韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2008. 02. 제 47권, 제 1호, 91-106

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
February. 2008, Vol. 47, No. 1, 91-106

자연수 나눗셈에 관한 비형식적 지식과 형식적 지식의 연결 방안

이 종 욱 (개포초등학교)

I. 들어가는 글

초등학교에서 학생들을 가르치다보면 아동들은 4학년 1학기 때 수학을 어려워한다. 이에 대해서는 여러 가지 이유가 있겠지만 이때 학습하는 세로 나눗셈 알고리즘을 아동들이 쉽게 숙달하지 못하는 것이 그 이유 중의 하나라고 생각한다. 세로 나눗셈은 3학년에서도 학습하는데 (두 자리 수)÷(한 자리 수)의 나눗셈을 학습할 때까지는 큰 어려움을 느끼지 않는다. 그러나 (세 자리 수)÷(두 자리 수)의 나눗셈을 학습하는 4학년이 되면서 아동들은 세로 나눗셈에 포함된 곱셈, 나눗셈, 뺄셈의 연산을 모두 처리하고 일련의 알고리즘을 익히면서 많은 혼란을 겪게 된다.

3학년 때까지는 큰 어려움을 가지지 않던 아동들이 왜 4학년 때에는 어려움을 가지는가? 물론 전술한 바와 같이 (세 자리 수) ÷(두 자리 수) 나눗셈에는 초등학교에서 학습하는 모든 연산이 포함되었기 때문이기도 하다. 하지만 아동의 입장에서 보면 그들이 경험하는 비형식적 지식과는 동떨어진 형식적 수학을 학습하면서 발생하는 문제로 볼 수 있다[1].

나눗셈은 초등학교에서 도입되고 있지만 나눗셈을 해결하는 비형식적 지식은 그보다 훨씬 더 빨리 형성되며 다른 수학적 지식과 마찬가지로 나눗셈에 대한 형식적 지식도 비형식적 지식에 기초하고 있다(Resnick, 1983). 그래서 나눗셈을 좀 더 쉽게 가르치기 위해 교사들은 아동들이 나타내는 비형식적 지식을 형식적 지식과 연결시키는 것에 관심을 가지고 형식적 지식을 교육하기 이전에 먼저 아동의 비형식적 지식이 어떠한가에 대해 이해해야 한다.

Fishbein et al.(1985)과 Mulligan(1992)의 연구에 따르면 아동이 나눗셈 문제를 해결하는 비형식적 지식은 등분제와 포함제에서 서로 다르게 이루어지는 것으로 구분하고 있다. 나눗셈의 상황을 두 가지로 대별함으로써 마치 이 두 상황이 별개의 상황인 것처럼 기술하고 있다. 그러나 Vergnaud(1983)는 나눗셈의 두 상황을 아동들이 어렵게 느끼는 이유를 측정 변수의 차이로 설명하면서 등분제와 포함제가 별개의 상황이 아닐 수 있음을 시사하였다. 이렇게 나눗셈을 해결하면서 나타나는 아동들의 비형식적 지식에 대해서는 아직도 더 깊은 논의가 필요하다.

이런 맥락에서 보면 아동들이 학교 교육을 받기 전에 일상 생활에서 경험하게 되는 나눗셈에 대한 비형식적 지식과 학교 교육을 통해 학습하는 형식적 지식을 연결하기 위한 방법을 찾을 필요성이 제기된다. 따라서 본 연구에서는 먼저 형식적인 나눗셈을 학습하기 전에 가지는 아동들의 등분제와 포함제 나눗셈에 대한 비형식적 지식을 분석한다. 다음으로 분석을 통해 나타난 아동의 비형식적 지식을 형식적 지식과 연결시키는 대안적인 방안을 제시하고자 한다.

II. 이론적 배경

자연수 나눗셈과 관련한 연구 가운데 본 연구의 목적에 부합하는 연구는 크게 세 가지이다. 하나는 나눗셈을 등분제나 포함제의 상황으로 제시할 때 나타나는 어려움에 관한 것이다. 곱셈을 측정 변수와 관련하여 분석한 Vergnaud(1988)의 연구는 이런 어려움을 설명한다. 다음

* 2008년 2월 투고, 2008년 2월 심사 완료.
* ZDM분류: U22
* MSC2000분류: 97U20
* 주제어: 나눗셈, 비형식적 지식, 형식적 지식

1) 비형식적 지식은 자신의 일상 경험을 통해서 알게 된 지식을 말한다. 예를 들면 나눗셈을 학교에서 학습하기 이전에 아동이 곱셈에 대한 경험이 있어 곱셈으로 나눗셈을 해결한다면 곱셈은 비형식적 지식에 해당된다. 형식적 지식은 학교에서 형식화하는 지식으로 나눗셈을 세로 나눗셈 알고리즘으로 해결하는 것이 여기에 해당된다.

은 등분제와 포함제를 경험하는 비형식적 지식에 관한 것이다. Fischbein et al.(1985)이 제시한 나눗셈의 기본 상황과 Mulligan(1992)과 Neuman(1999)이 실행한 등분제와 포함제를 경험하는 초기 방법에 관한 연구가 이런 부류에 속한다. 마지막으로 교과서에 나타난 나눗셈 지도 내용을 분석한다.

1. 등분제와 포함제 상황에서 나타나는 어려움

Vergnaud(1988)는 곱셈이 한 가지 측정 변수 또는 두 가지 측정 변수와 어떻게 관련되는가를 연구하고서 두 측정 변수보다는 한 측정 변수 내에서 생각하는 것이 더 편하다고 하였다. 이와 같은 사실은 등분제와 포함제 나눗셈을 해결하면서 아동들이 나타내는 비형식적 지식을 탐구하고자 할 때 도움을 주게 된다. 왜냐하면 포함제는 한 측정 변수와 등분제는 두 측정 변수와 관련된다는 것을 알 수 있기 때문이다. 예를 들어, "사과가 42개 있습니다. 한 명이 6개씩 가지려고 합니다. 모두 몇 명이 나누어 가질 수 있습니까?"라는 42÷6의 포함제 문제에서는 제수뿐 아니라 피제수도 사과와 관련된다. 여기서 사과 6개는 사과 42개를 측정하는 단위로 측정 변수가 된다. 이와 달리 "사과가 42개 있습니다. 6명의 학생이 똑같이 나누어 가지려고 합니다. 한 사람이 몇 개씩 가지면 됩니까?"라는 42÷6의 등분제 문제에서 피제수는 사과와 관련되지만 제수는 아동과 관련된다. 이렇게 되면 사과 42개를 측정하기 위한 단위로 6명의 학생을 사용할 수 없게 된다.

Brown(1992)은 아동들이 포함제 문제를 등분제 문제보다 더 쉽게 푼다는 사실을 알아냈다. 그러나 Mulligan (1992)은 두 유형의 문제에서 난이도에 별다른 차이를 발견하지 못했다. Brown의 연구에서 아동들은 심지어 묶기 전략이 등분제 나눗셈 문제에 적합한 방법이 아니었지만 분할 전략보다 묶기 전략을 더 많이 사용했다. 비록 등분제에 적절하지 않은 전략임에도 불구하고 답이 맞는 경우이다. 예를 들어, 초콜렛 12개를 어린이 3명이 똑같이 나누어 가질 때 한 명의 몫을 구하는 문제에서 12개의 초콜렛을 3개씩 4묶음으로 만들어 4개라고 답하는 묶기 전략은 어린이의 수와 나누어 가지는 초콜렛의 수를 바르게 표상하지 못하면서 답만 맞는 경우가 된다 (고상숙, 고호경, 박만구, 이중권, 정인철, 황우형 역, 2004). Vergnaud나 Brown의 연구를 살펴보면 등분제와 포함제 나눗셈은 아동들이 서로 다르게 경험하는 세기 활동이지만 동시에 어느 정도 서로 관계가 있음을 알 수 있다.

2. 등분제와 포함제를 경험하는 비형식적 지식

소수의 곱셈과 나눗셈에 대해 중학생을 대상으로 수행한 Fischbein et al.(1985)의 연구를 살펴보면 나눗셈을 등분제와 포함제의 두 상황으로 서로 다르게 경험한다는 가정에 몇 가지 의문점을 가지게 된다. Fischbein et al.(1985)은 포함제는 교육에 의해 획득되는 상황이며 나눗셈에서 기본 상황은 등분제만 있다는 결론을 내렸다. 그러나 다른 연구들(Brekke, 1991; Murray, Olivier, & Human, 1992; Mulligan, 1992)을 살펴보면 포함제가 학교 수업의 결과라는 것도 등분제가 나눗셈의 유일한 기본 상황이라는 것도 확신하지 못했다.

