

論文

역해석 기법을 이용한 수치해의 오차 분석 연구

양성욱*, 이상철**

A Study on the Error Analysis of the Numerical Solution
using Inverse Method

Sungwook Yang*, Sangchul Lee**

ABSTRACT

An inverse method is introduced to construct the problem for the error analysis of the numerical solution of initial value problem. These problems constructed through this method have a known exact solution, even though analytical solutions are generally not obtainable. The process leading to the exact solution makes use of an initially available approximate numerical solution. A smooth interpolation of the approximate solution is forced to exactly satisfy the differential equation by analytically deriving a small forcing function to absorb all of the errors in the interpolated approximate solution. Using this special case exact solution, it is possible to investigate the relationship between global errors of a candidate numerical solution process and the associated tuning parameters for a given problem. Under the assumption that the original differential equation is well-posed with respect to the small perturbations, we thereby obtain valuable information about the optimal choice of the tuning parameters and the achievable accuracy of the numerical solution.

key Words : Inverse Method(역해석 기법), Numerical Solution(수치해), Error Analysis(오차 분석), Chebyshev Polynomials (Chebyshev 다항식)

1. 서 론

항공기 및 우주비행체의 동역학 및 제어 분야에서 미분 방정식의 해를 얻기 위해 다양한 수치 해석 방법이 사용되고 있다. 시뮬레이션을 위한 초기값 문제는 여러 가지 수치해석 방법으로 그 해를 구할 수 있으며[1], 2점 경계값 문제는 gradient 방법, shooting 방법, 특수해를 이용한 방법 등을 통해 그 결과를 얻을 수 있다[2]. 일반적으로 정확한 해는 모르며, 수치해석을 이용한 결과는 정확한 해석적 해가 아닌

절단오차(truncation error)와 반올림오차(round-off error)를 포함한 수치해를 제공한다. 이와 같은 오차를 줄이기 위해 step size, tolerance와 같은 변수를 임계값까지 줄여 정확도를 높이려고 하지만 보통은 수치해의 정확도가 떨어진다. 이에 대해 Shampine은 step size와 국부 허용오차(local error tolerance)에 대한 컴퓨터, 계산기 등과 같은 계산 도구의 한계를 고려하였으며[3], 초기 step size를 자동으로 결정하는 신뢰성이 높고 효율적인 방법을 제안하였다[4]. 하지만 이러한 수치해석 방법들은 정확한 해를 알고 있다면 수치해가 갖는 정확도를 확인할 수 있으나, 정확한 해를 모르는 경우에는 수치해의 정확도를 확인할 수가 없다. 따라서 정확한 해를 모르는 경우 수치해가 어느 정도의 정확도를 갖는지를 분석할 수 있는 방법이 있다면 그 방법은 수치해의 정확도를

2008년 5월 16일 접수 ~ 2008년 6월 24일 심사완료

* 한국항공대학교 대학원 항공우주 및 기계공학과

** 한국항공대학교 항공우주 및 기계공학부

연락처, E-mail : slee@kau.ac.kr

경기도 고양시 덕양구 화전동 200-1

판단할 중요한 도구가 된다.

본 논문에서는 수치해의 정확도를 연구하기 위해 주어진 문제에 대해 얻은 수치해에 대한 정확한 해석적 해를 구하여, 정확한 해석적 해를 알고 있는 새로운 문제를 만듦으로써 조절 변수에 대한 수치해의 오차를 분석하였다. 또한, 정확한 해석적 해를 알고 있는 문제는 주어진 문제와 매우 유사하다는 가정 하에 이 문제에 대해 수치해석을 통해 구해진 수치해와 정확한 해석적 해와의 오차를 분석함으로써 수치해석을 위한 최적의 조절 변수, 수치해의 정확도와 같은 정보를 얻을 수 있다. 역해석 기법은 정확한 해석적 해를 구하기 위해 제시되었고, 이 과정에서 정확한 해석적 해는 주어진 문제에 대한 수치해를 이용해 시간 t 에 대한 연속적이고 미분가능한 함수로 구해진다. 주어진 문제에 대한 수치해를 이용해 연속적이고 미분가능한 함수를 구하기 위해 symbolic manipulation이 가능한 프로그램이 사용되었다. 본 논문에서는 제시된 방법에 대한 예제로써 이차 상미분방정식과 two body problem을 사용하였다.

