韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 22집 제 1호, 2008. 2. 79-89

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 22, No. 1, Feb. 2008. 79-89

각의 삼등분선들의 다양한 위치와 방정식의 탐구

이 상 근 (경상대학교)
이 춘 구 (경남과학고등학교)

각은 평면도형을 구성하는 기본 요소들 중의 하나로, 역사적으로 많은 수학자들의 탐구대상이 되어왔으며, 수학자 Lebesgue은 각의 n등분선 개념을 도입하여, 각의 등분에 대한 연구를 활발하게 하는 계기를 마련하였다. 본 연구에서는 각의 삼등분선들의 다양한 경우를 고찰하여, 각각의 경우에 대한 삼등분선들의 방정식을 대수적으로 표현하였다.

1. 서 론

수학의 역사에 있어서 대수적 방법은 문제해결의 중요한 도구가 되어 왔다. 특히 데카르트가 기하학을 대수적 방법으로 체계화한 이후의 수학의 발전은 가히 혁명적이라 할 수 있으며, 데카르트 이후의 수학적 발명 결과의 폭과 깊이는 이전의 어느 시대와도 비교할 수 없을 것이다. 이것은 대수적 방법의 유용성을 보여주는 단편적인 예라 할 수 있다. 특히 한인기(2006)에 의하면, Kolmogorov는 수학분야의 중요한 세 가지 영재성의 하나로 대수적 영재성을 꼽았으며, 수학 영재교육에서 수학적 규칙성을 대수적으로 표현하고, 얻어진 대수식들을 원하는 형태로 변형시키는 능력을 강조하였다.

본 연구에서는 다양한 경우들에 대한 각의 삼등분선을 조사하고, 이를 대수적으로 나타낼 것이다. 각은 평면도형을 구성하는 기본 요소들 중의 하나로, 역사적으로 많은 수학자들의 탐구대상이 되어왔다(예를 들어, 각의 이등분선 탐구, 각의 삼등분선 탐구, 각의 작도 가능성 탐구 등등). 한편, 수학자 Lebesgue은 각의 n등분선 개념을 도입하여, 각의 등분에 대한 연구를 활발하게 하는 계기를 마련하였다.

임의의 등분에 관련된 국내의 연구들은 주로 각의 이등분선 또는 삼등분선에 관련하여 이루어졌다. 신현용 · 한인기 · 서봉건 · 최선희(2002)는 유클리드적 도구를 이용해 작도가능한 수들의 집합보다 종이접기를 이용해 표현할 수 있는 수들의 집합이 더 크다는 것을 대수적으로 보이면서, 임의의 각의 삼등분선을 접는 한 방법을 소개하였고, 김향숙 외 6인(2006)은 임의의 각을 종이접기를 이용하여 삼등분하는 방법을 소개하였고, 이상근 · 이춘구(2007)는 각의 이등분선의 방정식, 종이접기로부터 얻어지는 각의 삼등분선의 방정식을 대수적으로 나타내는 연구를 수행하였다. 그리고 수학자

* ZDM 분류 : D54
* MSC2000 분류 : 97D50
* 주제어 : 각의 삼등분선, 방정식, 둔각

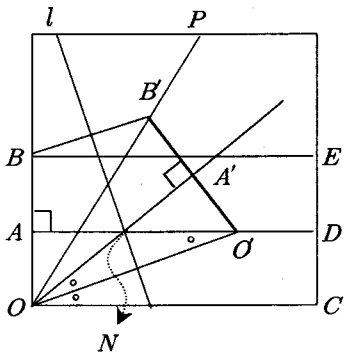
Morley(1860-1937)는 삼각형에서 각의 삼등분선들의 교점이 정삼각형을 이룬다는 사실을 알아냈다. 이들 연구를 통해 각의 이등분선, 삼등분선에 관련된 기하학적, 대수적 성질들이 밝혀지고 있다는 것은 매우 의미 있다.