Murray et al.(1992)은 아동들에게 자신의 문제 해결 전략을 만들고 토론하도록 하였을 때 처음에는 등분제를 해결하기 위해 등분제 상황을 사용하는 아동이 거의 없었으나 얼마 후 측정 구성 모델[2]로 대체됨을 관찰하고 아동들은 측정 구성 모델을 가장 자주 사용하는 전략으로 선택하는 것 같다고 하였다. 이와 비슷하게 Silver(1987)의 연구에서는 학생들에게 나눗셈식에 맞는 적절한 상황을 제시하라고 할 때 그들은 등분제 상황으로 제시하지만 정작 나눗셈 알고리즘은 포함제의 방법으로 해결하였다(Neuman, 1999).

이렇게 모순되는 결과는 등분제뿐 아니라 포함제는 이중적인 특성, 즉 등분제와 포함제의 양면적인 특성을 가진다는 것을 암시한다. 아동들은 등분제의 상황을 생각하지만 문제를 해결할 때에는 포함제의 방법을 사용한다는 것이다.

계산 문제를 해결하기 시작할 때 아동들은 제3의 미지수를 찾기 위해 이미 알고 있는 두 수를 이용한다. 나눗셈에서 주어진 수는 제수와 피제수이다. 42÷6을 세로

2) 측정 구성 모델은 예를 들면 "사과 42개를 7명이 똑같이 나누어 가지려면 몇 개씩 가지면 됩니까?"라는 나눗셈 문제에서 한 명이 2개씩 또는 6개씩 가지는 것을 계속 반복하여 나타내는 것이다.

형식의 나눗셈으로 계산할 때 "42에는 6이 몇 번 들어가는가?"라고 묻는 것이 일반적이다. 이런 질문은 나눗셈을 포함제의 상황으로 학습할 때부터 시작하는 것이 자연스럽다. 그러나 "사탕 42개를 6명의 학생에게 똑같이 나누어 주려고 합니다. 한 사람에게 몇 개씩 주면 됩니까?"와 같은 등분제 문제를 해결하면서 이런 질문을 하여도 학생들은 전혀 어려움을 느끼지 않는다. 이 질문을 다시 생각해보면 "사탕 42개에는 6명의 학생이 몇 번 들어가는가?"라는 의미를 가지게 된다.

박현미(2006)는 자연수 나눗셈에 관한 초등학생의 비형식적 지식을 조사하고서 아동들이 사용한 전략을 14가지 경우로 세분하였다. 아동들은 포함제와 등분제 문제를 구별하여 해결하였으나 전략 가운데 묶어세기, 뛰어세기, 곱셈과 같은 몇 가지 전략은 두 상황 모두에서 사용하였다. 박현미는 분류한 비형식적 지식을 형식적 지식과 연계하고자 하였으나 실제적인 학습 활동을 제시하지는 못하였다.

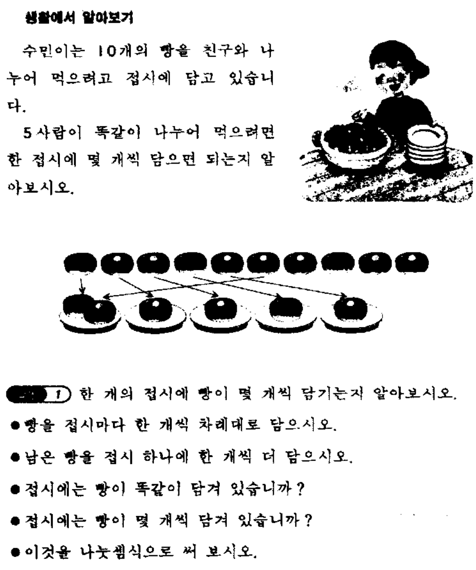
본 연구의 실험에서 사용한 나눗셈 문제에서 등분제는 빵의 수와 사람의 수라는 두 가지 측정 변수를, 포함제는 사탕의 수라는 한 가지 측정 변수를 사용하는 문제이다. 앞에서 살펴본 Vergnaud나 Brown의 결과를 수용하면 아동들은 포함제 문제를 보다 더 쉽게 해결하리라는 추측을 할 수 있으며, Mulligan의 연구 결과를 받아들인다면 등분제나 포함제 문제에 관계없이 아동들은 전통적으로 사용하는 "몇 번 들어가는가?"라는 질문에 따라 나눗셈 문제를 포함제로 해결할 가능성이 있음을 예상할 수 있다.

3. 교과서에 나타난 나눗셈 지도 내용 분석

아동들이 나타낸 비형식적 지식을 형식적 교육과 연결시키기 위해서는 먼저 현재 학교교육에서 이루어지는 학습내용을 살펴보아야 할 것이다. 이 장에서는 7차 교육과정의 교과서에서 제시하는 내용을 중심으로 지도 내용을 분석하고자 한다.

3-가에서 나눗셈을 처음 도입하면서 나눗셈이 이루어지는 경우를 포함제와 등분제의 두 가지로 나누어 소개하고 있다. 3-가 교과서(교육인적자원부, 2002a)에서 포함제 상황으로 제시한 "영민이는 사탕 8개를 한 봉지에 2개씩 넣어 선물하려고 합니다. 모두 몇 봉지를 만들 수 있는지 알아보시오."의 문제는 계속해서 같은 양이 몇 번 들어 있는가를 세어 보면 그 횟수가 답이 되는 것으로 본 연구의 결과 아동들이 가장 많이 사용한 묶어 세기 전략을 반영하고 있다. 그러나 등분제로 제시한 문제를 해결하는 전략은 본 연구에서 실제 아동들이 사용한 전략과 다소 차이가 있음을 알 수 있다.

3-가 교과서(교육인적자원부, 2002a)에는 양을 똑같이 나누는 조작 활동으로 한 개씩 담는 활동을 계속하여 더 담을 것이 없을 때까지 한다(<그림 II-6> 참조). 활동1에서 보면 한 개의 접시에 빵이 몇 개씩 담기는지 알아보기 위해 먼저 빵을 접시마다 한 개씩 차례대로 담아보고, 빵이 남아 있음을 확인 한 다음, 남은 빵을 다시 접시 하나에 한 개씩 담도록 한다. 그리고 마지막으로 접시 한 개에 담긴 빵의 수를 확인한다. 이것은 본 연구에서 정의한 한 번에 한 개씩 거래하는 전략과 일치한다.



<그림 II-6>

그러나 연구에 참여한 아동들은 이 전략을 거의 사용하지 않았다. 활동1에 이어 제시하는 활동2는 28÷7의 등분제 상황으로 본 연구의 실험에서 사용한 문제와 유사한 상황이다(<그림 II-7> 참조).

활동2를 하면서 교과서에는 "스티커를 한 장씩 앞에서부터 7개의 칸에 차례대로 붙여 보시오."라는 지문을 제시하여 처음부터 한 번에 한 개씩 거래하는 전략을 사용하도록 하였다. 그러나 이것은 본 연구에서 많은 아동들이 사용한 어림-조절의 전략을 유도하기에는 미흡하다. 스티커를 붙일 수 있는 7개의 칸을 미리 만들어 놓은 상황은 본 연구의 2차 실험에서의 상황과 유사하다. 2차 실험에서 그림을 그린 아동들은 미리 거래되는 횟수를 나타내는 사람을 그려놓고 집합에 속한 수를 어림하여 어림한 빵의 수를 각 사람에게 나누어주었다. 이런 점에서 보면 교과서에서 이루어지는 활동은 아동들이 실제로 실행하는 비형식적 나눗셈 지식을 다양하게 표현하는 데에 한계를 가진다.

생활에서 알아보기

병우네 반 학생 28명은 7모둠으로 똑같이 나누어 과제를 준비하기로 하였습니다.

한 모둠은 몇 명으로 이루어지는지 알아보시오.

2) 7개의 칸에 스티커 28장을 똑같이 나누어 붙여 보시오.

- 스티커를 한 장씩 앞에서부터 7개의 칸에 차례대로 붙여 보시오.
- 스티커가 없어질 때까지 계속하여 7개의 칸에 한 장씩 차례대로 붙여 보시오.
- 스티커가 7개의 칸에 똑같이 붙어 있습니까?
- 스티커가 한 칸에 몇 장씩 붙어 있습니까?
- 이것을 나눗셈식으로 써 보시오.