II. 역해석 기법

수치해의 정확도를 판단하기 위해, 주어진 수치해에 근사한 정확한 해석적 해가 구해진다면 구해진 해를 주어진 문제에 대입함으로써 perturbation 항을 구할 수 있게 된다. 그리고 perturbation 항이 주어진 문제에 더해짐으로써 구해진 정확한 해석적 해를 갖는 새로운 상미분방정식을 구성할 수 있다. 이 문제는 수치해와 정확한 해석적 해를 비교함으로써 수치해의 정확도를 확인할 수 있게 한다[5].

정확한 해석적 해는 주어진 문제에서 얻어진 수치해에 대해 평활화 과정을 통해 구할 수 있다. 이 때 수치해석의 결과는 이산형태의 해이고, 평활화 과정을 통해 얻은 정확한 해석적 해는 연속적이고 미분가능한 해가 된다. 평활화 과정에서 구해지는 연속적이고 미분가능한 해는 이산화 Chebyshev 다항식을 사용하여 구하였다[6,7].

평활화 과정에서 얻을 수 있는 정확한 해석적 해와 perturbation항은 symbolic manipulation이 가능한 프로그램을 이용하여 구할 수 있다. 본 논문에서는 정확한 해석적 해와 perturbation 항을 구하기 위해 symbolic manipulation이 가능한 프로그램 중 하나인 Mathematica[8]를 이용하였다.

2.1 평활화(Smoothing)

다음과 같은 각각의 $t_0 \leq t \leq t_f$ 에서의 1차와 2차 상미분방정식의 초기값 문제를 고려하자. 이때 일차와 이차 시스템에 대해 식별하는 이유는 실제로는 이차 시스템이지만 일차로 변환하게 될 경우 생기는 결점 때문이다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, t), \quad x(t_0) = x_0 \\ f_1: R^N \times R &\rightarrow R^N \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= f_2(x, \dot{x}, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \\ f_2: R^N \times R^N \times R &\rightarrow R^N \end{aligned} \quad (2)$$

위의 식 (1), (2)에서 얻은 수치해는 다음과 식 (3)과 같이 t 에 대한 이산 형태로 표현될 수 있다. 이 때 t 는 일정한 간격 Δt 를 갖는다.

$$x_1 = g(t_1), \quad x_2 = g(t_2), \quad \dots, \quad x_n = g(t_n) \quad (3)$$

주어진 n 개의 수치해와 가까운 연속적이고 미분가능한 함수를 만들기 위해 이산화 Chebyshev 다항식이 사용되었다. 이산화 Chebyshev 다항식을 사용한 최소자승 근사법은 주어진 문제에서 구해진 n 개의 수치해로부터 정확한 해석적 해를 구할 수 있게 한다.

이산화 Chebyshev 다항식은 직교다항식으로서 실수인 독립변수에 대해 각 차수의 Chebyshev 다항식의 값은 $[-1, 1]$ 의 범위에 있게 된다. Fig. 1은 1차~15차 Chebyshev 다항식을 나타낸다[9].

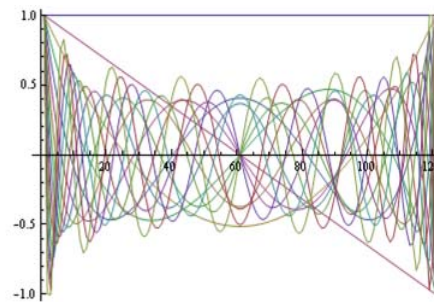


Fig. 1 Chebyshev 다항식 ($0 \leq u \leq 120$)

이 때 Chebyshev 다항식이 갖는 이산 직교성을 이용하기 위해 독립변수인 시간 t 는 선형 변환을 통해 무차원화한다.

$$\bar{t}(t) = \frac{t-t_1}{\Delta t} \tag{4}$$

$G(\bar{t})$ 가 m 개의 Chebyshev 다항식을 기저 함수로 하는 선형 결합으로 이루어진 함수라고 하면 $x=g(t)=G(\bar{t})$ 가 되며, $G(\bar{t})$ 는 다음과 같다.

$$G(\bar{t}) = \sum_{i=1}^m a_i T_i(\bar{t}) \quad (m \leq n) \tag{5}$$

여기서 a_i 는 계수, $T_i(\bar{t})$ 는 i 차 Chebyshev 다항식을 나타낸다.

