

## 직사각형용기내 물의 자연대류현상에 관한 수치해석

김명준†

(원고접수일 : 2008년 2월 4일, 심사완료일 : 2008년 2월 5일)

### Numerical Analysis on Natural Convection of Water in a Rectangular Vessel

Myoung-Jun Kim†

**Abstract** : This present study has dealt with the natural convection of water in a rectangular vessel which has cooling point at the center of itself with numerically. The finite difference method (FDM) is presented for the two-dimensional computer simulation of water controlled by natural convection and heat conduction. According to this study, It is cleared that the overturn of density is clearly existed at the temperature of 4[°C] and that was compared with experimental result. Also the change of natural convection is known from the streamlines and isotherms. Most of all, It is cleared that the overturn of natural convection is changed with time caused by the fact that the temperature and density relationship of water.

**Key words** : Natural convection(자연대류), Finite difference method(유한차분법), Overturn of density(밀도역전현상), Streamline(유선), Isotherm(등온선)

#### 기호설명

$g$	: 중력가속도 [m/s <sup>2</sup> ]	$D$	: 계수 [-]
$p$	: 압력 [Pa]	$i, j$	: index [-]
$P$	: 격자점 위치 [-]	$N$	: 북쪽의 격자점 [-]
$T$	: 온도 [°C]	$W$	: 서쪽의 격자점 [-]
$T_{bottom}$	: 수조안의 하부측 온도 [°C]	$E$	: 동쪽의 격자점 [-]
$T_c$	: 저온부의 온도 [°C]	$S$	: 남쪽의 격자점 [-]
$T_h$	: 고온부의 온도 [°C]	$U$	: X방향 무차원 속도 [-]
$T_{top}$	: 수조안의 상부측 온도 [°C]	$V$	: Y방향 무차원 속도 [-]
$u, v$	: 속도 [m/s]	$X$	: X방향 간격 [-]
$A$	: 계수 [-]	$Y$	: Y방향 간격 [-]
		$Z$	: 와도 [-]
		$Gr$	: Grashof 수 [-]

† 교신저자(군산대학교 동력기계시스템공학전공), E-mail: mjkim@kunsan.ac.kr, Tel:063-469-1849

$Pr$	: Prandtl 수 [-]
$Ra$	: Rayleigh 수 [-]
$a$	: 온도확산율 [ $m^2/s$ ]
$\beta$	: 체적팽창계수 [ $1/K$ ]
$\theta$	: 무차원 온도 [-]
$\nu$	: 동점성계수 [ $N \cdot s/m^2$ ]
$\xi$	: 와도함수 [-]
$\rho$	: 밀도 [ $kg/m^3$ ]
$\psi$	: 유동함수 [-]

## 1. 서 론

열전달 분야에 있어 컴퓨터의 도움을 얻어 계산하는 수치해석분야의 급속한 발달에 힘입어 많은 연구가 진행되었다. 특히 자연대류 현상을 재현하는 연구는 수치해석에 있어 매우 획기적인 방법을 제시하였고 현재에도 많은 연구가 진행되고 있다.<sup>(1)~(6)</sup>

본 연구 역시 직사각형용기 중앙에서 열발생이 존재하는 경우의 물에 대한 수치해석을 수행한 연구로서 물의 자연대류 및 밀도역전 현상을 파악하고자 수치해석 기법 중 고전적인 방법인 유한차분법(FDM)을 이용하였다.

본 연구의 주된 목적은 기존의 산업적 제빙시스템 중의 하나인 관외제빙에 대한 자연대류의 양상을 파악하기 위한 것으로, 제빙관(동관)주위의 상변화인 동결의 영향을 고려하지 않았다. 즉, 물의 밀도역전현상에 초점을 맞추어 수치해석을 실행한 것이다.

## 2. 종래의 연구에 대한 고찰

저자의 종래의 연구<sup>(7)</sup>인 실험을 통한 직사각형용기내 물의 온도변화를 나타낸 것이 Fig. 1이다.