<그림 II-7>

3-나 교과서(교육인적자원부, 2002b)에서는 조작 활동으로 (두 자리 수)÷(한 자리 수)의 몫을 구하면서 포함제의 상황으로 계산 원리를 유도하고 있다. 생활에서 알아보기에서 "사과 42개를 한 봉지에 2개씩 담으려고 합니다. 모두 몇 봉지가 되는지 알아보시오."의 상황을 제시하였다. 그리고 활동1에서 바둑돌 42개를 2개씩 묶음으로 묶어 모두 몇 묶음이 되는지 알아본다. 이것은 본 연구에서 포함제를 해결하면서 아동들이 주로 사용한 묶어 세기 전략과 같다. 그러나 활동2에서 42÷2를 계산하는 원리를 알아보면서 이루어지는 활동은 묶어 세기 본래의 활동과는 차이를 나타낸다. 활동2에서 제시한 지문은 다음과 같다.

활동2) 42÷2를 어떻게 계산하면 되는지 수 모형으로 알아보시오.

- 42의 수 모형을 놓으시오.
- 십 모형 4개를 2개씩 묶음으로 묶으시오.
- 십 모형은 몇 묶음입니까?
- 낱개 모형 2개를 2개씩 묶음으로 묶으시오.
- 낱개 묶음은 몇 묶음입니까?
- 42÷2는 얼마라고 생각합니까?

먼저 42의 수 모형을 놓고 십 모형 4개를 2개씩 묶어 십 모형을 2묶음으로 만든다. 그리고 낱개 모형 2개를 2개씩 묶어 한 묶음을 만든다. 이 활동을 통하여 42÷2=21이라는 것을 이해하고 이것을 세로 형식의 계산과 연결시킨다. 그러나 이 활동에서 의문스러운 것은 왜 십 모형 4개를 2개씩 묶음으로 묶는가라는 것이다. 포함제 상황에서 제수는 집합에 속한 사물의 수가 되는데 이 활동에서 제수 2는 묶음 안에 포함된 수 2가 아니다. 다시 말하면, 아동들이 42개의 바둑돌을 2개씩 묶음으로 묶어 본 활동1에서는 집합에 속한 사물의 수로서 2가 제수가 되었지만 활동2에서 제수 2는 집합에 속한 사물의 수로서 2가 아니라 십 모형 2개, 낱개 모형 2개로 각 모형을 단지 2개씩 묶는 수, 즉 하나는 20씩 다른 하나는 2씩 묶어 세는 서로 다른 집합에 속한 사물의 수가 되었다.

등분제와 관련하여 3-나 교과서(교육인적자원부, 2002b)에는 "색종이 52장을 네 사람에게 나누어 주려고 합니다. 한 사람에게 몇 장씩 나누어 줄 수 있는지 알아보시오."의 상황을 제시하였다. 그러나 활동1에서는 52÷4의 몫을 구하기 위해 "바둑돌 52개를 4개씩 묶음으로 묶어 보시오." 라는 지문을 제시하면서 포함제의 상황으로 문제를 해결하고 있다. 활동2에서는 52÷4의 몫과 나머지를 구하기 위해 다음과 같은 지문을 제시하였다.

활동2) 52÷4의 몫과 나머지는 얼마인지 수 모형으로 알아보시오.

· 52의 수 모형을 놓으시오.
· 십 모형 5개를 4개씩 묶음으로 묶으시오.
· 십 모형은 몇 묶음이고, 나머지는 몇 개입니까?
· 남는 십 모형을 낱개 모형으로 바꾸시오.
· 낱개 모형 12개를 4개씩 묶음으로 묶으시오.
· 낱개 모형은 몇 묶음입니까?

십 모형 5개를 4개씩 묶음으로 묶는 것은 등분제를 해결할 때 나타나는 포함제의 상황을 제대로 반영하지 못하는 활동이다. 등분제의 기본적인 해결 방법은 말 그대로 똑같이 나누는 활동이다. 그러나 활동2에서 제시한 방법은 등분도 아니고 포함제에서 사용하는 묶어 세기 방법으로 보기도 어렵다. 만약 이 방법을 묶어 세기 전략으로 본다면 생활 상황은 분할의 상황으로 제시하고 해결은 포함제의 해결 방법을 택하여 모순이 일어나게 된다. 다만 이 활동은 세로 형식의 나눗셈과 대응하는 활동으로 십의 자리 수를 제수로 나누고 남은 십 모형 한 개를 낱개 모형으로 바꾸어 제수로 나누면 몫이 구해지는 세로셈 알고리즘과 일치하게 된다.

등분제를 포함제로 해결하는 예는 계속해서 나타난다. 4-가 교과서(교육인적자원부, 2002c) 두 자리 수로 나누기와 관련하여 생활에서 알아보기에는 “세림이는 친구들과 함께 농촌 일손 돕기를 하고 고구마 83개를 선물로 받았다. 이 고구마를 24명이 나누어 가지려면 한 사람이 몇 개씩 가져야 하는지 알아보아라.”는 등분제의 상황을 제시하였다. 그러나 이어지는 활동1에서는 (두 자리 수)÷(두 자리 수), (세 자리 수)÷(두 자리 수)의 몫과 나머지를 구하는 학습을 하면서 아래와 같은 지문을 제시하였다.

활동1) 83÷24를 어떻게 계산하는지 알아보아라.
· 83에는 20이 몇 번 들어간다고 생각하는가?
· 24×4는 얼마인가? 이것은 83보다 큰가?
· 83에는 24가 몇 번 들어간다고 생각하는가?
· 83÷24의 몫과 나머지는 얼마라고 생각하는가?

활동1에서 해결하는 방법은 포함제를 해결하면서 사용하는 묶어 세기 전략을 도입하여 가정몫을 구하는 것이다. “83에는 20이 몇 번 들어간다고 생각하는가?”는 “83개를 20개씩 묶음으로 묶으면 몇 묶음이 되는가?”를 다르게 표현한 묶어 세기 전략이다. 즉 여기서도 결국은 등분제를 해결하면서 포함제 전략으로 세로 나눗셈 알고리즘과 연결시키고 있다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구에서는 2006년 12월과 2007년 6월 두 번에 걸쳐 실험을 실시하였다. 두 실험 모두 1, 2학년 아동 6명씩(총 24명)을 연구 대상으로 하였다. 1차와 2차 실험의 아동은 동일하지 않으며 아동들은 담임 교사의 추천을 받아 상, 중, 하 수준 각 2명씩 선발하였다. 형식적인 나눗셈 학습을 하기 이전 단계에 있는 아동들이 가질 수 있는 포함제와 등분제에 대한 비형식적 지식을 분석하는 것이 연구의 목적이기 때문에 3학년 이상의 아동은 연구 대상에 포함하지 않았다. 1, 2학년 아동의 경우라도 학원이나 과외, 혹은 가정에서 선행학습을 받은 학생은 제외하였으며, 비록 24명이 나타낸 비형식적 지식을 일반화하여 해석하는 데에 무리가 있지만 각 학년에서 수준을 3단계로 구분하여 2명씩 선발하여 보다 다양한 수준에서 나타나는 나눗셈에 관한 비형식적 지식을 분석하고자 하였다.

실험을 구분하여 실시한 것은 연구를 진행하면서 등분제와 관련하여 새로운 의문이 생겼기 때문이다. 선행 연구의 결과를 살펴보면 등분제에서 많은 아동들은 한 번에 한 개씩 거래하는 전략[3]을 사용하여 똑같이 나누는 활동을 경험하며, 교과서에서도 등분제를 해결하는 활동으로 한 번에 한 개씩 거래하는 활동을 제시하였다. 그러나 1차 실험에서 이 전략은 12명 가운데 1명만 사용하였다. 이것은 일반적으로 등분제를 해결하면서 가장 많이 사용하는 것으로 알고 있는 비형식적 전략과는 상

3) 거래라는 것은 주로 등분제를 해결하면서 이루어지는 활동으로 이미 정해진 제수 개의 묶음에 몇 개씩 물건을 놓는 활동을 말한다. 예를 들어 15개의 구슬을 3봉지에 나누어 넣는 활동을 하면서 아동들은 첫 판에 봉지 각각에 구슬을 한 개씩 넣을 수 있다. 그리고 다음 판에는 봉지 각각에 구슬을 2개씩 넣을 수 있다. 그리고 셋째 판에서는 봉지 각각에 역시 구슬을 2개씩 넣을 수 있다. 이렇게 각 판마다 1개 또는 2개씩 구슬을 넣고 남아있는 구슬을 다시 넣는 활동을 본 연구에서는 거래라고 한다.

당한 차이가 있었다. 연구자는 연구 대상을 달리하여 실험을 했을 때 어떤 결과가 나타나는지 살펴볼 필요성을 느꼈으며 실험을 하면서 사용한 학습자료나 교사의 질문을 달리했을 때 나타나는 결과도 더 깊이 분석하고자 하였다. 6개월 후 2차 실험 때에는 새로이 선발한 1, 2학년 아동을 연구대상으로 1차 실험과는 다른 학습자료와 교사의 발문을 제시하였다.