독립변수 $u_m = m$ ($m = 0, 1, \dots, N$)이고 가중치 $w(u)=1$ 이라고 하면 Chebyshev 다항식은 다음과 같다.

$$T_n(u) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} C_m(u) \frac{u!(N-m)!}{(u-m)!N!} \tag{6}$$

Chebyshev 다항식의 확장은 순환 관계를 통해 쉽게 구할 수 있으며, 확장된 식의 미분은 마찬가지로 순환 관계를 이용하여 구할 수 있다. 순환 관계에 대한 식은 다음과 같다[10].

$$\begin{aligned} T_0 &= 1 \\ T_1 &= 1 - \frac{2u}{N} \\ (n+1)(N-n)T_{n+1}(u) &= (2n+1)(N-2u)T_n(u) \\ &\quad - n(N+n+1)T_{n-1}(u) \end{aligned} \tag{7}$$

또한 Chebyshev 다항식이 갖는 이산 직교성을 이용하면 식 (5)에서의 계수 a_i 는 다음 식 (8)을 이용해 구해진다.

$$a_j = \frac{\sum_{i=1}^n x_i T_j(\bar{t}_i)}{\sum_{i=1}^n T_j(\bar{t}_i) T_j(\bar{t}_i)} \quad (1 \leq j \leq m) \tag{8}$$

여기서 x_i 는 식 (1),(2)에서 구해진 수치해이며, $T_j(\bar{t}_i)$ 는 j 차 Chebyshev 다항식의 \bar{t}_i 에서의 값이다.

식 (5)에서 계수 a_i 와 Chebyshev 다항식 $T_i(u)$ 를 이용해 $G(\bar{t}(t))$ 가 구해진다. $x=g(t)=G(\bar{t})$ 이므로 식 (1),(2)에서 얻은 수치해에 대해 연속적이고 미분가능한 함수인 $x_b(t)$ 를 얻을 수 있다.

2.2 Perturbation 항

$x_b(t)$ 는 식 (1),(2)에 대해 구해진 수치해를 평활화 과정을 이용해 구한 연속적이고 미분가능해 해석적 해이다. 하지만 $x_b(t)$ 는 식 (1),(2)를 정확하게 만족시키는 해가 아니므로 주어진 상미분방정식인 식 (1),(2)의 $x(t)$ 에 $x_b(t)$ 를 대입하면 양변이 같아지지 않는다.

이 때 양변의 차이인 perturbation 항을 구할 수 있으며, perturbation항은 t 에 대한 연속함수이다. 일차 상미분방정식에서의 perturbation항을 $e_1(t)$, 이차 상미분방정식의 perturbation항을 $e_2(t)$ 라 하면 각각의 perturbation항은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} e_1(t) &= \dot{x}_b(t) - f_1(x_b(t), t) \\ e_2(t) &= \ddot{x}_b(t) - f_2(x_b(t), \dot{x}_b(t), t) \end{aligned} \tag{9}$$

식 (1),(2)에서의 일차와 이차 상미분방정식은 구해진 perturbation항을 추가함으로써 정확한 해가 $x_b(t)$ 인 새로운 일차와 이차 상미분방정식 (10), (11)로 각각 바꿀 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_1(x(t), t) + e_1(t), \quad t_0 \leq t \leq t_f \\ x(t_0) &= x_b(t_0) \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= f_2(x(t), \dot{x}(t), t) + e_2(t), \quad t_0 \leq t \leq t_f \\ x(t_0) &= x_b(t_0), \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_b(t_0) \end{aligned} \tag{11}$$

식 (9)에서 구해진 perturbation항이 작을수록 식 (10),(11)은 식 (1),(2)에 가까운 상미분방정식이 된다. 여기서, 새로운 상미분방정식의 정확한 해석적 해인 $x_b(t)$ 를 구하기 위한 최소자승 근사법은 독립변수 구간의 양 끝부분에서는 일반적으로 좋지 않은 결과를 보인다. 그리고 이러한 문제는 perturbation항 $e(t)$ 를 구할 때 양 끝부분에서 같은 결과를 보이게 한다. 이와 같은 문제를 보완하기 위해 기존의 구간보다 증가된 구간을 사용하여 최소자승 근사를 수행하였으며, 증가된 구간은 기존 구간을 20% 증가시킨 것이다. 만약 구해진 perturbation이 크다고 생각될 경우 Chebyshev 다항식의 차수를 증가시켜 크기를 감소시킬 수 있다. 하지만 Chebyshev 다항식의 차수가 증가되어도 perturbation의 크기가 감소하지 않는다면 수치해석을 재수행하여 주어진 문제에 대한 수치해를 얻고, 전체 과정을 다시 진행시킨다.

