

적분관측기를 이용한 선형시스템의 미지입력추정에 관한 연구

(Unknown Input Estimation of the Linear Systems using Integral Observer)

이명규*

(Myung-Kyu Lee)

요 약

본 논문에서는 측정 잡음이 존재하는 선형시스템의 미지 입력 추정에 관하여 기술하였다. 적분관측기를 기초로 한 본 연구의 방법은 미지 입력을 정확히 추정해낼 수 있을뿐만 아니라 추정 성능도 높일 수 있다. 시뮬레이션 결과와 기존 방법의 비교를 통해 본 연구 방법의 유용성을 입증할 수 있었다.

Abstract

This paper deals with the unknown input estimation for linear dynamic systems with sensor noise. The presented method based on the integral observer permits to achieve good convergence and exact estimation of unknown inputs. The validity of proposed method is established by comparison with simulation results and the existing methods.

Key Words : Unknown input estimation, Linear dynamic systems, Integral observer

1. 서 론

선형시스템의 상태를 추정하기 위해 Luenberger 관측기를 사용하는 경우에는 대상 시스템의 입력을 모두 알거나 혹은 모두 측정이 가능하다는 가정이 필요하다. 그러나 실제로는 대상 시스템이 미지입력을 포함하는 경우가 많으며, 심지어는 시스템의 입력을 전혀 모르는 경우도 많다. 따라서 미지입력을 포함하는 선형 시불변 시스템의 상태 관측기설계와

미지 입력 추정의 문제는 최근 수년간 많은 관심을 받아왔다.

최근 들어 기하학적 접근, 특이치 분해방법에 의한 접근, 일반화된 역행렬을 이용한 접근, 좌표변환을 이용한 접근 등 미지입력 관측기 설계에 관한 연구가 활발히 이루어지고 있다[1-8]. 특히 Hou와 Müller[7]는 대상 시스템을 좌표 변환을 이용하여 미지 입력으로부터 자유로운 상태 벡터와 그렇지 못한 상태 벡터로 분리 한 뒤, 미지 입력으로부터 자유로운 상태 벡터에 대한 축소 차수 관측기를 설계하고, 추정된 상태를 이용하여 미지 입력 값을 계산할 수 있는 체계적인 방법을 소개하였다. Y. Guan과 M. Saiff[8]는 한 번의 좌표 변환만을 이용하여 변환된 동적 방정식을 유도하고, 이에 대한 비례관측기인

* 주저자 : 경성대학교 전기전자공학과 교수
Tel : 051-620-4772, Fax : 051-624-5980
E-mail : mklee@ks.ac.kr
접수일자 : 2007년 11월 5일
1차심사 : 2007년 11월 9일
심사완료 : 2007년 11월 27일

적분관측기를 이용한 선형시스템의 미지입력추정에 관한 연구

Luenberger 관측기를 설계함으로써 미지입력을 추정하는 방법을 제시하였다. 이들의 미지입력관측기 설계에 관한 연구들은 접근 방법에는 차이가 있으나 시스템에 유입되는 미지입력의 추정을 위해서는 시스템의 상태관측기의 설계가 필수적이다.

본 연구에서는 미지입력 추정에 필요한 상태관측을 위해 기존의 비례관측기가 아닌 적분관측기를 도입함으로써 시스템의 미지입력 추정 성능을 개선할 수 있는 한 방법을 제시 한다. 적분관측기는 최근에 K. K. Busawon과 P. Kabore[9-10]에 의해 시스템의 상태추정의 한 방법으로 제시되었는데, 이 방법은 상태추정을 위해 출력의 적분을 이용하기 때문에 시스템의 차수가 증가한다는 단점이 있지만 측정 잡음의 영향을 감쇄시킬 수 있는 장점이 있다. 시스템에 유입되는 미지입력을 추정하기 위해, 유도된 미지입력 추정방정식에는 추정된 상태벡터의 미분 항을 포함하게 된다. 이러한 미분 항은 작은 잡음이나 추정오차에도 민감하게 반응하여 유입되는 미지입력의 추정을 어렵게 한다. 일반적으로 미지입력을 추정하기 위해 도입되는 비례관측기는 비례이득에 비례하여 측정 잡음이 증폭되는 문제가 발생하기 때문에, 측정 잡음이 있는 시스템의 미지입력 추정을 다루는 데는 적합하지 않다. 본 연구는 선형시스템의 미지 입력 관측기의 설계를 위해 필요한 상태 추정을 위해 출력 잡음에 강인한 적분관측기를 도입함으로써 측정 잡음이 있는 시스템의 미지입력추정을 개선시킬 수 있다.