2. 문제

한 문제는 등분제와 다른 한 문제는 포함제와 관련되는 두 가지 간단한 문제를 제시하였다.

가. 등분제: 빵 24개를 4 사람에게 똑같이 나누어 주려고 합니다. 한 사람이 몇 개씩 가지면 됩니까? (12, 3)
나. 포함제: 사탕 30개를 한 봉지에 6개씩 넣어 선물하려고 합니다. 모두 몇 봉지를 만들 수 있습니까? (15, 3)

문제는 초등학교 3-가 단계 교과서에 나오는 상황을 참고하였다. 일상 경험을 반영하고 있기 때문에 1학년 아동도 쉽게 접근할 수 있는 수준이었다. 그러나 1학년 아동에게 문제를 제시할 때에는 괄호 안의 작은 수로 문제를 먼저 제시하고 나서 원래의 큰 수 문제를 제시하였다.

3. 자료 수집 및 분석

실험은 연구 대상 아동이 다니는 학교의 특별실에서 이루어졌다. 아동에게는 문제가 적힌 학습지와 연필 그리고 학습자료를 제시하였다. 1차 실험에서는 낱개 수 모형 약 40개를 제공하였으며 2차 실험에서는 검은 바둑돌과 흰 바둑돌을 40개씩 제공하였다. 필요한 경우 구체물을 사용할 수 있도록 하였다.

본 연구에서는 주로 관찰과 기록물 수집의 두 가지 방법으로 자료를 수집하였다. 문제에 대한 해결 과정을 설명하도록 요구하였으며 설명이 명확하지 않을 경우 추가적인 질문을 하여 더욱 명료한 설명이 이루어지도록 하였다. 그리고 이와 같은 실험의 전 과정을 관찰하였다.

연구 대상자가 실험에 참여하면서 문제 풀이 과정을 그림이나 글로 기록한 학습지, 연구자가 각 실험을 마치고 나서 생각이나 느낌을 기록한 일지, 실험 당시 아동들이 구체물을 사용한 장면을 그림으로 기록한 상황도를 수집하였다.

실험을 진행하면서 아동들의 모든 활동을 기록하고 아동과 연구자 사이의 대화를 분석하기 위해 비디오 녹화를 하였다. 비디오 자료를 전사하여 아동들의 인지적인 과정을 분석할 수 있었다.

Ⅳ. 결과

나눗셈을 해결하는 과정에서 나타나는 아동들의 비형식적 지식을 포함제와 등분제의 두 상황으로 구분하여 살펴볼 것이다.

1. 포함제 해결 과정에 나타난 아동들의 비형식적 지식

아동들은 주로 포함제를 거래 상황으로 해결하였다. 거래는 전체 사물의 수에서 반복적으로 제거되는 각 집합에 속한 사물의 수 알기, 이들 각 집합이 거래되는 횟수 알기, 재구성된 전체 사물의 수 확인하기의 세 가지 절차를 사용하였다. 그러나 절차는 순서적으로 일어나는 것은 아니었다. <표 Ⅳ-1>은 아동들이 포함제를 해결하면서 나타낸 계산 전략이다.

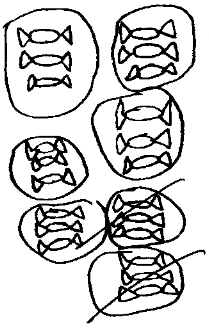
가. 묶어 세기
묶어 세기 전략은 1, 2학년 모두가 자주 사용하는 거

<표 Ⅳ-1> 포함제에서 나타난 계산 전략 (1차 실험, 아동수 12명)

전략	설명	아동수
묶어 세기	집합에 속한 사물의 수로 묶음을 만든 다음 전체 사물의 수를 확인하고 묶음을 세는 전략	3
	전체 사물의 수를 먼저 확인하여 집합에 속한 사물의 수로 묶음을 만든 다음 묶음을 세는 전략	7
곱셈	곱셈 구구를 사용하여 묶음의 수를 구하는 전략	2

래 전략이었다. 묶어 세기는 두 가지 방법으로 나타났다. 첫 번째는 반복적으로 제거되는 집합에 속한 사물의 수를 먼저 확인하고 전체 사물의 수를 어림하여 표시한 다음 다시 전체 사물의 수를 확인하는 방법이다.

<그림 Ⅳ-1>과 같이 1학년 동현이는 그림을 그려서 처음에 사탕 3개씩을 그린 다음 원으로 묶어 한 봉지로 표시하였다.



<그림 Ⅳ-1>

이런 그림을 계속해서 7번 그렸다. 문제에서 제시한 전체 사탕의 수를 알지 못해 문제를 다시 읽었다. 그런 다음 "하나, 둘, 셋, 넷, 다섯, …, 열 다섯"하고 세면서 전체 사물의 수 15까지 세었다. 그리고 그 이상의 봉지는 아니라는 뜻으로 사선을 그었다. 다시 봉지의 수를 세어 5봉지라고 답하였다.

두 번째 방법은 전체 사물의 수를 먼저 확인하고 집합에 속한 사물의 수만큼 묶어 묶음의 수를 구하는 것이다. <그림 Ⅳ-2>에서 1학년 유진이는 먼저 15개의 동그라미를 그려놓고, 3개씩 묶어, 묶음의 수가 5개가 된다는 사실을 확인했다.

<그림 Ⅳ-2>

나. 곱셈

30÷6=□에서 미지의 수를 구하기 위해 6×□=30의 곱셈으로 바꾸어 해결하였다. 2학년 아동 중 2명이 곱셈구구를 이용하여 "6, 5, 30이니까 5봉지"라고 답하였다. 2학년은 1학기에 곱셈을 배웠다.

2. 등분제 해결 과정에서 나타난 아동들의 비형식적 지식

등분제에서도 포함제에서 사용하는 거래의 세 가지 절차가 그대로 나타난다. 한 번에 한 개 또는 여러 개씩 거래하는 전략은 포함제에서의 방법이 등분제의 문제 상황과 통합될 때 어떤 현상이 일어나는가를 잘 설명해 준다. 등분제에서는 전체 사물의 수와 집합의 수를 제시하고 각 집합에 속한 사물의 수를 구하는 것이며, 집합의 수는 포함제에서 거래되는 횟수와 같은 의미이지만 이미 정해져 있다. <표 Ⅳ-2>는 아동들이 등분제를 경험하면서 나타낸 계산 전략이다.

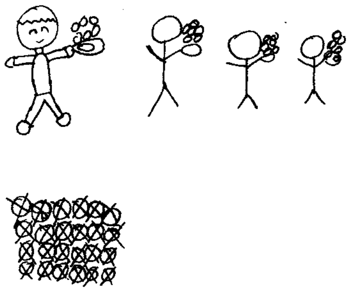
가. 한 번에 한 개씩 거래

한 번에 한 개씩 거래할 때 제수로 표현된 집합의 수는 포함제에서와 같이 피제수로부터 반복적으로 가져왔다. 예를 들면 <그림 Ⅳ-3>에서 빵 24개를 4사람에게 똑같이 나누어 줄 때 각 사람에게 한 번에 한 개씩 주게 되면 1회에 거래된 빵의 수는 사람의 수 4와 같게 되며

<표 Ⅳ-2> 등분제에서 나타난 계산 전략 (1, 2차 실험, 아동수 각 12명)

전략	설명	1차	2차
한 번에 한 개씩 거래	집합의 수를 정해 놓고 집합에 속한 사물의 수를 1로 하여 전체 사물의 수 모두를 등분할 때까지 거래하는 전략	1	0
어림-조절 거래	집합의 수를 정해 놓고 집합에 속한 사물의 수를 2 이상 어림하여 거래한 다음 다시 전체 사물의 수 모두를 등분할 때까지 집합에 속한 사물의 수를 조절하는 전략	3	6
묶음-조절 거래	집합의 수를 미리 정하지 않고 집합에 속한 사물의 수를 먼저 어림하여 묶음을 만든 다음 집합의 수와 전체 사물의 수를 확인하고 조절하여 집합에 속한 사물의 수를 구하는 전략	5	3
곱셈	곱셈 구구를 사용하여 답을 구함	3	3

이 수만큼 계속해서 피제수로부터 가져오게 된다.