본 연구는 각의 삼등분선의 다양한 성질을 대수적으로 탐구하는 문헌연구로, 각의 삼등분선들의 다양한 경우를 고찰하여, 각각의 경우에 대한 삼등분선들의 방정식을 대수적으로 표현할 것이다. 이를 위해, 본 연구에서는 종이접기에 근거하여 각의 삼등분선을 탐구한 선행연구를 분석하고, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$, $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$인 경우의 θ에 대한 각의 삼등분선을 체계적으로 조사할 것이다. 본 연구를 통해 얻어진 결과는 중등학교 수학에 관련된 교과내용지식의 영역을 넓힐 수 있으며, 각의 삼등분선에 대한 대수적 탐구에 관련된 흥미로운 심화학습 자료가 될 것으로 기대된다.

2. 종이접기로부터 얻어진 방정식의 근에 따른 삼등분선 탐구

(1) 종이접기에 근거한 각의 삼등분선 방정식의 탐구

<그림 1>에 종이접기를 통한 예각의 삼등분선이 제시되어 있다. 이상근 · 이춘구(2007)는 종이접기를 이용하여 각의 삼등분선을 구하는 방법에 근거하여, 각의 삼등분선의 방정식을 대수적으로 구하였다. 즉, <그림 1>에서 $OA=AB$, $OA<OB$인 점 $A(0,m)$, $B(0,2m)$를 반직선 OA(y축)에, B'의 좌표를 $(b,\ -a)$를 반직선 OP에 잡고, 반직선 OC를 x축이라 하고, 등식 $4m^3-3(a^2+b^2)m-a(a^2+b^2)=0$을 만족시키는 m, a, b에 대해, 각 POC의 삼등분선은 직선 $(a+2m)x+by=0$, $\frac{2(2m+a)}{ab+bm}x-\frac{2}{m-a}y=0$ 임을 보였다.



<그림 1>

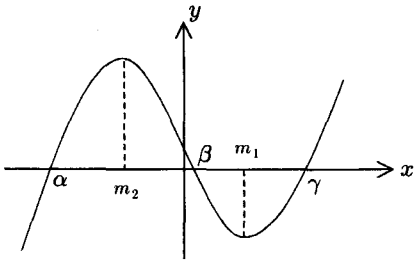
본 연구에서는 m에 대한 삼차방정식 $4m^3-3(a^2+b^2)m-a(a^2+b^2)=0$에서 방정식의 근 m의 값을 중심으로 삼등분선의 위치를 구체적으로 조사할 것이다. 이를 위해, 삼차방정식 $f(m)=4m^3-3(a^2+b^2)m-a(a^2+b^2)=0$의 근들 α, β, γ에 대해 탐구하자.

$a<0$이므로 $f(0)=-a(a^2+b^2)>0$이다. 이제 $f'(m)$을 조사하여 극점의 위치를 살펴보자. $f'(x)=12x^2-3(a^2+b^2)$이므로 $f'(m)=0$는 서로 다른 두 실근 $m_1=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$, $m_2=-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$를 가진다. 이제 $f(m_1)$, $f(m_2)$를 조사하자.

$$\begin{aligned} f(m_1)=f\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)&=4(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{1}{8}\right)-3(a^2+b^2)\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}-a(a^2+b^2)\\ &=\frac{a^2+b^2}{2}\left\{\sqrt{a^2+b^2}-3\sqrt{a^2+b^2}-2a\right\}\\ &=\frac{a^2+b^2}{2}\left\{-2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)\right\} \end{aligned}$$

이다. 그런데 $|\sqrt{a^2+b^2}|>|a|$이므로 $\sqrt{a^2+b^2}+a>0$이고 $f(m_1)<0$이 된다. 유사한 방법으로, $f(m_2)=f\left(-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)>0$이 됨을 알 수 있다.

이로부터 $y=f(m)$의 그래프는 <그림 2>와 같고, 방정식 $f(m)=0$은 양의 실근 β, γ, 음의 실근 α를 가진다는 것을 알 수 있다($\alpha<0<\beta<\gamma$).



<그림 2>

이때, 다음과 같은 물음이 생긴다. : $4m^3-3(a^2+b^2)m-a(a^2+b^2)=0$을 만족시키는 실근이 세 개가 존재함을 알았는데, 종이접기에서 얻어진 각의 삼등분선은 방정식의 근 m값들 중에서 어떠한 m에 대한 것인가? 다른 근들 m에 대해서도 각의 삼등분선을 얻을 수 있는가?