2. 적분관측기를 이용한 미지 입력 추정

2.1 선형시스템의 미지입력추정

선형시스템에 미지입력이 유입되는 경우 다음과 같이 모델링할 수 있다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ff(t) \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2)$$

$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \in R^n$ 와 $u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)]^T \in R^m$, $f(t) \in R^m$ 는 각각 상태벡터, 제어입력 및 미지입력벡터이고, $y(t) \in R$ 는 출력을 나타낸다. A, B, C 는 각각 $(n \times n)$, $(n \times m)$, $(1 \times n)$ 인 시스템행렬이다. 식 (2)를 미분하면 식 (1)로부터

$$\dot{y}(t) = C\dot{x}(t) = CAx(t) + CBu(t) + CFf(t) \quad (3)$$

이고, 위 식 (3)에서 시스템의 미지입력은 다음과 같다.

$$f(t) = [(CF)^T CF]^{-1} (CF)^T \cdot [\dot{y}(t) - CAx(t) - CBu(t)] \quad (4)$$

그러나 시스템 내부의 상태변수는 직접 측정에 의해 알 수 없는 경우가 대부분이어서 정확한 상태의 관측을 필요로 한다. 실제로 직접 측정할 수 있다 하더라도 측정 잡음에 의해 큰 영향을 받기 때문에 어떤 미지입력이 유입되었는지 알기 힘들다. 따라서 상태 추정에 의한 선형계의 미지입력추정을 위한 방정식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{f}(t) = [(CF)^T CF]^{-1} (CF)^T \cdot [\dot{\hat{y}}(t) - CA\hat{x}(t) - CBu(t)] \quad (5)$$

식 (5)에서 보듯이 미지입력 추정방정식에는 미분 항을 포함하고 있다. 이 미분 항은 추정된 상태 변수 값의 작은 오차에도 민감하게 반응하기 때문에 시스템의 미지입력 추정을 어렵게 한다. 따라서 미지입력 추정치의 정밀도를 높이기 위해서는 정확한 상태 변수의 추정이 요구되며, 또한 추정된 상태변수는 출력 측에 포함되는 측정오차에 둔감해야 한다.

2.2 기존의 비례관측기

시스템에 미지입력이 유입되지 않고 단지 출력 측에 측정 잡음이 존재하는 경우, 단일 출력 시스템의 상태변수를 추정하는 문제를 고려한다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (6)$$

$$y(t) = Cx(t) + d(t)$$

(A, C)가 관측 가능하다면, 일반적인 비례관측기인 Luenberger 관측기로부터 다음과 같이 식 (6)으로 주어진 시스템의 상태를 추정할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + K_p[y(t) - \hat{y}(t)] \\ &= [A - K_pC]\hat{x}(t) + Bu(t) + K_p y(t) \end{aligned} \quad (7)$$

K_p 는 관측기의 비례이득이다.

여기서 $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ 라고 하면 다음의 추정 오차 방정식을 얻을 수 있다.

$$\dot{e}(t) = (A - K_pC)e(t) - K_p d(t) \quad (8)$$

K_p 는 관측기의 상태 관측오차를 보정하기 위해 $[AK_p - C]$ 가 안정하도록 결정한다. 식 (8)에서 출력 측에 측정 잡음이 있는 경우엔 이 잡음이 관측기의 비례이득만큼 증폭되어 오차방정식에 인가됨을 알 수 있다.

2.3 외란에 강한 적분관측기

식 (6)으로 주어진 시스템에서 미지입력 추정을 위한 적분관측기를 구성하기 위해 K. K. Busawon과 P. Kabore[9-10]에 의해 제시된 방법과 같이

$$y_N = x_{n+1}(t) = \int_0^t y(\tau) d\tau \text{라고 하면}$$

$$\dot{x}_{n+1}(t) = Cx(t) + d(t) \quad (9)$$

이며, 식 (6)과 식 (9)를 행렬-벡터방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_{n+1}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d(t) \end{aligned} \quad (10)$$

위 식을 편의상 다음과 같이 나타낸다.

$$\dot{x}_N(t) = A_N x_N(t) + B_N u(t) + E_N d(t) \quad (11)$$

$$y_N(t) = C_N x_N(t)$$

$$\text{단, } x_N(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix}, A_N = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, B_N = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$E_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_N = [0 \cdots 0 \ 1] \text{이다.}$$

식 (11)의 관측기를 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_N(t) &= A_N \hat{x}_N(t) + B_N u(t) \\ &+ K_f [y_N(t) - C_N \hat{y}_N(t)] \end{aligned} \quad (12)$$

(A_N, C_N)가 가관측해야 한다.