<그림 Ⅳ-3>

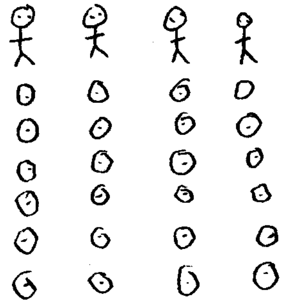
1차 실험에서 2학년 익주는 먼저 위쪽에 4사람을 그리고 아래쪽에 24개의 빵에 해당하는 원을 그린 다음 각 원에 하나씩 ×표를 하고서 각 사람의 손에 있는 접시에 빵 한 개씩을 올려놓았다. 그리고 빵이 모두 없어질 때까지 계속 반복하였으며 1회 거래 할 때마다 4개씩의 빵이 없어졌다.

교과서에서 제시하는 등분제는 한 번에 한 개씩 거래하는 방법이지만 1차 실험에서는 12명 중 1명만 이 방법을 사용하였다. 연구자는 한 번에 한 개씩 거래하는 전략이 거의 없다는 것에 의문을 가져 6개월 뒤 다시 1, 2학년 각각 6명씩을 대상으로 추가 실험을 하였다. 구체물은 검은 바둑돌과 흰 바둑돌로 변경하여 제공하였다. 그리고 가능하면 그림을 그리도록 하였다.

1차 실험에서는 구체물로 낱개 수 모형만을 제시하였기 때문에 아동들이 구체물을 사용하면서 수 모형만으로 집합에 속한 수를 계속적으로 어림하면서 몇 묶음으로 나누는 묶음-조절의 전략을 주로 사용한 것으로 판단하였다. 다시 말하면, 1차 실험에서는 빵에 대한 구체물은 낱개 수 모형으로 제공되었지만 사람에 해당하는 구체물이 없었기 때문에 등분제에서 집합의 수를 나타내는 데에 어려움이 있을 것으로 생각했다. 2차 실험에서는 집합의 수를 나타낼 수 있게 할 의도로 두 종류의 바둑돌을 제시하였다. 예를 들면, 검은 바둑돌은 사람의 수를 흰 바둑돌은 빵의 수를 나타낼 수 있을 것으로 보고 이렇게 했을 때 한 번에 한 개씩 거래하는 전략을 더 잘 나타낼 수 있을 것으로 보았다. 그러나 2차 실험에서 아동들은 한 번에 한 개씩 거래하는 전략을 아무도 사용하지 않았다. 이것은 Neuman(1999)의 연구에서 거래를 경험하는 아동 중 절반이 한 번에 한 개씩 거래한다는 것과는 상당히 다른 결과이며 교과서에서 제시하는 등분제의 학습 방법과도 상반되는 결과를 나타낸다.

나. 어림-조절 거래

2차 실험에서 아동들이 가장 많이 사용한 전략이다. 1차 실험에서 1학년 수민이는 어림-조절의 거래를 통하여 포함제를 해결하면서 사용한 절차를 반복적으로 어림하여 이를 조절하였다(<그림 Ⅳ-4> 참조).



<그림 Ⅳ-4>

먼저 4명의 각각에 2개씩 빵을 나누어주고, 나누어 준 빵이 8개라는 것을 알고 아직도 전체에서 나누어 줄 빵이 남았음을 알았다. 그리고 다시 4명의 각각에 이번에는 3개씩 빵을 나누어주고, 아직도 나누어 줄 빵이 4개가 더 있음을 알고, 이번에는 각각 1개씩의 빵을 나누어주었다. 그리고 최종적으로 한 사람이 가진 빵의 수를 세어 6개라고 답하였다. 여기서 수민이는 계속해서 집합에 속한 사물의 수를 어림하고 조절하여 최종적인 수를 결정하였다.

그러나 등분제 24÷4에서 반복적으로 거래되는 횟수, 여기서는 집합의 수는 4로 이미 정해져 있었다. 수민이가 거래한 것을 다르게 표현하면 다음과 같다.

사람	사람	사람	사람	거래
2	2	2	2	…1회
3	3	3	3	…2회
1	1	1	1	…3회

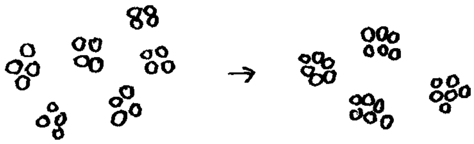
어림-조절의 전략은 1차 실험에서 12명 중 3명이 사용하였다. 그러나 2차 실험에서는 12명 중 6명이 사용하

였다. 이것은 1차 실험에서 묶음-조절 전략을 사용한 빈도와 비슷한 수이다. 2차 실험에서 연구자는 가능하면 그림을 그려보라고 하였다. 그림으로 그렸을 때 아동들은 자연스럽게 사람을 그렸으며 사람 아래에 자신이 어림한 수만큼의 원을 그렸다. 그리고 전체 사물의 수를 모두 나누어 줄 때까지 집합에 속한 사물의 수를 다시 늘이거나 줄였다. 이를 통해 보면 아동들은 구체물을 사용할 때 그들은 한 가지 변수, 즉 24개의 빵과 4개의 빵[4]으로 생각하는 경향이 있으며 그림을 그렸을 때 그들은 두 가지 변수, 즉 24개의 빵과 4사람을 생각하는 것 같다.

그림으로 상황을 나타낼 수 있는 아동들은 2가지 변수를 생각할 수 있었다. 1차 실험과 2차 실험에서 어림-조절의 전략을 사용한 대부분의 아동은 그림을 그렸으며 구체물을 사용한 아동들은 대부분 묶음-조절의 전략을 사용하였다. 다시 말하면 그림으로 전략을 나타낸 아동들은 집합의 수에 해당되는 것으로 사람을 그리고 빵에 해당되는 것으로 원을 나타내어 어림-조절을 할 수 있었다.

다. 묶음-조절 거래

묶음-조절 전략은 1차 실험에서 아동들이 가장 많이 사용한 전략이었다(12명 중 5명). 묶음-조절은 먼저 전체 사물의 수를 확인하고, 집합에 속한 사물의 수와 집합의 수를 계속 조절하는 전략이다. 다시 말하면 집합에 속한 사물의 수를 조절하는 것은 어림-조절과 같지만 집합의 수도 함께 조절한다는 것이다. 이것은 그냥 보면 어림-조절의 전략과 별반 차이가 없는 것 같지만 어림-조절과는 큰 차이가 있다. 어림-조절의 전략은 전체 사물의 수와 집합의 수를 설정한 다음 집합에 속한 사물의 수를 조절하는 것이다. 하지만 묶음-조절의 전략은 전체 사물의 수만 설정하고 집합의 수와 집합에 속한 사물의 수 모두를 조절하는 것으로 더욱 복잡한 과정을 경험한다.



<그림 IV-5>

이것은 아동이 "24개의 빵을 4명에게" 나누어주는 문제를 "24개의 빵을 4개씩"으로 잘못 해석하면서 일어난 결과이다. 결국 빵과 사람이라는 두 변수를 "24개의 빵과 4개의 빵"이라는 한 변수 빵으로만 접근하였다. 따라서 본질적으로 이 전략은 등분제의 바람직한 전략으로 보기 어렵다. 왜냐하면 등분제는 이미 전체 사물의 수와 집합의 수가 정해져 있는데 이 전략은 이미 정해져 있는 집합의 수를 불필요하게 다시 확인하고 있기 때문이다.

1차 실험에서 곱셈 전략을 사용하지 않은 아동들은 주로 구체물을 사용하였다. 낱개 수모형을 전체 사물의 수만큼 세어 몇 개의 묶음으로 나누었다. 1차 실험과 2차 실험 모두에서 아동들은 빵 24개를 4명이 나누는 문제에서 24개를 4개씩 6묶음으로 나누었다가 다시 수정하여 6개씩 4묶음으로 나누었다. 이것은 문제에서 집합에 속한 사물의 수와 집합의 수를 혼돈한 때문인 것 같다.

라. 곱셈

나눗셈 문제를 해결하면서 곱셈으로 변형하여 미지의 수를 구하였다. $24 \div 4 = \square$에서 $\square \times 4 = 24$ 또는 $4 \times \square = 24$가 되는 미지의 수 □를 곱셈 구구를 이용하여 구할 수 있었다. 주로 곱셈 구구를 이미 학습한 2학년에서 사용한 전략이다.

V. 비형식적 지식을 형식적 지식과 연결하기 위한 방안

지금까지 아동이 등분제와 포함제 나눗셈을 해결하면서 경험하는 비형식적 지식과 교과서에 나타난 나눗셈 지도 내용을 분석하였다. 이 장에서는 앞에서 살펴본 내용을 바탕으로 아동의 비형식적 지식을 형식적 나눗셈 교육과 연결시킬 수 있는 구체적인 방안을 제안하고자 한다.