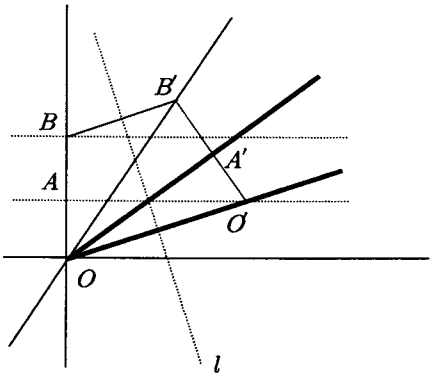
(2) 방정식의 근들 m값에 대한 각의 삼등분선 탐구

근 m이 β인 경우의 각의 삼등분선을 조사하기 위해, β의위치를 좀 더 구체적으로 결정해 보자.

m_1보다 작으며 양의 값을 가지는 $-\frac{a}{2}$를 생각하여, β와의 대소를 살펴보자.

$$f\left(-\frac{a}{2}\right)=4\left(-\frac{a}{2}\right)^3-3A^2\left(-\frac{a}{2}\right)-aA^2=-\frac{a}{2}(a^2-3A^2+2A^2)=\frac{ab^2}{2}<0,\ (A=\sqrt{a^2+b^2}\text{ 임})$$

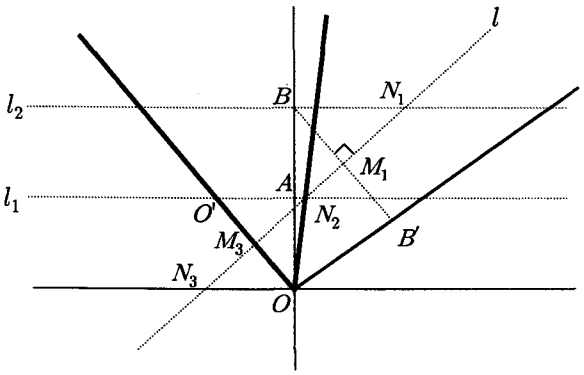
이고, $f(\beta)=0$이므로 <그림 2>에서 $\beta<-\frac{a}{2}$, $2\beta<-a$가 된다. 즉, 근이 β일 때, $-a<2m=2\beta$인 관계가 있게 되어 <그림 3>과 같이 점 B, B'이 위치하고 대칭선 l이 생겨, <그림 1>과 같은 종이접기를 얻을 수 있다.



<그림 3>

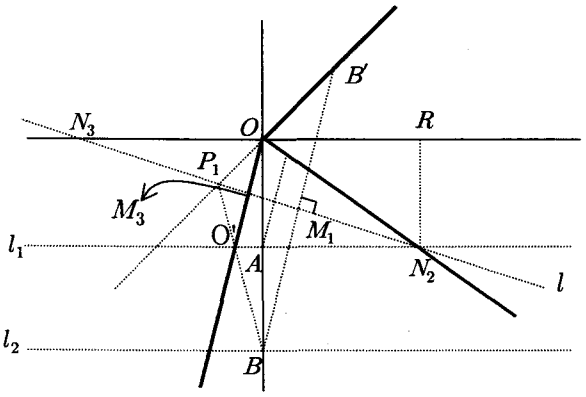
이제 근 m이 γ인 경우의 각의 삼등분선을 조사하자. $f(m)=4m^3-3(a^2+b^2)m-a(a^2+b^2)$에서 극소점의 x좌표와 γ의 대소 관계를 살펴보면, $-\frac{a}{2}<m_1=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}<\gamma$이므로, $-a<2\gamma$가 된다. 즉, 근이 γ일 때, $-a<2m=2\gamma$인 관계가 있고, <그림 4>와 같이 점 B, B'이 위치한다.

이러한 경우 B와 B'이 겹치고, B와 B', O와 직선 l_1위에 있는 점 O'의 대칭선 l이 생기고, 직선 $ax+by=0$이 x축의 음의 방향과 이루는 둔각 $B'ON_3$의 삼등분선이 얻어진다.