III. 예 제

이차 상미분방정식과 two body problem의 초기값 문제에 대한 예제를 제시된 방법을 이용해 설명하였다. 여기서 식 (10),(11)의 수치해를 $x_s(t)$ 라 한다면, $\|x_s(t) - x_b(t)\|$, 즉 $x_s(t)$ 와 $x_b(t)$ 의 차이가 조절 변수에 대해 어떠한 추이를 나타내는 지를 확인해 보았다.

본 논문에서는 step size와 tolerance를 변화시켜 결과를 확인하였다. Step size에 대한 오차의 변화는 4차 Runge-Kutta 방법을 사용하여 구하였고[11], tolerance에 대한 오차의 변화는 IMSL subroutine인 DIVPRK를 사용하여 구하였다[12].

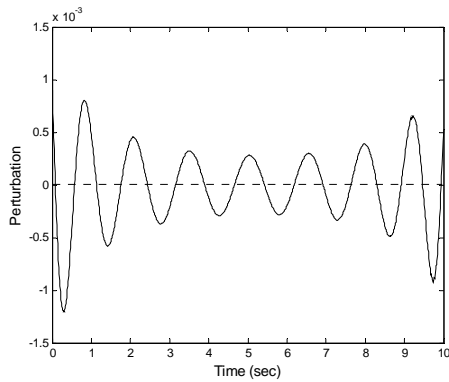


Fig. 2 이차 상미분방정식의 perturbation 항

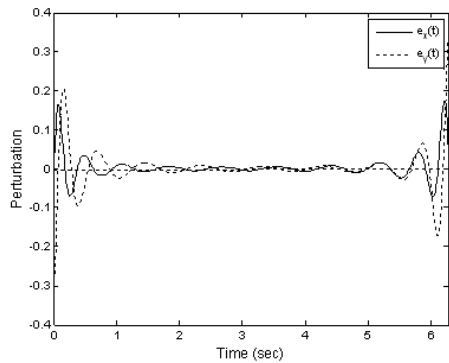


Fig. 3 Two body problem의 perturbation 항

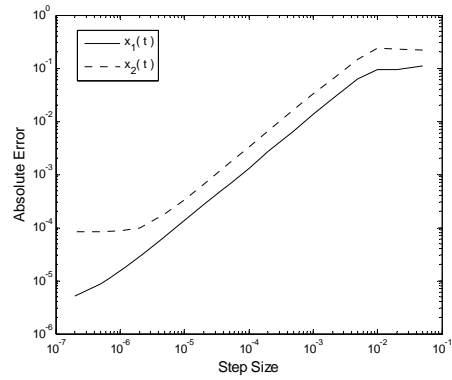


Fig. 4 Step size에 대한 오차 변화

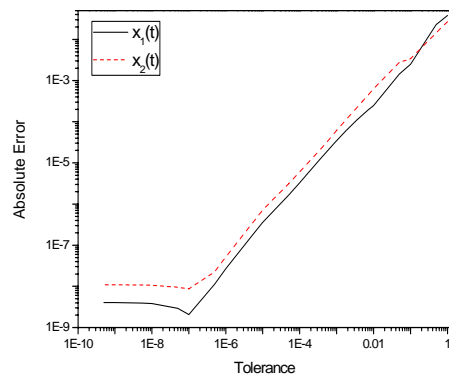


Fig. 5 Tolerance에 대한 오차 변화 (이차 상미분방정식)

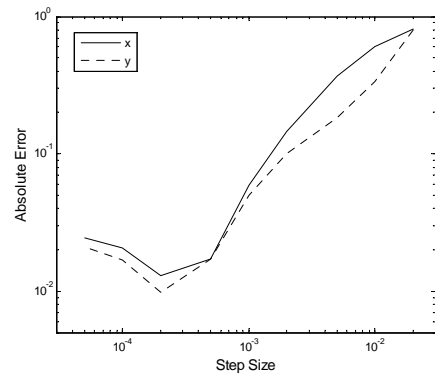


Fig. 6 Step size에 대한 오차 변화 (Two body problem)