Baratta(1976; 백선수, 2005에서 재인용)는 일반적으로

---

4) 24개의 빵과 4개의 빵이란 묶음-조절 전략에서 흔히 나타나는 경우인데 예를 들면 아동들은 빵 24개를 4명이 나누어 먹는 상황을 24개의 빵을 4개의 빵으로 묶음을 만들었다. 문제를 "빵 24개를 4개씩 한 봉지에 넣으면 몇 봉지가 나오는가?"라는 문제와 같은 방법으로 이해하여 24와 4를 빵으로 생각하는 경우를 말한다.

수업이 개념단계, 연결단계, 형식화단계를 거쳐서 진행되어야 한다고 하면서, 각 단계별로 다음과 같은 지도 방법을 제시하였다. 첫째, 개념단계에서는 학생이 기초적이고 직관적인 이해를 구성할 수 있도록 개개인에게 의미있는 방법으로 주제를 탐구할 수 있는 기회를 제공하고, 학생의 비형식적 지식이 존중되고 확장될 수 있도록 지도한다. 둘째, 연결단계에서는 구체적이고 친숙한 문제 상황을 통해서 비형식적 지식을 기호나 절차로 표현할 수 있도록 도와준다. 셋째, 형식화단계에서는 추상적인 기호를 사용하여 문제 상황을 수식으로 형식화할 수 있는 기회를 제공한다.

이 지도 방법에 따르면 자연수의 나눗셈에서 비형식적 지식과 형식적 지식의 연결단계에서는 포함제에서는 학생이 사용하는 묶어 세기나 곱셈전략을 등분제에서는 어림-조절이나 곱셈 전략을 기호나 절차로 표현하여 형식적 알고리즘과 연결하는 것이다. 따라서 자연수 나눗셈에서 아동의 비형식적 지식을 형식화하기 위해서는 먼저 비형식적 지식을 사용할 수 있는 문제 상황을 제시해야 하고, 그 문제를 해결하는 과정에서 적절한 시점에서 기호적 표상의 도입과 형식적 지식으로의 연결을 해주어야 한다.

이런 맥락에서 비형식적 지식의 특징과 교과서에서 나타난 형식적 나눗셈 지도의 문제점에 대한 분석을 바탕으로 비형식적 전략을 형식적 학교 교육과 연결하기 위한 방안을 제시하기 위해 다음과 같은 지도 원리를 제시할 수 있다.

첫째, 나눗셈의 두 가지 상황, 즉 등분제와 포함제를 각 문제 상황에 맞게 설정하여 나눗셈 활동을 한다.

둘째, 각 상황에 맞게 설정한 상황을 알고리즘과 일치하도록 상황을 연결한다.

셋째, 등분제와 포함제의 상황을 해결하면서 다양한 비형식적 전략이 이루어질 수 있는 활동을 제시한다.

넷째, 비형식적 전략과 형식적 전략을 연결하는 고리로 곱셈 전략을 제시한다. 이때 곱셈 전략은 비형식적 전략을 포함시킨다.

다섯째, 구체물과 그림 그리고 기호의 표현 양식을 나타낼 수 있는 활동을 포함한다.

이와 같은 지도 원리에 따라 구체적인 활동을 다음과 같이 제시할 수 있다.

1. 포함제 나눗셈의 지도

가. 26÷2의 지도

① 학습 목표

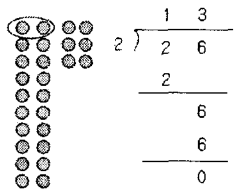
· 포함제 상황에서 (두 자리 수) ÷ (한 자리 수)의 몫을 묶어 세기 활동으로 구할 수 있다.

· 포함제 상황에서 (두 자리 수) ÷ (한 자리 수)의 계산 원리를 알고, 계산할 수 있다.

② 문제 상황: 사과 26개를 한 봉지에 2개씩 담으려고 합니다. 모두 몇 봉지가 되는지 알아보시오.

<u>활동1</u> 묶어 세기 전략으로 26÷2의 몫 구하기

교사: 바둑돌 26개를 그림과 같이 놓았습니다. 바둑돌 20개를 2개씩 묶으면 몇 묶음이 됩니까?



아동: 10묶음이 됩니다.

교사: 남아있는 6개를 2개씩 묶으면 몇 묶음이 됩니까?

아동: 3묶음입니다.

교사: 모두 몇 묶음이 만들어집니까?

아동: 13묶음이 됩니다.

이 활동에서는 제수 '2'가 포함제 나눗셈에서 한 번에 거래되는 집합에 속한 수의 역할을 하고 있다. 26개 모두를 2개씩 묶음을 만들어 13묶음이 나오는 것이 아니라 먼저 10의 자리의 수 20을 2씩 묶어 10묶음이 되고 다시 일의 자리 수 2를 2씩 묶어 3묶음이 된다는 것을 확인하게 된다. 즉 묶음의 수를 10묶음 단위와 1묶음 단위로 따로 구하게 되어 몫의 자리에서 10묶음 1개와 1묶음 3개를 인식하게 된다.

이어서 활동1에서 경험한 묶어 세기 전략을 세로 나눗셈 알고리즘과 연결시키는 활동을 제시할 수 있다.

<u>활동2</u> 묶어 세기 전략으로 26÷2의 계산 원리 알기 (앞의 그림 오른쪽 참조)

교사: 세로 나눗셈으로 풀어 봅시다. 20을 2씩 묶으면 몇 묶음이 됩니까?

아동: 10묶음이 됩니다.

교사: (몫의 십의 자리에 1을 적는다.) 바둑돌을 몇 개 사용하였습니까?

아동: 20개 사용하였습니다.

교사: (셋째줄에 20을 나타내는 2를 적는다.) 바둑돌이 몇 개 남았습니까?

아동: 6개

교사: (넷째 줄에 6을 적는다.) 6을 2씩 묶으면 몇 묶음이 됩니까?

아동: 3묶음

교사: (몫의 일의 자리에 3을 적는다.) 바둑돌을 몇 개 사용하였습니까?

아동: 6개

교사: (다섯째 줄에 6을 적는다.) 바둑돌이 몇 개 남았습니까?

아동: 남지 않았습니다.

교사: (여섯째 줄에 0을 적는다.)

이 활동은 세로 나눗셈 알고리즘과 포함제 나눗셈 활동이 일치하는데 중점을 두었다. 기존의 방법과 다른 것은 포함제 나눗셈에서 몫의 자리에 적는 수가 각 자리수에 해당하는 묶음의 수와 같게 하였다는 것이다. 그리고 포함제의 상황을 적용하여 반복적으로 제거되는 수를 사용하여 제거된 수를 원래 수에서 빼는 활동과 연산을 병행하였다는 것이다.

묶어 세기 전략에 따라 포함제 나눗셈을 해결하는 것은 실제로 20 이상의 수에 적용하기에는 무리가 따른다. 이때부터는 묶어 세기에서 곱셈 전략으로 바꾸어 포함제 나눗셈을 지도하는 것이 좋겠다.

나. 74÷3의 지도

①학습 목표

· 포함제 상황에서 (두 자리 수) ÷ (한 자리 수)의 몫을 곱셈 전략으로 구할 수 있다.

· 포함제 상황에서 (두 자리 수) ÷ (한 자리 수)의 계산 원리를 알고, 계산할 수 있다.

②문제 상황: 연필이 74자루 있습니다. 한 사람에게 3자루씩 나누어 주면 몇 사람에게 줄 수 있고, 몇 자루가 남는지 알아보시오.

<u>활동1</u> 곱셈 전략으로 74÷3의 몫 구하기

교사: 74를 3씩 묶으면 몇 묶음이 되는지 구하려고 합니다. 먼저 70을 3씩 묶으면 30 묶음을 만들 수 있습니까?

$$
\begin{array}{r|rr}
 & 2 & 4 \\ \hline
3 & 7 & 4 \\
 & 6 & \\ \hline
 & 1 & 4 \\
 & 1 & 2 \\ \hline
 & & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
3\times30=90 \\
3\times20=60 \\
3\times10=30
\end{array}
$$

아동: 아니요. 3개씩 30묶음이면 3 곱하기 30하면 90개가 되어 바둑돌이 모자랍니다.

교사: 3개씩 20묶음을 만들 수 있습니까?

아동: 예. 3곱하기 20은 60입니다.

교사: (몫의 십의 자리에 2를 적는다.) 묶음에 모두 몇 개를 사용하였습니까?

아동: 60개

교사: (셋째 줄에 6을 적는다.) 몇 개가 남았습니까?

아동: 14개

교사: (넷째 줄에 14를 적는다.) 3씩 묶음을 만들면 몇 묶음이 만들어집니까?

아동: 3곱하기 4는 12이기 때문에 4묶음

교사: (몫의 일의 자리에 4를 적는다.) 묶음에 모두 몇 개를 사용하였습니까?