Fig. 1은 직사각형용기의 중앙에서 동관에 의한 냉각이 실시되고 있는 경우의 상부 및 하부에 존재하고 있는 물의 온도변화를 시간에 대해 나타낸 것으로 물의 온도가 4( $^{\circ}C$ )를 정점으로 상부 및 하부의 온도가 급격하게 변하고 있음을 알 수 있다.

일반적으로 이러한 현상은 물이 가지고 있는 밀

도역전의 특수한 영향으로 기인하게 된다. 즉, 시간축이 80분에 도달하기 전에는 직사각형용기내의 하부영역에 존재하는 물의 자연대류가 강해져 온도하강이 급격하게 일어난다. 그 후 하부영역의 온도가 4( $^{\circ}C$ )에 도달하게 되면 밀도안정에 의해 자연대류가 약해져 온도변화가 전도에 의한 영향만 존재하여 완만하게 하강하고 있다.

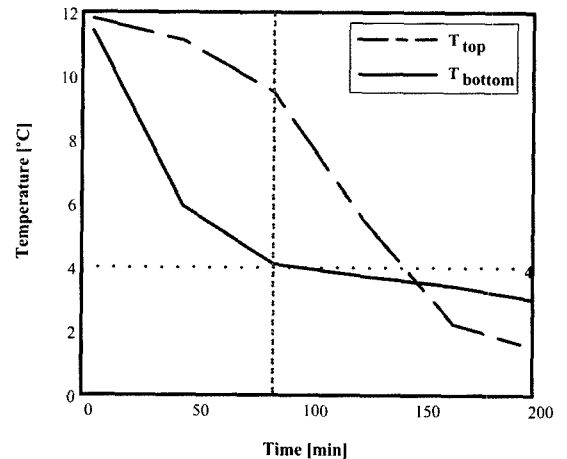


Fig. 1 Characteristic curve of water temperature

상부영역에서는 전술한 하부영역과는 반대로, 실험의 초기영역에 해당하는 80분보다 앞선 영역에서는 밀도안정에 의해 온도의 하강이 완만하게 진행되다가 하부영역에서 밀도안정에 의한 자연대류가 약해질 때 상부에서 강한 자연대류가 존재하여 급속하게 온도가 하강하고 있다.

본 연구는 이와 같은 자연대류 현상을 규명하기 위해 수치해석을 수행한 것이다.

## 3. 지배방정식 및 경계조건

본 연구에서는 차분방법으로 유한차분법을 이용하였고 직사각형영역의 각 면의 경계조건은 단열조건으로 하였으며 모서리는 평균값을 이용하였다.

아래에는 수치해석에 사용된 지배방정식을 나타내고 있다. 또한 해석의 간편성을 도모하기 위해 직사각형용기의 중앙에서 발생하는 열발생(냉각)은 물의 동결온도인 0( $^{\circ}C$ )를 가정한 무차원온도( $\theta$ )

=0)를 이용하였지만, 상변화인 동결 현상은 고려하지 않았다. 그리고 부력장외의 물성치의 온도에 의한 영향은 무시하였다.

본 수치해석에서 사용한 부력장은 Boussinesq 근사를 적용하였다. 즉, 물의 밀도는 압력의 영향을 받지 않고 온도에만 영향을 받는다고 가정하였다.

연속방정식은 다음과 같다.

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

에너지방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ &+ g\beta(T - T_0) \end{aligned} \quad (3)$$

유동함수  $\psi$ 와 와도함수  $\zeta$ 를 도입하여, 무차원화된 기초방정식 및 무차원량. 그리고 무차원수를 정리하면 다음 식들과 같다.<sup>(8)</sup>

유동함수와 와도함수는 다음과 같다.

$$Z = - \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \right) \right] \quad (4)$$

여기서, 유동함수  $\psi$ 와 와도함수  $Z$ 는,

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, V = \frac{\partial \Psi}{\partial X}, Z = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \quad (5)$$