<그림 4>

이제 근 m이 α인 경우의 각의 삼등분선을 조사하자. α는 음의 실근이므로, $2m=2\alpha<0<-a$이고, <그림 5>와 같이 점 B, B'이 위치하고, B와 B', O와 직선 l_1위에 있는 점 O'의 대칭선 l이 생긴다. 이러한 경우는 직선 $ax+by=0$이 x축의 음의 방향과 이루는 둔각 $B'ON_3$의 삼등분선이 얻어진다.



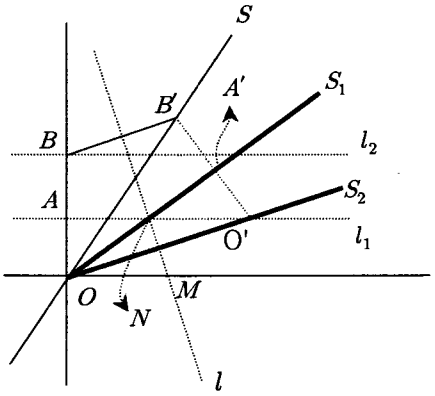
<그림 5>

3. 각의 크기에 따른 삼등분선 탐구

(1) $0<\theta<\frac{\pi}{2}$인 각 θ의 삼등분선

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$인 각 θ인 경우의 삼등분선은 <그림 6>과 같고, 이것은 종이접기에서 탐구한 각의 삼

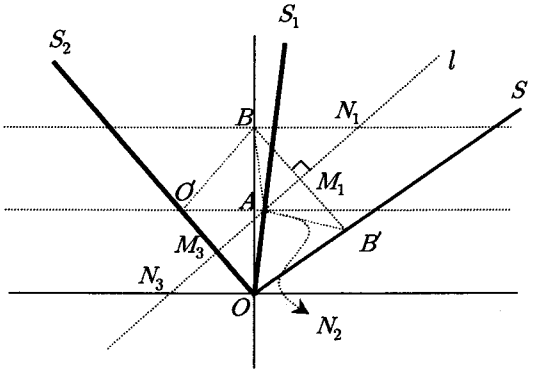
등분선과 같게 된다. <그림 6>에서 각 SOM의 삼등분선 OS_1, OS_2에 대한 논의는 이상근 · 이춘구 (2007)에 제시되었다.



<그림 6>

(2) $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 각 θ의 삼등분선

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 각 θ의 삼등분선은 <그림 7>과 같이 B와 B'이 놓이는 경우에 얻어진다는 것을 m 값이 γ인 경우에 언급하였다. 이것을 자세히 살펴보자.



<그림 7>

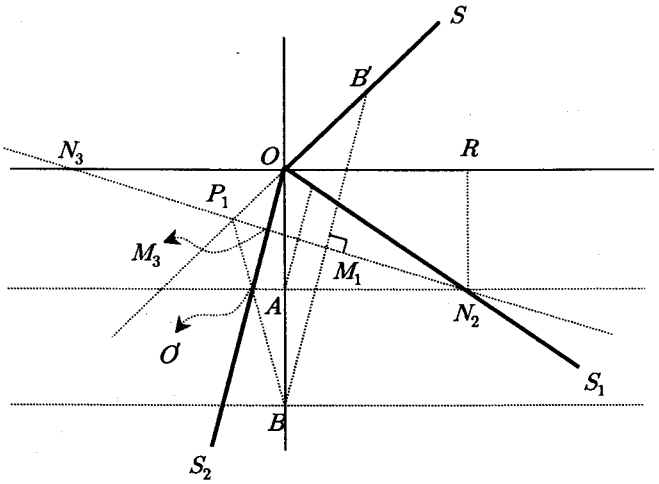
$\angle A=\frac{\pi}{2}$이고 선분 AB와 선분 OA의 길이가 같으며 AN_2는 공통이므로, 삼각형 ABN_2와 삼각형 AON_2은 합동이 된다. 따라서 $ON_2=BN_2$이다. 그리고 점 B, B'은 직선 l를 중심으로 대칭이며,

N_2M_1은 공통변이므로, 삼각형 BN_2M_1와 삼각형 $B'N_2M_1$은 합동이다. 따라서 $B'N_2 = ON_2$이고, $ON_2 = BN_2$, $B'N_2 = ON_2$가 된다.