아동: 12개

교사: (다섯째 줄에 12를 적는다.) 몇 개가 남았습니까?

아동: 2개

교사: (여섯째 줄에 2를 적는다.)

이 질문에서는 '몇 번 들어가는가?'라는 질문 대신에 제수 3으로 몇 묶음을 만들 수 있는가를 질문하여 제수와 몫의 곱을 알아보는 발문을 하였다. 이 활동은 아동들이 이미 알고 있는 곱셈 구구를 이용하였다. 곱셈 구구를 통해 아동은 3개씩 20묶음이 될 때 몫의 십의 자리에 2를 적고 나머지를 3씩 묶어 4묶음이 될 때 몫의 일의 자리에 4를 적음으로써 몫이 묶음의 수를 나타내고 제수 3은 묶음에 속한 수를 나타내고 있음을 경험하면서 알고리즘에서 기호와 연결시키고 있다. 그리고 앞의 그림 오른쪽 부분에 나타난 바와 같이 곱셈을 제수×몇 십으로 나타내는 활동을 경험하였기 때문에 제수를 몇 십씩 어림하는 활동을 하게 되고 검산에서도 제수×몫으로 표현할 수 있게 된다. 곱셈 전략에서는 포함제에서도 어

림-조절의 전략이 나타날 수 있음을 알 수 있다.

2. 등분제 나눗셈의 지도

가. 74÷3의 지도

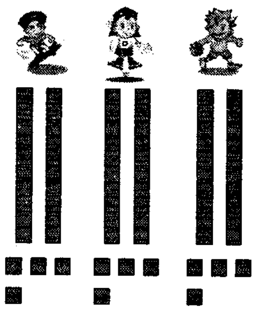
① 학습 목표

· 등분제 상황에서 (두 자리 수) ÷ (한 자리 수)의 몫을 어림-조절의 전략으로 구할 수 있다.

· 등분제 상황에서 (두 자리 수) ÷ (한 자리 수)의 계산 원리를 알고, 계산할 수 있다.

② 문제 상황: 색종이 74장을 세 사람에게 나누어 주려고 합니다. 한 사람에게 몇 장씩 나누어 줄 수 있는지 알아보시오.

<u>활동1</u> 어림-조절 전략으로 74÷3의 몫 구하기



교사: 십 모형 7개와 낱개 모형 3개를 놓아봅시다. 십 모형 7개를 3명에게 몇 개씩 나누어 주면 됩니까?

아동: 2개씩

교사: 십 모형은 모두 몇 개를 사용하였습니까?

아동: 6개

교사: 십 모형은 몇 개가 남았습니까?

아동: 1개

교사: 이것을 세 명에게 나누어 주려면 어떻게 하면 됩니까?

아동: 십 모형을 낱개 모형 10개로 바꿉니다.

교사: 낱개 모형은 몇 개가 됩니까?

아동: 14개

교사: 세 명에게 낱개 모형 몇 개씩 나누어 주면 됩니까?

아동: 3개씩

교사: 모두 나누어 주었습니까?

아동: 4개가 남았습니다.

교사: 이번에는 몇 개씩 나누어 주면 됩니까?

아동: 1개씩

교사: 한 사람이 몇 개의 낱개를 가집니까?

아동: 4개

교사: 낱개 모형을 모두 몇 개 사용하였습니까?

아동: 12개

교사: 몇 개의 낱개 모형이 남았습니까?

아동: 2개

교사: 한 사람이 얼마씩 가집니까?

아동: 24

이 활동에서 보면 74÷3을 해결하면서 전체의 수 74를 74개의 일로 만들지 않고 7개의 십과 4개의 일로 만들어 등분제를 해결하고 있다. 이렇게 함으로써 십진기수법 체계에서의 74÷3을 효과적으로 접근시킬 수 있다. 십 모형을 2개씩 세 사람에게 나누어 주고 남은 십 모형 한 개를 다시 낱개 모형으로 바꾸는 과정을 통해 자연수 범위에서 나누어 줄 수 없을 때까지 등분하는 활동을 경험하게 된다. 같은 내용을 곱셈 전략으로 해결하는 과정은 다음과 같다.

<u>활동2</u> 곱셈 전략으로 74÷3의 몫 구하기

$$\begin{array}{r} 2\ 4 \\ 3\,\overline{)\,7\ 4} \\ \underline{6} \\ 1\ 4 \\ \underline{1\ 2} \\ 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 20\times3=60 \\ 4\times3=12 \end{array}$$

교사: 십 모형 7개와 낱개 모형 3개를 놓아봅시다. 십 모형 7개를 3명에게 똑같이 나누어 주려고 합니다. 몇 개씩 나누어 주면 됩니까?

아동: 십 모형 2개씩을 3명에게 나누어 줍니다.

교사: (몫의 십의 자리에 2를 적는다.) 이것을 곱셈으로 나타내면?

아동: 20 곱하기 3

교사: 3명에게 모두 몇 십을 나누어 주었습니까?

아동: 20 곱하기 3은 60

교사: (셋째 줄에 6을 적는다.) 십 모형은 몇 개가 남았습니까?

아동: 1개

교사: 세 명에게 나누어 주려면 어떻게 하면 됩니까?

아동: 십 모형을 낱개 모형 10개로 바꿉니다.
교사: 낱개 모형은 몇 개가 됩니까?
아동: 14개
교사: (넷째 줄에 14를 적는다.) 세 명에게 낱개 모형을 몇 개씩 나누어 주면 됩니까?
아동: 4개
교사: 왜 그렇게 생각합니까?
아동: 4 곱하기 3은 12
교사: (몫의 일의 자리에 3을 적는다.) 모두 몇 개의 일을 나누어 주었습니까?
아동: 12개
교사: (다섯째 줄에 12를 적는다.) 몇 개가 남았습니까?
아동: 2개
교사: 한 사람이 몇 개씩 가집니까?
아동: 24개

등분제에서 제수는 반복되는 집합의 수를 나타내고 몫이 집합에 속한 사물의 수를 나타내기 때문에 24×3+2=74로 검산을 하게 된다.

나. 341÷25의 지도

① 학습 목표

· 등분제 상황에서 (세 자리 수) ÷ (두 자리 수)의 몫을 곱셈 전략으로 구할 수 있다.

· 등분제 상황에서 (세 자리 수) ÷ (두 자리 수)의 계산 원리를 알고, 계산할 수 있다.

② 문제 상황: 민지는 친구들과 함께 농촌 일손 돕기를 하고 고구마 341개를 선물로 받았습니다. 이 고구마를 25명이 나누어 가지려면 한 사람이 몇 개씩 가져야 하는지 알아보시오

<u>활동1</u> 곱셈 전략으로 341÷25의 몫 구하기

교사: 백 모형 3개와 십 모형 4개 낱개 모형 1개를 25명에게 나누어 주려고 합니다. 백 모형 3개를 25명에게 나누어 줄 수 있습니까?
아동: 아니오.
교사: 어떻게 하면 됩니까?
아동: 백 모형을 십 모형으로 바꾸면 됩니다.
교사: 백 모형 3개를 십 모형으로 바꾸면 십 모형은 모두 몇 개가 됩니까?
아동: 34개가 됩니다.
교사: 25명에게 몇 개씩 나누어 줄 수 있습니까?
아동: 1개씩

$$\begin{array}{r} 13 \\ 25\,\overline{)\,341} \\ \underline{25} \\ 91 \\ \underline{75} \\ 16 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 4\times25=100 \\ 3\times25=75 \end{array}$$

교사: (몫의 십의 자리에 1을 적는다.) 십 모형을 1개씩 25명에게 나누어 주었습니다. 모두 몇 개의 십 모형을 사용하였습니까? 곱셈으로 구해봅시다.
아동: 1개씩 25명이니까 1×25는 25
교사: 십 모형은 몇 개가 남았습니까?
아동: 9개
교사: (넷째 줄에 9를 적는다.) 십 모형 9개를 25명에게 나누어 줄 수 있나요?
아동: 아니오.
교사: 어떻게 하면 됩니까?
아동: 십 모형 9개를 낱개 모형으로 만들면 됩니다.
교사: 낱개 모형은 몇 개가 됩니까?
아동: 91개가 됩니다.
교사: 낱개 모형 91개를 25명에게 나누어 주려면 몇 개씩 나누어 주면 됩니까?
아동: 4개?
교사: 4개씩 나누어 주면 모두 몇 개를 나누어 주게 됩니까? 곱셈으로 구해봅시다.
아동: 4곱하기 25는 100
교사: 4개씩 나누어 줄 수 있습니까?
아동: 모자랍니다.
교사: 이번에는 몇 개씩 나누어 주겠습니까?
아동: 3개씩
교사: 3개씩 나누어 주면 모두 몇 개를 나누어 주게 됩니까? 곱셈으로 구해봅시다.
아동: 3개씩 25명이면 3곱하기 25는 75
교사: (몫의 일의 자리에 3을 적는다.) 모두 몇 개의 낱개 모형을 사용하여 나누어 주었습니까?
아동: 75개

교사: (다섯째 줄에 75를 적는다.) 남아있는 낱개 모형은 몇 개입니까?
아동: 16개입니다.