와도수송방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} \left( Z \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \right) - \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial Z}{\partial X} \right) - \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial Z}{\partial Y} \right) \\ + Gr \frac{\partial \theta}{\partial X} \end{aligned} \quad (6)$$

에너지 식(보존형)은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( \theta \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \right) - \frac{\partial}{\partial Y} \left( \theta \frac{\partial \Psi}{\partial X} \right) = \quad (7)$$

$$\frac{1}{Pr} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \right]$$

무차원량과 무차원수는 다음과 같다.

$$X = \frac{x}{b}, Y = \frac{y}{b}, U = \frac{ub}{\nu}, V = \frac{vb}{\nu},$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_h - T_c},$$

$$Gr = \frac{g\beta(T_h - T_c)b^3}{\nu^2}, Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu c_p}{k},$$

$$Ra = Gr Pr, \Psi = \frac{\psi}{\nu}, Z = \frac{\zeta}{\nu b^2} \quad (8)$$

$$\left( T_0 = \frac{T_h + T_c}{2} \right)$$

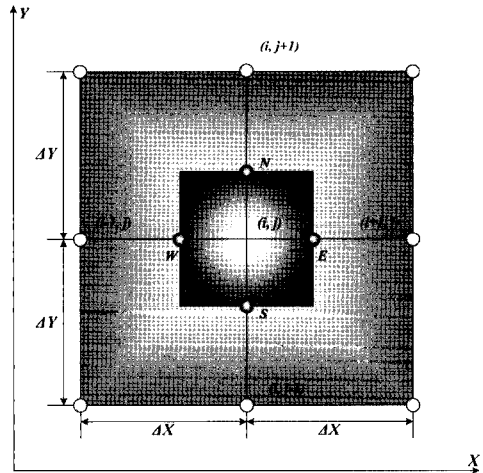


Fig. 2 Difference lattice

무차원화 한 기초방정식은 상류차분해(Up wind scheme)를 적용하여, 등간격인  $\Delta X = \Delta Y$ 로 하여 차분하였다. 차분에 관한 각 격자점에 대해서는 Fig. 2에 상세하게 나타내었다.

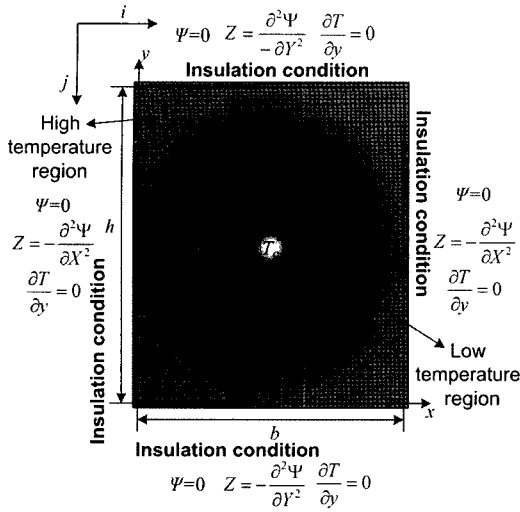


Fig. 3 Boundary conditions

위에서 정의한 지배미분방정식 및 무차원수를 이용하여 얻은 최종적인 차분식은 식 (9)~(11)과 같이 정리할 수 있으며, 경계조건은 Fig. 3에 나타낸 바와 같다.

$$\Psi_{i,j} = \frac{1}{4} (Z_{i,j}\Delta X^2 + \Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j} + \Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1})$$

$$Z_{i,j} = \frac{1}{A_E + A_W + A_N + A_S + 4} [(1 + A_E)Z_{i+1,j} + (1 + A_W)Z_{i-1,j} + (1 + A_N)Z_{i,j+1} + (1 + A_S)Z_{i,j-1} + \frac{1}{2} Gr\Delta X (\theta_{i+1,j} - \theta_{i-1,j})]$$

$$\theta_{i,j} = \frac{1}{A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{4}{Pr}} \left[ \left( \frac{1}{Pr} + A_E \right) \theta_{i+1,j} + \left( \frac{1}{Pr} + A_W \right) \theta_{i-1,j} + \left( \frac{1}{Pr} + A_N \right) \theta_{i,j+1} + \left( \frac{1}{Pr} + A_S \right) \theta_{i,j-1} \right]$$

여기서, 상기의 각 계수는 아래와 같다.