한편 $\triangle O'AO \equiv \triangle O'AB$이므로 $O'O = O'B$이고, 두 점 O, B'은 직선 l을 중심으로 각각 O', B와 대칭이므로, $O'B = OB'$이다. 따라서 $OO' = OB'$, $ON_2 = O'N_2$이므로, $\triangle O'N_2O \equiv \triangle ON_2B'$이 된다. 그러므로 $\angle O'ON_2 = \angle N_2OB'$이며, $\angle O'ON_3$와 $\angle OO'BN_2$는 엇각으로 같고, $\angle OO'N_2$와 $\angle N_2OO'$는 이등변삼각형의 밑각으로 같으므로, 직선 OS_1, OS_2는 둔각 $B'ON_3$를 삼등분한다.

(3) $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$인 각 θ의 삼등분선

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$인 각 θ의 삼등분선은 <그림 8>과 같이 B와 B'가 놓이는 경우 종이접기를 하여 얻어진다. 이것은 m값이 α인 경우에 해당하며, 이를 자세히 살펴보자.



<그림 8>

각 N_3OO'와 각 $OO'A$는 엇각으로 같고, 삼각형 N_2AO는 이등변삼각형이므로 각 $AO'O$와 각 $O'ON_2$는 이등변삼각형의 밑각으로 같다.

이제 각 N_3OO'와 각 $B'ON_2$가 같다는 것을 보이자. 이를 위해, 각 N_3OP_1와 각 $B'OR$는 맞꼭지각으로 같으므로 각 P_1OO'와 각 RON_2이 같다는 것을 보이면 된다. 삼각형 $P_1O'O$는 삼각형 P_1BB'와 닮은 이등변삼각형이므로 세 점 P_1, O', B는 일직선에 놓여있다.

한편 삼각형 OP_1B와 이등변삼각형 $OO'B$을 살펴보자. 각 $P_1O'O$는 이등변삼각형 $OO'B$의 외각

이므로 $\angle P_1OO' = \angle P_1O'O = 2\angle O'BO = 2O'OA$이다. 각 $AO'O$와 각 $O'ON_2$는 이등변삼각형 $N_2O'O$의 밑각으로 같고, 각 $O'AO$와 OM_3N_2는 직각으로 같으므로 $\angle O'OA = \angle ON_2M_3$가 된다.

한편 삼각형 N_2OO'은 이등변삼각형이므로 $\angle ON_2M_3 = \angle O'N_2M_3$, $\angle ON_2O' = 2\angle ON_2M_3$이고 각 RON_2와 각 ON_2A는 엇각으로 같다. 따라서 $\angle P_1OO' = 2\angle ON_2M_3 = RON_2$가 성립한다. 결국 등식 $\angle B'OA' = \angle A'OO' = \angle O'ON_3$가 성립하고, 직선 OS_1, OS_2는 둔각 $B'ON_3$의 외각을 삼등분한다.