위 식에서 $y_N(t) = x_{n+1}(t)$ 이고, 이는 출력의 적분을 의미한다. 여기서 $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ 라고 할 때 오차 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{e}(t) = (A_N - K_f C_N)e(t) + E_N d(t) \quad (13)$$

여기서 적분관측기 이득 K_f 는 ($A_N - K_f C_N$)가 안정하도록 결정한다. 상태 추정에 있어 기존의 비례관측기는 식 (8)에서 보듯이 관측기의 이득에 비례하여 측정 잡음이 증폭되는 단점이 있으나, 적분관측기는 식 (13)에서 보듯이 K_f 값의 크기에 따른 영향을 받지 않음을 알 수 있다.

2.4 외란에 강한 적분관측기를 이용한 미지입력 추정

다음과 같이 선형시스템에 유입되는 미지 입력 $f(t)$ 를 추정하는 문제를 고려한다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ff(t) \quad (14)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

외란에 강한 적분관측기를 이용하여 미지 입력을 추정하기 위해 먼저 식 (4)를 다음과 같이 나타낸다.

적분관측기를 이용한 선형시스템의 미지입력추정에 관한 연구

$$f(t) = \bar{C}\dot{y}(t) - \bar{C}CAx(t) - \bar{C}CBu(t) \quad (15)$$

단 $\bar{C} = [(CF)^T CF]^{-1} (CF)^T$ 이다.

식 (15)를 식 (14)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) + \bar{F}\dot{y}(t) \quad (16)$$

단, $\bar{A} = A - F\bar{C}CA$, $\bar{B} = B - F\bar{C}CB$, $\bar{F} = F\bar{C}$ 이다.

위 식 (16)에 적분관측기를 이용하기 위해

$$y_N = x_{n+1}(t) = \int_0^t y(\tau) d\tau \text{라고 하면}$$

$$\dot{x}_{n+1}(t) = Cx(t) \quad (17)$$

이며, 식 (16)과 식 (17)을 행렬-벡터방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_{n+1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \bar{F} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{y}(t) \quad (18)$$

이를 편의상 다음과 같이 나타낸다.

$$\dot{x}_N(t) = A_N x_N(t) + B_N u(t) + F_N \dot{y}(t) \quad (19)$$

$$y_N(t) = C_N x_N(t)$$

단, $x_N(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix}$, $A_N = \begin{bmatrix} \bar{A} & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}$, $B_N = \begin{bmatrix} \bar{B} \\ 0 \end{bmatrix}$,

$F_N = \begin{bmatrix} \bar{F} \\ 0 \end{bmatrix}$, $C_N = [0 \dots 0 \ 1]$ 이다.

위 식에서 (A_N, C_N) 가 관측 가능하다면, (19)의 관측기를 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_N(t) &= A_N \hat{x}_N(t) + B_N u(t) + F_N \dot{y}(t) \\ &+ K_I [y_N(t) - C_N \hat{x}_N(t)] \end{aligned} \quad (20)$$

위 식 (20)에서 $y_N(t) = x_{n+1}(t)$ 이고, 이는 출력의

적분을 의미한다. 이와 같이 적분관측기에 의해 $\hat{x}_N(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{x}_{n+1}(t) \end{bmatrix}$ 을 추정할 수 있고, 미지 입력 값은 다음과 같이 결정된다.

$$\hat{f}(t) = \bar{C}\dot{\hat{y}}(t) - \bar{C}CA\hat{x}(t) - \bar{C}CBu(t) \quad (21)$$

미지입력을 추정하기 위해 적분관측기를 도입하면 관측기의 차수는 1차 더 증가하지만, 적분관측기를 도입함으로써 외란에 강인한 장점이 있다.

3. 시뮬레이션

3.1 시스템의 미지입력 추정(예1)

다음 식 (22)와 과 같이 주어지는 시스템에서 예기치 않게 유입되는 미지입력 $f(t)$ 를 추정해 보자.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t) \quad (22)$$

$$y(t) = [1 \ 0]x(t) + d(t)$$

$$x_0 = [0.5 \ 0.5]^T$$

제어입력은 $u(t)=2$ 로하고, 출력 측에 도입되는 측정 잡음인 $d(t)$ 를 $-0.001 \leq d(t) \leq 0.001$ 의 랜덤한 값으로 주었다.