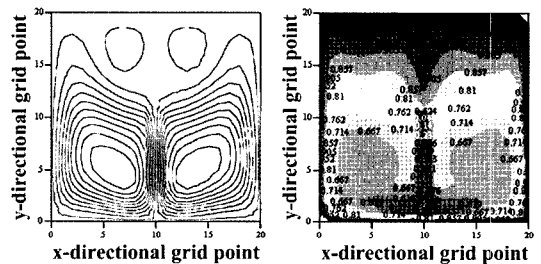
$$\begin{cases} A_E = \frac{1}{8} (D_E + |D_E|) \\ A_W = \frac{1}{8} (D_W + |D_W|) \\ A_N = \frac{1}{8} (D_N + |D_N|) \\ A_S = \frac{1}{8} (D_S + |D_S|) \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} D_E = -\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i+1,j+1} + \Psi_{i+1,j-1} + \Psi_{i,j-1} \\ D_W = \Psi_{i-1,j+1} + \Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1} + \Psi_{i-1,j-1} \\ D_N = -\Psi_{i+1,j+1} + \Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j+1} - \Psi_{i-1,j} \\ D_S = -\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i+1,j-1} + \Psi_{i-1,j} + \Psi_{i-1,j-1} \end{cases} \quad (11)$$

본 연구에서 있어 컴퓨터를 이용한 연산은 Mathcad (Ver. 13)를 이용하여 실시하였고, 계산의 수렴조건으로는 물리량인  $\Psi$  및  $\theta$ 의 변화 한도를  $10^{-4}$ 으로 하였다.

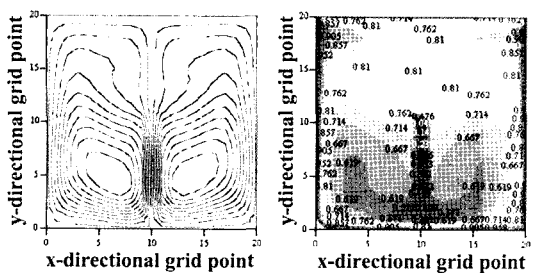
#### 4. 수치해석 결과

Fig. 4~5는 전술한 종래의 실험에서 얻어진 직사각형용기의 하부 및 상부영역의 온도변화를 규명하기 위해 실시한 수치해석의 결과로, 하부영역의 온도인  $T_{bottom}$ 의 온도가 4[°C]에 도달하기 전까지의 수치해석 결과를 나타낸 것이 Fig. 4이고 상부영역의 온도가 4[°C]에 도달한 시간에서의 수치해석결과를 나타낸 것이 Fig. 5이다.