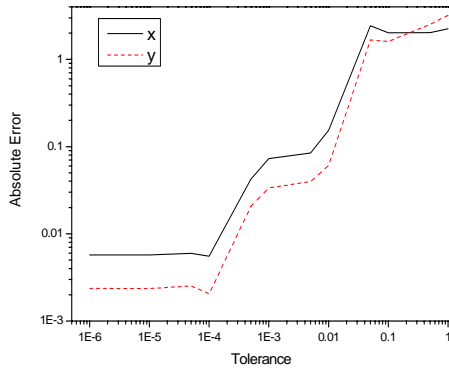


Fig. 7 Tolerance에 대한 오차 변화 (Two body problem)

3.1 이차 상미분방정식

이차 상미분방정식에 대한 결과를 확인하기 위해 사용된 예제는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= -2.5^2 x(t) \\ x(0) &= 0.1, \dot{x}(0) = 0 \\ 0 \leq t &\leq 10 \end{aligned}$$

위의 문제에서 주어진 문제에 대한 수치해는 기존 구간의 20%를 증가시킨 $-1 \leq t \leq 11$ 에서 4차 Runge-Kutta 방법을 사용하여 구해진 121개이다. 또한, $x_b(t)$ 는 121개의 주어진 문제에 대한 수치해를 22차 Chebyshev 다항식을 이용한 평활화(smoothing)과정을 통해 구해졌다. $x_b(t)$ 가 정확한 해석적 해인 새로운 상미분방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= -2.5^2 x(t) + e(t) \\ x(0) &= x_b(0), \dot{x}(0) = \dot{x}_b(0) \\ 0 \leq t &\leq 10 \end{aligned}$$

3.2 Two body problem

Two body problem에 대한 결과를 확인하기 위해 사용된 예제는 다음과 같다.

$$\ddot{x} = -\frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}, \quad x(0) = 0.4, \dot{x}(0) = 0$$

$$\ddot{y} = -\frac{y}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}, \quad y(0) = 0, \dot{y}(0) = 2$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

Two body problem의 경우 일차로 변환시켜 다음의 식을 사용했다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{x_1}{(\sqrt{x_1^2 + x_3^2})^3} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \end{aligned}$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{x_3}{(\sqrt{x_1^2 + x_3^2})^3}$$

$$x_1(0) = 0.4, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0, x_4(0) = 2$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

위의 문제에서 주어진 문제에 대한 수치해는 기존 구간의 20%를 증가시킨 $-0.2\pi \leq t \leq 2.2\pi$ 에서 4차 Runge-Kutta 방법을 사용하여 구해진 121개이다. 또한, $x_b(t)$ 는 121개의 주어진 문제에 대한 수치해를 22차 Chebyshev 다항식을 이용한 평활화(smoothing)과정을 통해 구해졌다.

3.3 결 과

이차 상미분방정식의 perturbation 항은 Fig. 2와 같으며, Two body problem의 perturbation 항은 Fig. 3과 같다. Fig. 4-7은 perturbation 항을 이용해 만들어진 새로운 상미분방정식에 대해 정확한 해와 이 문제의 수치해에 대해 절대 오차를 도시한 것이다. 절대 오차는 제곱평균 (root mean square)을 사용하였고, 조절 변수 변화에 대한 절대오차의 변화 그래프는 대수배율(log/log scale)을 사용하여 나타내었다.

Step size의 변화에 대한 각각의 예제의 절대 오차 변화는 Fig. 4, 6과 같다. 그리고 tolerance의 변화에 대한 각각의 예제의 절대 오차 변화는 Fig. 5, 7과 같다.

우선 Step size에 대해 오차의 변화는 모든 예제의 경우 일정 step size 이후부터 감소하지 않는다. 이차 상미분방정식의 경우 step size가 10^{-6} 부근에서 절대 오차가 일정해 지며, two body problem의 경우 step size가 10^{-4} 부근에서 절대 오차가 증가한다.

다음으로 tolerance에 대해 오차의 변화는 step size의 변화와 같이 일정 tolerance 이후부터 감소하지 않음을 볼 수 있다. 이차 상미분방정식의 경우 tolerance가 10^{-7} 부근에서 절대오차가 일정해 지며, two body problem의 경우 tolerance가 10^{-4} 부근에서 절대오차가 일정해진다.