이 활동에서 사용하는 주요한 비형식적 지식은 곱셈 전략이다. 그렇기 때문에 등분을 하면서 '몇 개씩 몇 명에게' 나누어 주는 과정을 '몇 개×몇 명'으로 표현하는 것이 중요하다. 이것은 '몫×제수'가 되어 포함제에서 표현하는 '제수×몫'과는 순서가 다른 식이 된다.

Ⅵ. 나오는 글

지금까지 나눗셈을 해결하는 아동의 비형식적 지식과 학교에서 이루어지는 형식적 나눗셈 교육을 연결시키는 방안에 대해 살펴본 결과 다음과 같은 점을 논의할 수 있다.

첫째, 아동들이 포함제를 해결하면서 사용하는 전략은 그대로 등분제에서 나타난다. 어림-조절의 전략에서 거래가 이루어질 때 아동들은 포함제를 해결하면서 사용한 방법, 즉 집합에 속한 사물의 수로 한 묶음을 만든 방법으로 매 회마다 각각의 사람에게 어림한 빵의 수만큼 나누어 주었다. 이를 통해 보면 적어도 포함제는 등분제를 해결하는 데에 많은 영향을 주는 것 같다. 그리고 등분제를 경험할 때 사용하는 거래 전략은 예상과는 달리 한번에 한 개씩 거래하는 전략이 아니라 한 번에 여러 개를 거래하는 어림-조절의 전략이라는 것이다. 이것은 포함제에서 거래를 경험할 때 한 개씩 묶음으로 묶는 경우가 거의 없다는 것을 생각하면 자연스러운 결과로 볼 수 있다.

한편, 반대의 경우도 나타나는데 등분제에서 사용한 어림-조절의 전략이 포함제를 해결하는 곱셈 전략을 사용할 때이다. 포함제의 세로 나눗셈 알고리즘을 해결하면서 필연적으로 몫을 어림하는 과정이 요구되는데 이 과정에서 몫을 어림하여 결과와 부합하는지를 조절하게 된다. 이런 어림-조절의 과정은 비록 곱하는 두 수의 미지의 결과를 어림하는 것이지만 그 과정은 등분제 나눗셈에서 기지의 전체의 수와 집합의 수에서 미지의 집합에 속한 수를 어림하여 조절하는 과정과 동일함을 알 수 있다. 이것은 Mulligan(1992)이나 Murray et al.(1992)이 등분제를 해결하면서 측정 구성 모델을 더 선호한다는 것과 차이가 있으며 Neuman(1999)이 주장하는 바와 같은 등분제에서 나타나는 포함제의 상황과는 다소 차이가 있다.

둘째, 아동들이 사용하는 전략은 표현 양식에 따라 달라질 수 있다는 것이다. 포함제를 경험할 때 아동들은 표현 양식에 따른 해결 전략에 차이를 나타내지 않았다. 그러나 등분제를 해결하면서 아동들은 자신의 전략을 구체물을 사용할 때와 그림으로 그릴 때 전략의 차이를 나타내었다. 한 종류의 구체물인 수 모형이나 두 종류의 구체물인 검은 바둑돌과 흰 바둑돌을 사용했을 때 아동들은 묶음-조절의 전략을 사용하였지만 그림을 그렸을 때 어림-조절의 전략을 주로 사용하였다. 이것은 구체물의 종류와는 관계없이 구체물을 사용할 때 아동들은 한 가지 변수로 나눗셈을 인식하는 경향이 있으며 그림으로 해결할 때 두 가지 변수로 등분제를 인식할 수 있음을 의미한다. 이런 결과를 보면 교과서에서 등분제를 제시하면서 칸을 나누어 제수를 이미 표현했을 때 아동들은 어림-조절의 전략을 사용할 가능성이 높다는 것을 알 수 있다.

셋째, 전통적으로 세로 나눗셈 알고리즘에는 "몇 번 들어가는가?"라는 질문을 사용하면서 포함제로 해결한다. 그러나 세로 나눗셈 알고리즘은 등분제의 상황으로도 충분히 형식적 나눗셈 교육과 연결시킬 수 있다. 등분제에서 아동들은 상황과 계산 원리 사이에 별다른 충돌을 경험하지 않는다. 수 모형을 통해 어림-조절의 전략을 사용하면서 몇 개의 백을 등분할 때 한 사람이 가지는 백이 몇 개인가를 시각적으로 확인하여 기호로 백의 자리에 몫으로서의 백을 표현할 수 있었다. 즉 자신의 경험적 활동과 기호가 서로 일치하는 것을 경험할 수 있었다. 또한 나누어줄 수 없는 백을 10개의 십으로 바꾸는 활동을 통해 십진기수법 체계로서 10개씩 묶은 활동을 거꾸로 10개씩 풀어놓는 가역적인 활동을 경험하였다. 이런 가역적인 활동을 통해 나눗셈에 포함된 곱셈과 뺄셈의 연산을 충분히 경험할 수 있다.

(세 자리 수)÷(두 자리 수) 나눗셈은 4학년 아동에게 쉽지 않은 연산임에는 틀림없다. 곱셈, 나눗셈, 뺄셈의 연산을 동시에 수행해야 하기 때문이다. 그러나 아동들이 자연스럽게 나타낸 나눗셈에 대한 비형식적 지식과

형식적 나눗셈을 연결하여 학습한다면 이런 어려움을 덜어줄 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

고상숙 · 고호경 · 박만구 · 이중권 · 정인철 · 황우형 역 (2004). 수학교육론. 서울: 경문사. [영어 원본 English, L. D. & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education: Models and processes*. NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.]

교육인적자원부 (2002a). 수학 3-가. 서울: 대한교과서주식회사.

교육인적자원부 (2002b). 수학 3-나. 서울: 대한교과서주식회사.

교육인적자원부 (2002c). 수학 4-가. 서울: 대한교과서주식회사.

박현미 (2006). 자연수의 나눗셈에 관한 초등학교 학생의 비형식적 지식. 서울교육대학교 석사학위논문.

백선수 (2005). 분수의 곱셈에서 비형식적 지식의 형식화 사례 연구. 학교수학, **7(2)**, 139-168.

Baratta, L. M. (1976). *Mathematics their way*. Menlo Park. CA: Addison Wesley.

Brekke, G. (1991). *Multiplicative structures at ages seven to eleven. Studies of children's conceptual development, and diagnostic teaching experiments*, University of Nottingham, Nottingham.

Brown, S. (1992). Second-grade children's understanding of the division process. *School Science and Mathematics*, **92(2)**, pp.92-95.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Merino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, **16**, pp.3-17.

Mulligan, J. T. (1992). Children's solutions to multiplication and division word problems: A longitudinal study. *Mathematics Education Research Journal*, **4**, pp.24-42.

Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1992). Young children's division strategies. In F. Furinghett(Ed.), *Proceedings Fifteenth PME Conference* (pp. 152-159). Assisi.

Neuman, D. (1999). Early learning and awareness of division: A phenomenographic approach. *Educational Studies in Mathematics*, **40**, pp.101-128.

Resnik, L. B. (1983). A developmental theory of number understanding. In H. Ginsburg(Ed.), *The development of mathematical thinking*. New York: Academic press.

Silver, E. A. (1987). Using conceptual and procedural knowledge: A focus on relationships. In J. Hiebert(Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 181-198). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau(Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr(Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-162). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

The Connection between Informal Knowledge and Formal Knowledge on Division

Lee, Jong Euk
Gaepo Elementary School, Busan, Korea
E-mail: jongeuk@chol.com

Interviews with 24 pupils in grade 1-2 were used to investigate awareness of the relation between situation and computation in simple quotitive and partitive division problems as informally experienced. Then it was suggested how to connect children's informal knowledge and formal knowledge of division. Most subjects counted cubes or made drawing, and related these methods to the situation described in the problems. In result, quotitive division was experienced as a dealing situation, where the number of items represented by the divisor was repeatedly taken from the whole number. And estimate-adjust was the most frequently displayed way of experiencing partitive division. Therefore, partitive division with its two measurement variables can be related to a measurement model. And children should be taught column algorithms for division with estimated-adjust which pupils used for partitive division problems.

* ZDM Classification : U22
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20
* Key Words: division, informal knowledge, formal knowledge