(a) Stream line (b) Non-dimensional temperature

Fig. 4 Numerical analysis result in the first half part



(a) Stream line (b) Non-dimensional temperature

Fig. 5 Numerical analysis result in the second half part

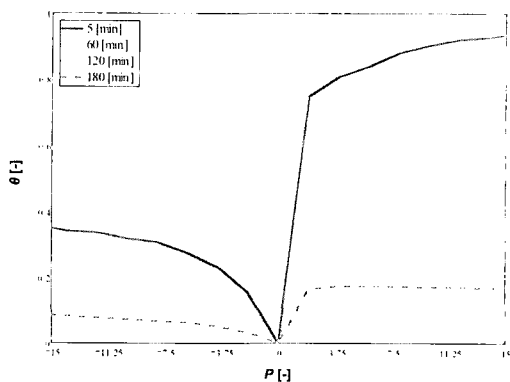


Fig. 6 Temperature change with time

Fig. 4로부터 알 수 있는 바와 같이 계산영역의 중심보다 아랫부분에서 급격한 자연대류현상이 존재하고 있음을 알 수 있다. 즉, 주위의 온도보다 중심에서의 온도가 낮기 때문에 물의 밀도가 중심에서 가장 높아져 아랫방향으로 자연대류가 발생하고 있음을 알 수 있다. 하지만, 중심보다 윗부분에서는 온도가 9[°C] 정도로 열발생(냉각)이 있는 중심보다 상대적으로 온도가 높아 밀도안정으로 자연대류가 거의 발생하지 않고 있다. 이러한 현상은 Fig. 4(b)의 등온선그래프에서 보다 확실하게 알 수 있다.

한편, 계산영역 윗부분의 온도가 4[°C]에 도달했을 때의 수치해석 결과인 Fig. 5를 보면, 전술한 Fig. 4와는 반대로 윗부분에서 자연대류가 활발해지고 있음을 알 수 있다. 즉, 물의 최대 밀도점인 4[°C]에 해당하는 구간이 상부영역에 존재하게 되어 중앙에서 냉각이 발생하여도 자연대류가 윗부분

에서 존재하게 된다. 또한, 이러한 현상은 Fig. 5(b)의 등온선 그래프로부터 보다 확실하게 알 수 있다.

상기의 Fig. 4~5에서 얻은 결과를 계산영역의 중심에서 상하방향에 위치한 각 격자점의 온도 변화를 시간에 대해 정리한 것이 Fig. 6이다.

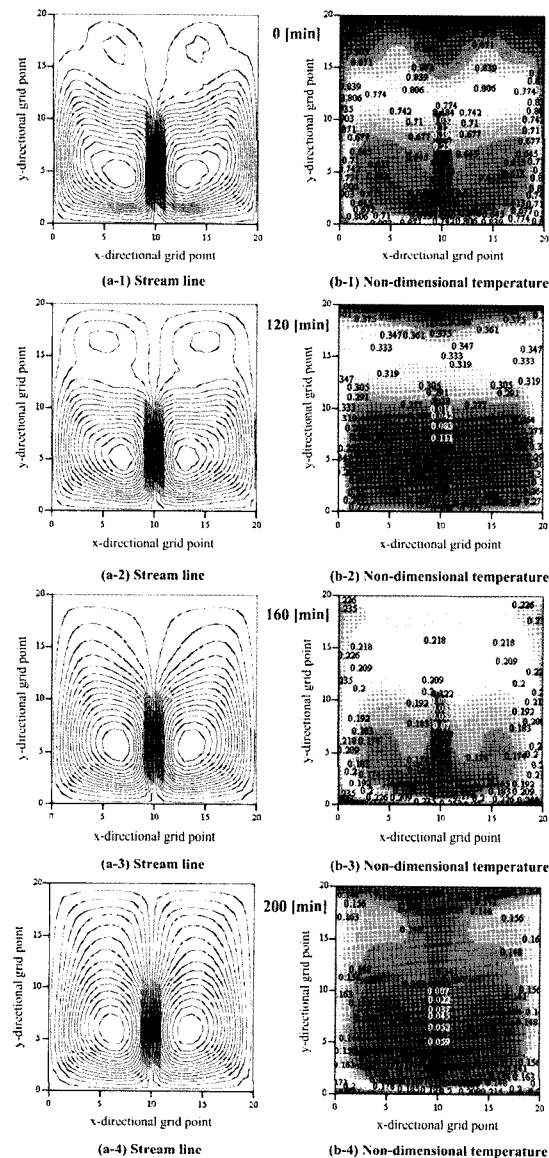


Fig. 7 Numerical analysis result with time

Fig. 6의 x축에 해당하는 값이 0보다 큰 부분은

중앙에서부터 윗부분으로 증가하는 위치를 나타내고 있고, 음수 영역은 반대로 중앙에서부터 아랫부분에 존재하는 격자점을 의미한다.