Fig. 8에서 볼 수 있듯이 구해진 Perturbation이 너무 클 경우 Chebyshev 다항식의 차수를 증가시켜 perturbation을 줄일 수 있다. 이 때 Chebyshev 다항식의 차수는 데이터의 개수 즉, 기존 문제에 대한 수치해석 결과의 개수를 상한으로 한다. Fig. 8에서의 perturbation은 이차 상미분방정식의 예제를 이용하여 얻은 결과이다.

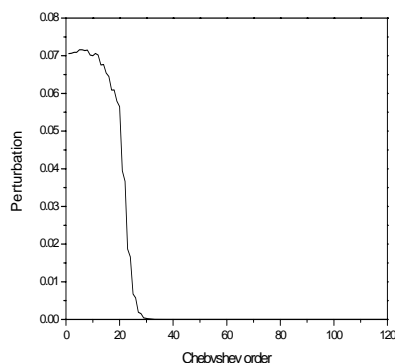


Fig. 8 Chebyshev 차수에 대한 perturbation의 크기

IV. 결 론

본 논문에서는 조절 변수의 변화에 대해 수치해석을 통해 얻은 결과가 어느 정도의 정확도를 갖게 되는지를 보였다. 이를 확인하기 위해 수치해석 결과에 대해 Chebyshev 다항식을

이용한 평활화 과정을 통해 해석적 해를 구했다. 해석적 해를 기존 문제에 대입하여 구한 perturbation 항을 이용하여 정확한 해를 알고 있는 새로운 상미분방정식을 구성하였다. 정확한 해를 알고 있는 새로운 상미분방정식에 대하여 수치해석을 이용해 구해진 수치해를 정확한 해석적 해와 비교하여 조절 변수에 대한 오차의 추이를 확인하였다. 이를 통하여 수치해석을 위한 최적의 조절 변수와 수치해석 결과의 정확도를 얻을 수 있다. 이 연구는 항공기 및 우주비행체의 동역학 및 제어 분야에 다양하게 적용할 수 있을 것으로 사료된다. 향후 해석적인 해를 구하기 위해 본 논문에서 사용된 Chebyshev 다항식 이외의 다항식을 이용하여 해석적인 해를 구하는 연구와, Mathematica를 이용한 본 논문의 결과를 symbolic manipulation이 가능한 프로그램인 Maple을 이용해 구한 결과와 상호 비교하는 연구를 수행할 예정이다.

후 기

이 논문은 2007년도 한국항공대학교 교비지원연구비에 의하여 지원된 연구의 결과임.

참고문헌

- [1] Suk, J., and Kim, Y., "On the Modeling of Dynamic Systems", KSAS International Journal, Vol. 2, No. 1, 2001, pp. 78-92
- [2] Miele, A., and Iyer, R. R., "General Technique for solving Nonlinear, Two-Point Boundary-Value Problems via the Method of Particular Solutions", Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 5, No. 5, 1970, pp. 382-403
- [3] Shampine, L.F., "Limiting Precision in Differential Equation Solvers", Math. Comp., Vol. 28, No. 125, 1974, pp. 141-144
- [4] Shampine, L.F., "Limiting Precision in Differential Equation Solvers, II: Sources of Trouble ans Starting a Code", Math. Comp., Vol. 32, No. 144, 1978, pp. 1115-1122
- [5] John L. Junkins and Sangchul Lee,

- "Validation of finite dimensional approximate solutions for dynamics of distributed parameter systems", *Advances in the Astronautical Sciences, Astrodynamics*, Vol. 85, 1993
- [6] Abramowitz, M., and Stegun, I.A., "Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables", National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 55, U.S. Department of Commerce, 1972.
- [7] Jae H. Park, "Chebyshev Approximation of Discrete Polynomials and Splines", the Virginia Polytechnic Institute and State University, Nov. 19. 1999
- [8] Stephen Wolfram, "Mathematica : A system for doing mathematics by computer", 2nd edition, Addison Wesley, 1991
- [9] John P. Boyd, "Chebyshev and Fourier Spectral Methods", 2nd edition, Dover Publications, Inc., 2001, pp. 19-60
- [10] Nikita Gogin, Mika Hirvensalo, " On the Generating Function of Discrete Chebyshev Polynomials", TUCS Technical Report No. 819, April 2007
- [11] Steven C. Chapra, Raymond P. Canale, "Numerical Methods for Engineers", 5th edition, McGraw-Hill, 2006, pp. 681-723
- [12] IMSL MATH/LIBRARY, Visual Numerics Inc., 1997