 수 있다.

제안하는 방법의 정확성을 증명하기 위해서 $z=0.01, 0.1, 0.3$ m인 각각의 z 에 대해서, 10 GHz, 30 GHz, 90 GHz에서 수평 관측 거리 $k_0\rho$ 에 대한 공간 영역 그린 함수를 구하여 수치적분과 비교하였고, 수직관측거리 z 에 대해서도 주파수 10, 30, 90 GHz 각각의 주파수에서, 수평 관측 거리 $k_0\rho=1, 50, 100$ 에 대해서 그린 함수를 구하여 수치 적분과 비교하였다. 그림 10과 11은 $z=0.01, 0.1, 0.3$ m 각각에서 수평 관측 거리 $k_0\rho$ 에 대한 공간 영역 그린 함수 G_{xx}^A 와 G_{ee} 의 계산 결과를 수치 적분과 비교한 그림이고, 그림 12와 13은 $f=10, 30, 90$ GHz 각각에서 수직관측거리 z 에 대한 공간영역 그린 함수 G_{xx}^A 와 G_{ee} 의 계산결과를 수치적분과 비교한 그림이다. 이 결과를 통해 제안하는 방법이 주파수뿐만 아니라 관측 거리 (ρ, z)에 대해서 넓은 범위에 걸쳐 매우 정확한 방법임을 확인할 수 있다.

V. 결 론

일반적인 마이크로스트립 구조의 해석을 위한 closed-form 공간 영역 그린 함수를 구하기 위해 새로운 방법을 제시하였다. Closed-form 그린 함수를 구하는 기존의 대표적인 방법으로 RAIM이 있다. 이 방법은 폐경로를 형성하지 않는 적분 경로로 인해 불완전하게 pole을 추출함으로써 나머지 파수 영역 그린 함수에 그 pole에 대한 영향이 존재하게 되어 pole을 추출한 나머지 부분을 근사하게 될 경우 관측 점 z 를 포함한 파수 영역 그린 함수를 근사함으로써 z 가 변하게 될 경우 똑같은 근사 과정을 반복하게 하는 비효율성을 발견하게 되었다. z 가 커질수록 파수 영역 그린 함수의 변화가 심해짐을 확인하였다. 파수 영역 함수 전체를 그대로 근사하는 기존의 방법은 이와 같이 함수의 변화가 심할 경우 근사하기가 어려워지고, 결국 z 가 커질수록 결과에 오차가 발생

함을 확인하였다. 이런 문제를 해결하기 위해 제시한 방법은 적분 경로를 k_ρ 평면에서 k_{z0} 평면으로 변환하여 적분 경로를 완전히 단아버리는 방법으로, 적분 경로를 단아버림으로서 온전한 유수정리를 사용할 수 있었고, 그림으로써 SIP를 평면의 실수축을 따르는 적분과 pole 성분 두 부분으로 완전히 분리할 수 있었다. 이 방법으로 구해진 공간 영역 그린 함수는 정확할 뿐만 아니라 z 성분까지 고려된, z 의 변화에 대해 기존의 방법에 존재하던 불필요한 계산량을 줄일 수 있다는 것을 확인하였다.

참 고 문 헌

- [1] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*. Malabar, FL: Krieger, 1983.
- [2] M. Kahrizi, T. K. Sarkar, and Z. A. Maricevic, "Space domain approach for the analysis of printed circuit", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-42, pp. 450-457, 1994.
- [3] Y. L. Chow, J. J. Yang, D. H. Fang, and G. E. Howard, "Closed-form spatial Green's function for the thick substrate", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-39, pp. 588-592, 1991.
- [4] R. A. Kipp, C. H. Chan, "Complex image method for sources in bounded regions of multilayer structures", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-42, pp. 860-865, May 1994.
- [5] G. Dural, M. I. Aksun, "Closed-form Green's functions for general sources and stratified media", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-43, pp. 1545-1551, 1995.
- [6] M. I. Aksun, "A robust approach for the derivation of closed-form green's functions", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-44, pp. 651-658, May 1996.
- [7] Y. -D. Kang, T. -K. Lee, "Accurate closed-form Green's function for coplanar waveguide from real-anxis integration", *IEICE Trans. Communications*, vol. E86-B, no. 8, Aug. 2003.
- [8] W. C. Chew, *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*. New York: Van Nostrand, 1990.

[9] 강연덕, 이택경, "일반적인 전원을 포함하는 평판 구조에 대한 정확한 Closed-form 그린 함수", 전자공학회논문지, TC편, 41권, 제6호, pp. 79-85, 2004년 6월.

[10] Sung-Chan Song, Yeon-Duk Kang, and Taek-Kyung Lee, "Fast analysis of CPW structure by using the Green's function from real-axis integration me-

thod", *Asia-Pacific Microwave Conference(APMC '03)*, Seoul, Korea, pp. 805-808, Nov. 2003.

[11] Y. Hua, T. K. Sarkar, "Generalized pencil-of-function method for extracting poles of an EM system from its transient response", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-37, pp. 229-234, Feb. 1989.

양 승 우



2003년 2월: 한국항공대학교 항공 전자 및 정보통신공학부 (공학사)
 2005년 2월: 한국항공대학교 항공 전자공학과 (공학석사)
 2005년 4월~현재: LG전자 MC연구소
 [주 관심분야] 전자파 수치 해석

김 건 우

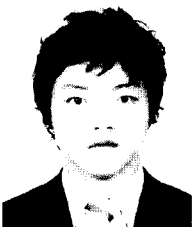


2000년: 금오공과대학교 전자통신 공학과 (공학사)
 2002년: 금오공과대학교 전자통신 공학과 (공학석사)
 2002년 3월~현재: 경북대학교 전자공학과 박사과정
 2007년 1월~현재: 삼성탈레스 기술연구소

술연구소

[주 관심분야] 전자파 산란, 안테나설계

김 성 진



2006년 2월: 한국항공대학교 전자 및 항공전자공학과 (공학사)
 2008년 2월: 한국항공대학교 항공 전자공학과 (공학석사)
 2008년 1월~현재: KMW(주) 연구3실 1팀 연구원
 [주 관심분야] 레이더 시스템, 초고

주파 소자, 전자파 해석 등

이 택 경



1983년 2월: 고려대학교 전자공학과 (공학사)
 1985년 2월: 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 (공학석사)
 1990년 2월: 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 (공학박사)
 1990년 5월~1991년 4월: Univ. of

Texas at Austin, Post-Doctoral Fellow

1991년 9월~1992년 2월: 한국과학기술원 정보전자 연구소 연구원

2001년 7월~2002년 7월: Univ. of Illinois, Urbana-Champaign, Associate Visiting Research Professor

1992년 3월~현재: 한국항공대학교 항공전자 및 정보통신공학과 교수

[주 관심분야] 마이크로파, 안테나, 전자파 해석, 레이더