전술한 바와 같이 Fig. 6의 x축에 해당하는 값이 음수영역인 하부영역에서 초기에 자연대류가 활발히 일어나고 있음을 알 수 있다. 또한 시간이 진행됨에 따라 상부영역으로 자연대류가 이동하여 상부영역에서도 급격한 폭으로 온도가 내려가고 있음을 알 수 있다. 최종적으로 시간이 진행됨에 따라 계산영역내의 온도가 서로 근접하여 자연대류가 약해지고 있음을 알 수 있다.

본 연구에서 실시한 수치해석의 시간에 대한 결과를 정리한 것이 Fig. 7이다.

## 5. 결 론

본 연구는 일반적인 정적제빙형태에 많이 사용되는 관외제빙에서 발생하는 물의 밀도역전현상을 파악하기 위하여 수치해석적 접근방법을 이용한 연구로써, 아래와 같은 결론을 얻었다.

- (1) 상변화를 제외한 지배방정식의 차분을 통해 직사각형용기내 물의 자연대류현상을 규명하였다.
- (2) 물의 밀도역전현상에 의한 자연대류의 존재를 실험결과와 비교한 결과, 수치해석의 유선 및 등온선 그래프로부터 자연대류현상이 바뀔을 알았다.
- (3) 열발생이 있는 사각형용기의 중앙을 기점으로, 냉각현상의 초기영역에서는 사각형용기의 하부에서 자연대류가 활발히 진행되었고, 시간이 경과함에 따라 자연대류가 사각형용기의 상부로 이동되어 감을 알았다.

## 후 기

이 논문은 2008년 군산대학교 수산과학연구소 학술연구비지원에 의하여 연구 되었음.

## 참고문헌

[1] Inaba, H., Kim, M. J. and Horibe, A., 2002, Heat Transfer Characteristics of

Latent Microcapsule-Water Mixed Slurry Flowing in a Pipe with Constant Wall Heat Flux(Numerical Analysis), Transactions of the JSME, Vol. 68, No. 665.

- [2] Riu, K. J., Choo, H. L., Numerical Analysis of Natural Convection From an Inclined Ice Flat Plate Immersed in Cold Water Near Its Density Maximum, Journal of the KSME, Vol.16, No.1, pp. 2136~2149.
- [3] Lee, J. W., Emery, Asheley F., A Numerical Study for Natural Convective Heat Transfer by Finite Element Method, Journal of the KOSEE, Vol.7, No.1, pp. 113~121.
- [4] Lee, J. W., Emery, Asheley F., Numerical analysis for the effect of property variations on natural convection, Proceedings of the KSME fall annual conference, B, pp. 480~485.
- [5] Riu, K. J., Cho, S. H., Kim, B. H., Numerical Analysis of Natural Convection From a Horizontal Isothermal Surface Immersed in Water Near Its Density Extremum, Journal of the KSME, Vol.14, No.1, pp. 197~206.
- [6] Jo, N. C., Kim, D. C., Lee, C. M., Lim, J. S. Melting of Ice Inside a Horizontal Cylinder under the Volume Change., Journal of the SAREK, Vol.13, No.12, pp.1266-1275.
- [7] Yu, J. S., Park, J. M., Kim, M. J., Park, K. W., Ice Making Characteristics on Ice-on-coil Type Ice Maker, ISMT 2007 Proceedings, pp.225-230.
- [8] 岩井 裕, 大村高弘, 小林健一, 富村壽夫, 羽田光明, 平澤茂樹, 吉田英生, エクセルとマウスでできる熱流体のシミュレーション.

## 저 자 소 개



### 김명준(金明俊)

1971년3월18일. 1994년 한국해양대학교 해사대학 기관공학과 졸업(공학사). 1998년 한국해양대학교 대학원 기관공학과 졸업(공학석사). 2002년 일본 오카야마대학 대학원 자연과학연구과 졸업(공학박사). 2002년~2003년 일본 오카야마대학 기계공학부 외국인 객원연구원. 2003.9~현재 군산대학교 해양과학대학 동력기계시스템 공학부 조교수.