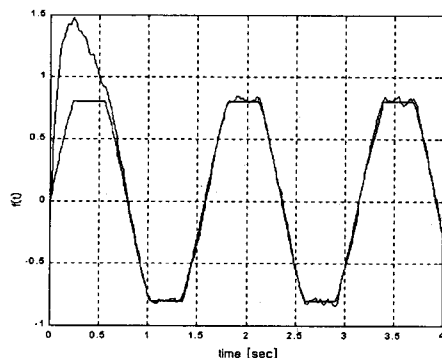


그림 1. 적분관측기에 의한 미지입력추정
Fig. 1. Unknown Input via integral observer

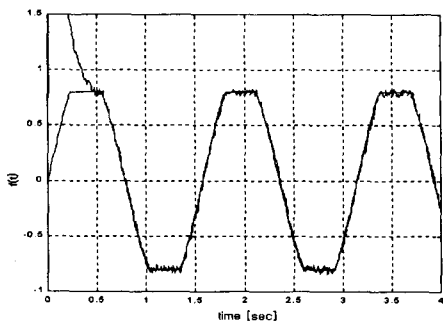


그림 2. 비례관측기에 의한 미지입력추정
Fig. 2. Unknown Input via proportional observer

본 연구의 적분관측기에 의해 추정된 미지입력 $\hat{f}(t)$ 는 그림 1과 같다. 그림 2는 기존의 비례관측기를 이용한 결과이다. 그림 1과 그림 2에서 구형과 형태는 시스템에 인가된 실제의 미지 입력 $f(t)$ 를 나타낸다. 이들 결과는 모두 관측기의 극점을 -6에 중복되도록 배치하였을 때의 결과로, 적분관측기의 이득은 $K_I^T = [61 \ 3 \ 15]$ 이며, 비례관측기의 이득은 $K_P^T = [9 \ 7]$ 이다. 그림 2의 비례관측기를 이용한 기존의 결과에 비해, 그림 1의 본 연구 방법에 의해 추정된 미지입력이 정상상태에 도달하는 시간이 약간 느린데, 이는 본 연구 방법이 출력의 적분을 이용하기 때문인 것으로 보인다. 그러나 본 연구의 적분관측기를 이용한 결과가 기존의 방식에 의한 결과보다 잡음에 둔감함을 알 수 있다.

3.2 시스템의 미지입력 추정(예2)

S. P. Linder[6]의 문헌에서 다루어진 식 (23)과 같은 시스템에 추정 잡음 $d(t)$ 가 추가된 경우의 미지 입력 $f(t)$ 를 추정하는 문제를 고려한다.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} f(t) \quad (23)$$

$$y(t) = [1 \ 0] x(t) + d(t)$$

$$x_0 = [0.5 \ 0.5]^T$$

제어입력을 $u(t) = \sin(0.5t)$ 로 하고, 출력 측에

도입되는 추정 잡음을 $-0.01 \leq d(t) \leq 0.01$ 인 랜덤한 값으로 주었다.

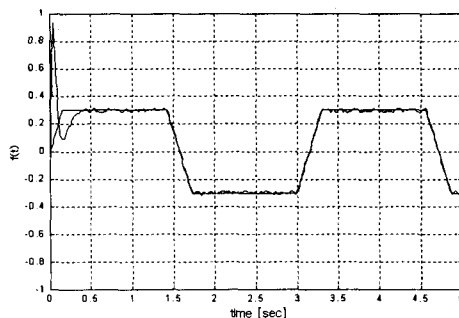


그림 3. 적분관측기에 의한 미지입력추정
Fig. 3. Unknown Input via integral observer

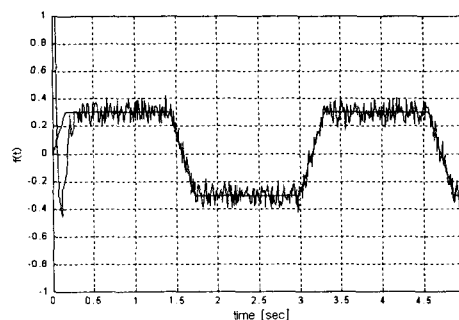


그림 4. 비례관측기에 의한 미지입력추정
Fig. 4. Unknown Input via proportional observer

그림 3은 본 연구의 적분관측기를 이용하여 추정한 미지입력 $\hat{f}(t)$ 이고, 그림 4는 기존의 비례관측기를 이용할 때의 결과이다. 관측기의 극점은 -6에 중복되도록 배치하였으며, 이 때 적분관측기의 이득은 $K_I^T = [33 \ 86 \ 13]$ 이다. 기존의 비례관측기의 이득은 $K_P^T = [7 \ 26]$ 이다. 그림 3과 그림 4의 결과에서 보듯이 본 연구에 의한 미지 입력 추정 결과는 기존의 결과에 비해 매우 만족할만하다. 본 연구의 상태관측기에 의한 결과는 잡음에 둔감한 반면, 기존의 방식은 잡음에 민감함을 알 수 있다.