(4) $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$인 각 θ의 삼등분선

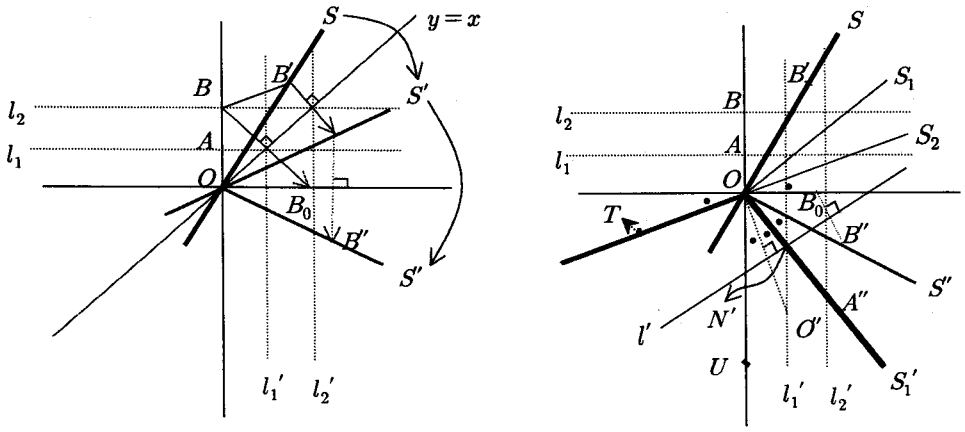
$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$인 각 θ의 삼등분선은 <그림 9>와 같이 B와 B'가 놓이는 경우 종이접기를 하여 얻어진다. 이것은 2장에서 얻어진 근 m값에서는 나타나지 않는 흥미로운 경우이다.

점 B를 직선 $y=x$를 중심으로 대칭시키면 점 B_0이 얻어진다(<그림 9>). 직선 OS를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 x축에 대하여 대칭이동하면 직선 OS''이 된다. 또 직선 l_1과 l_2를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 각각 l_1', l_2'이 된다. 이제 점 B''와 점 B_0를 겹치게 원점 O가 직선 l_1'에 있게 접으면 삼등분선을 찾을 수 있다. 이때 직선 l_1'과 접은선(B''와 B_0, O와 O'의 대칭선)이 만나는 점 N'과 원점 O를 연결한 직선이 OS_1'이고 이것이 삼등분선 중의 하나이다.

<그림 9>에서 예각 SOB_0를 삼등분한 직선을 OS_1, OS_2라 하고, 직선 OS_2의 점들 중 3사분면에 있는 점을 T라 하자. 이때 선분 OT와 선분 OA''이 둔각 $B'OB$를 삼등분함을 증명하자.

둔각 $B'OB$는 $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$사이의 각이므로 한 각은 $\frac{\pi}{2}$보다 큰 각이므로 $\frac{\pi}{2}$에 각 $B'OB_0$를 삼등분한 각 α(<그림 9>에서 • 로 표시됨)만큼 더한 각이다. 따라서 삼등분선의 하나는 OS_2에 있다. 즉 선분 OT이다.

다른 삼등분선은 선분 OU를 연장한 직선에 2α만큼 더한 직선 OS_1'에 있다. 삼등분선 OS_1'을 찾는 방법은 직선 OS를 직선 $y=x$에 대하여 대칭 이동한 직선 OS'을 다시 x축 대칭이동하면 직선 OS''이 된다. 이 때, 각 SOB와 각 $S'OB_0$, 각 B_0OS''는 같으므로 각 B_0OS''의 삼등분각과 각 SOB_0의 삼등분각이 같다. 따라서 대칭이동으로 만들어진 직선 OS''과 y축의 음의 방향의 직선이 이루는 각을 삼등분하여 선분 OU를 연장한 직선에 2α를 더하면 OS_1'이 되고 이 직선이 둔각 $B'OB$의 삼등분선이 된다.



<그림 9>

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$, $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 경우의 θ에 대해 각의 삼등분선의 방정식을 구하면 $(a+2m)x+by=0$, $\frac{2(2m+a)}{ab+bm}x-\frac{2}{m-a}y=0$이지만, $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$인 경우의 θ에 대한 각의 삼등분선의 방정식은 $(a+2m)x+by=0$, $\frac{2}{m-a}x+\frac{2(2m+a)}{ab+bm}y=0$이 된다. 즉 이들 각의 삼등분선의 방정식에서 첫 번째 방정식은 같지만, 두 번째 방정식은 다르게 된다. 왜냐 하면, $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$인 경우의 θ에 대한 각의 삼등분선 $\frac{2}{m-a}x+\frac{2(2m+a)}{ab+bm}y=0$의 방정식을 직선 $y=x$에 대한 대칭과 x축에 대한 대칭을 이용하여 얻지만, 나머지 경우의 방정식 $\frac{2(2m+a)}{ab+bm}x-\frac{2}{m-a}y=0$은 이들 대칭을 이용하지 않는다.