시스템의 미지입력 추정 결과인 예 1과 예 2를 비교해보면 예 2의 결과에서 본 연구에 의한 추정방법이 더욱 우수함을 알 수 있다. 이는 기존의 비례관측

적분관측기를 이용한 선형시스템의 미지입력추정에 관한 연구

기를 이용하는 방법에서는 미지입력 추정 오차가 관측기의 이득에 비례하기 때문이다. 즉 예 1에서 관측기의 이득은 $K_p^T = [9 \ 7]$ 이고, 예 2에서는 $K_p^T = [7 \ 26]$ 으로 예 2의 비례이득이 크기 때문에 관측기의 이득에 비례하여 추정오차가 미지입력의 추정치에 더 큰 영향을 미치지만, 본 연구의 적분관측기를 이용하는 방법에서는 관측기의 이득에 관계없이 미지입력의 추정성능을 높일 수 있음을 알 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 출력 측에 잡음이 있는 경우 시스템에 유입되는 미지입력의 추정 성능을 개선할 수 있는 한 방법을 제시하였다. 미지입력 추정에 필요한 상태관측을 위해 새롭게 구성된 적분관측기를 이용함으로써 기존의 비례관측기를 이용하는 방법에 비해, 출력 측에 잡음이 있는 경우 시스템의 미지입력 추정 성능을 높일 수 있음을 시뮬레이션을 통해 알 수 있었다. 이러한 결과는 미지입력 추정에 필요한 상태추정 값이 기존의 방법에 의한 결과보다 더 정확하고 평활하기 때문이다. 본 연구의 미지입력 추정은 단일 출력을 갖는 선형시스템으로 제한하였다. 본 연구에서 제시된 방법은 출력의 적분을 이용하기 때문에 미지 입력 추정시스템의 차수가 출력의 수에 비례하여 증가하는 단점이 있다. 그러나 측정 잡음에 둔감하기 때문에 미지입력의 추정성능을 높일 수 있다.

본 연구는 2004년도 경성대학교 학술지원사업의 연구비로 수행되었습니다.

References

- [1] Bhattacharyya, S. P., "Observer design for linear systems with unknown inputs," IEEE Trans. Automatic Control, vol. 23, pp. 483-484, 1978.
- [2] S. Beale, B. Shafai, "Robust control design with a PI observer", International Journal of Control, vol.50, pp.97-111, 1989.
- [3] H. H. Niemann, J. L. Stoustrup, B. Shafai, S. Beale, "LTR design of proportional integral observers", International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol.5, pp.671-693, 1995.

- [4] B. Shafai, C. T. Pi, O. Bas, S. Nork, S. P. Linder, "A general purpose observer architecture with application to failure detection and isolation", Proceeding of American Control Conference, Arlington,VA, pp.1133-1138, June, 2001.
- [5] 안비오, 이명규, 안두수, "STWS를 이용한 선형 시불변 시스템의 미지 입력 관측기 설계에 관한 연구", 대한전기학회 논문지 제 46 권 제 1 호, pp 128-131, 1997.
- [6] S. P. Linder, B. Shafai, M. saif, "Estimating and accommodating unknown actuator faults with PI observers", Proceeding of the 1998 IEEE, pp.461-465, 1998.9.
- [7] M. Hou and P. C. Muller, "Design of observers for linear systems with unknown inputs," IEEE Trans. Automatic Control, vol. 37, pp. 871-875, 1992.
- [8] Y. Guan and M. Saif, "A novel approach to the design of unknown input observer," IEEE Trans. Automatic Control, vol. 36, pp. 632-635, 1991.
- [9] K. K. Busawon, P. Kabore, "On the design of integral and proportional integral observers", Proceeding of American Control Conference, Illinois, pp.3725-3729, June 2000.
- [10] K. K. Busawon, P. Kabore, "Disturbance attenuation using PI observers", International Journal of Control, vol.76, no.6, pp.618-627, 2001.

◇ 저자소개 ◇

이명규 (李明珪)

1960년 12월 15일생. 1982년 2월 성균관대학교 전기공학과 졸업. 1984년 2월 성균관대학교대학원 전기공학과 졸업(석사). 1990년 2월 성균관대학교대학원 전기공학과 졸업(제어공학전공, 박사). 1991년 3월 경성대학교 전기공학과 전임강사. 1999년 Simon Fraser Univ. Visiting Scholar. 현재 경성대학교 전기전자공학과 교수.