살펴본 각의 크기에 따른 삼등분선 탐구에서 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$, $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$인 경우의 θ에 대한 각의 삼등분선을 조사하여, 종이접기로부터 얻어진 방정식 $4m^3-3(a^2+b^2)m-a(a^2+b^2)=0$에서 고려하지 못한 한 가지 경우를 더 찾을 수 있었으며, 이것의 방정식이 다른 경우들과 다르다는 것을 밝혔다.

4. 결 론

각은 평면도형을 구성하는 기본 요소들 중의 하나로, 역사적으로 많은 수학자들의 탐구대상이 되어왔다. 수학자 Lebesgue은 각의 n등분선 개념을 도입하여, 각의 등분에 대한 연구를 활발하게 하는

계기를 마련하였다. 본 연구에서는 각의 삼등분선들의 다양한 경우를 고찰하여, 각각의 경우에 대한 삼등분선들의 방정식을 대수적으로 표현하였다.

이를 위해, 본 연구에서는 종이접기에 근거하여 각의 삼등분선을 탐구한 선행연구를 분석하여, 방정식 $4m^3-3(a^2+b^2)m-a(a^2+b^2)=0$ 을 만족하는 m, a, b에 대해 $(a+2m)x+by=0$, $\frac{2(2m+a)}{ab+bm}x-\frac{2}{m-a}y=0$가 각의 삼등분선의 방정식임을 알았다. 본 연구에서는 선행연구의 결과를 확장하기 위해, 방정식 $f(m)=4m^3-3(a^2+b^2)m-a(a^2+b^2)=0$의 근들을 조사하여, 이 방정식이 양수인 두 실근, 음수인 한 실근을 가진다는 것을 알아냈다. 그리고 방정식 $f(m)=0$의 근들 중에서 양수인 근들 중에서 작은 값의 근인 경우에 종이접기에 해당하는 삼등분선을 얻으며, 양수인 큰 근은 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대한 각의 삼등분선을 얻게 되며, 음수인 근의 경우에는 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대한 각의 삼등분선을 얻게 된다는 것을 밝히고, 각각의 경우에 대해 삼등분선을 대수적으로 나타냈다. 그런데, $f(m)=0$의 근들은 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$인 경우의 θ에 대한 각의 삼등분선을 생성하지 못했다.

한편으로, 본 연구에서는 각의 삼등분선의 다른 경우가 가능한가를 살펴보기 위해, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$, $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$인 경우의 θ에 대해 각의 삼등분선을 각각 조사하였다. 그리하여 방정식 $f(m)=0$의 근들에서 얻어지지 않는 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$인 경우의 θ에 대한 각의 삼등분선을 찾고, 이것을 대수적으로 나타냈다.

본 연구에 의해서 얻어진 결과는 중등학교 수학에 관련된 교과내용지식의 영역을 넓힐 수 있으며, 각의 삼등분선에 대한 대수적 탐구에 관련된 흥미로운 심화학습 자료가 될 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

김향숙 외 6인 (2006). 종이접기를 활용한 도형의 이해, 서울 : 경문사.

신현용 · 한인기 · 서봉건 · 최선희 (2002). 종이접기의 대수학적 의미와 교수학적 활용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **13(2)**, pp.457-475.

이상근 · 이춘구 (2007). 각의 이등분 및 삼등분선의 탐구, 수학교육논문집 **21(3)**, pp.515-525.

한인기 (2006). 수학교육학의 이론과 실제, 경남: 경상대출판부.

A Study on Various Positions and Equations of Trisectors of Angle

Lee, Sang Keun
Dept. of Math. Edu., Education Research Institute, Gyeongsang National University, 660-701, Korea
sklee@gsnu.ac.kr

Lee, Chun Goo
Gyeongnam Science High School, 668-851, Korea
chunn92@hanmail.net

In this study, we study on various positions and equations of trisectors of angle. We analyze article related with trisector's equation of angle. We elaborate the article, investigate various case of angles, and find out new equations of trisectors of angle.

* ZDM Classification : D54
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50
* Key Words : trisector, equation, obtuse angle