

선형대수학 교육에 적용되는 양방향 콘텐츠 기반의 MathML과 JAVA도구에 관한 연구

김 덕 선 (성균관대학교 대학원)

이 상 구 (성균관대학교)[†]

정 경 훈 (성균관대학교 대학원)

설 한 국 (대진대학교)

I. 서론

수학에서 20세기는 많은 미해결 난제들이 해결되고 새로운 흥미있는 문제들이 다양하게 제기된 시기이다. 그리고 이러한 과정에 컴퓨터의 기여는 점점 커지고 있다.

20세기의 후반은 컴퓨터의 탄생과 발전으로 기록된다. 처음 컴퓨터의 탄생과정부터 수학자들은 깊숙이 관여하였다. 수학은 컴퓨터 프로그램, 시스템을 구성하는 논리적인 방법 또 그 시스템을 테스트하기 위한 난이도가 높은 계산문제를 지원해주는 방법을 통하여 컴퓨터 이용의 필수적인 분야로 자리매김하였다. 그러나 곧 컴퓨터 분야는 자신들의 문제해결방법을 찾아내었고, 이를 통하여 수학과 관련되지 않은 분야로도 그 분야를 확장해 갔다.

수학의 영향을 받으며 발전한 컴퓨터과학 분야의 이러한 발전은 다시 수학 분야에 크게 세 가지 변화를 이끌어내었다. 첫 번째는 수학교육과 연구에서 다양하게 제기되는 가설을 미리 컴퓨터를 통해 실험할 수 있게 하였다. 이를 통하여 많은 수학자가 직접 컴퓨터를 통해 모의실험(Simulation)을 수행해 보고, 가설을 수정하면서 더 나은 결론을 추론하는데 결정적인 기여를 하게 된 것

이다. 컴퓨터는 이러한 과정을 빠른 시간에 해결해 줌으로서, 수학 전체의 교육 및 연구방법에 큰 변화를 유도하였다.

두 번째 변화로는 수학교육과 연구과정에서 결과에 대한 과학적 가시화(Visualization)를 컴퓨터가 지원해 준 것을 들 수 있다. 수학적 결과를 수치적 정보를 이용한 모의실험을 통하여 가시적으로 보여줌으로서, 복잡한 수학적 모델에 대한 이해를 돕고 깊이 분석할 수 있는 기회를 열어주었다. 하나의 예를 들면 프랙탈(Fractal)같은 분야로서, 컴퓨터가 제공하는 화려한 화면을 통하여 새로운 분야에 도전할 수 있는 방법과 더 어려운 문제에 도전할 수 있는 역량을 얻게 되었다.

세 번째 변화는 바로 컴퓨터대수시스템(CAS ; computer algebra system)의 개발이다. 이 시스템을 통하여 우리는 컴퓨터를 통해서 각종 다항식이나 초월함수, 지수함수들을 계산하고, 인수분해를 한다던가, 미분, 적분, 급수전개, 행렬계산 등 다양한 계산을 할 수 있게 되었다. 이는 컴퓨터가 단순한 계산용 도구에 머무르지 않고, 이를 통하여 더 많은 수학적 문제를 해결하게 되었음을 의미하고, 더 나아가 컴퓨터대수시스템이 초·중·등교육에서는 물론 대학교육에 다양하게 활용될 수 있는 계기가 되었다. 컴퓨터대수시스템이 더욱 폭넓게 쓰이게 되면서, 학생들은 지필만으로 도전하던 고전적인 수학적 문제해결에서 벗어나게 되었다. 이런 교육환경이 보편화 되면서 21세기 수학자들은 학생들에게 무엇을 어떻게 가르쳐야 하는가에 대하여 다시 생각해야 하는 상황에 이르렀다(Berlinghoff 외, 2004).

컴퓨터의 발전에 이어 인터넷이 대중화되면서 JAVA 도구 등 서비스 제공자와 수혜자간의 정보교류에 양방향

* 2007년 9월 투고, 2008년 1월 심사 완료.

* ZDM분류 : D30, B40, H60

* MSC2000분류 : 15-04, 15A06, 97B40, 97U60, 97U70,

* 주제어 : 콘텐츠, 자바, 매쓰엠엘(MathML), 선형대수학, 컴퓨터대수시스템, 종합행렬계산기

[†] 교신 저자

또 과학적 가시화에 유용한 도구들이 대거 등장했다. 이를 이용하여 우리의 강의실에서는 이미 기존에 개발된 자료를 효과적으로 이용하여 오프라인(Off-line) 환경인 강의실에서 학습을 하면서 필요하면 즉시 온라인(On-line) 환경을 이용하여 최신의 정보와 참고자료에 접속하여 수업 중에 바로 보여주는 것이 가능해졌다. 자바와 플래쉬를 이용하여서 복잡한 수학적 개념을 직관적으로 이해하고, 실지로 복잡도가 높은 계산을 무료의 도구를 이용하여 계산하고, 그 결과를 바로 눈으로 확인하며, 이를 통하여 직관적인 이해와 상상력을 자극하여, 미지의 사실을 예측하도록 하는 과정을 경험하도록 할 수 있다. 더구나 그 경험을 반복하여 숙지하는 것이 가능하도록 하고 이해한 내용을 스스로 설명하도록 하는 것도 가능하다. 우리는 이 과정을 직접 선형대수학 강좌에 적용하여 실제로 구현하고자 하였다. 본 연구의 의미는 실제로 그러한 다양한 도구를 직접 개발하여 교육 현장에 적용한 것이다.

이러한 문제를 해결하는 과정에는 수학적 표현을 정확하고 효과적으로 학생들이나 정보를 원하는 사용자에게 전달해야 하는 문제점이 남아 있다. 다른 문서들에 비하여 수학적 표현이 들어있는 문서는 컴퓨터를 통해서 표현하거나, 편집하는 과정이 매우 까다로운 편이다. 더구나, 수학적 표현의 대부분은 매우 엄격하여 컴퓨터에 적용하는데 큰 장애로 작용하여 왔다. 그러나 컴퓨터 사용자 환경의 발전과 전자통신수단의 발전은 우리에게 정보가 한 컴퓨터에서 다른 컴퓨터로, 프로그램과 프로그램 사이에 자연스럽게 이동되며 사용되는 것을 당연한 것으로 받아들여지게 되었다.

이러한 추세는 컴퓨터 환경 전체에 반영되며 사용자들은 단순히 더블클릭을 하는 것만으로 사진을 열어서 편집하고, 계산결과를 확인한다던가, 워드 프로세서 프로그램에 그 내용을 끼워 넣는 작업을 자연스럽게 하게 되었다. 수학적 표현에 대하여도 이러한 기대는 동일하게 적용되었다.

그러나 아직은 더블클릭과 같은 간단한 조작으로 수식을 열어서 편집하는 것은 물론 이를 워드 프로세서 프로그램에서 컴퓨터대수시스템의 명령을 주기 전 단계로 옮겨 넣는 작업조차 할 수가 없다.

문서를 생성하는 시스템, 온라인 테스트 시스템, 수학

적 콘텐츠를 제공하는 시스템에서는 수식을 간단히 또 효과적으로 표현하고, 조작할 수 있는 환경이 필요하기 때문에 많은 전문가가 오랫동안 이 문제에 대하여 연구를 해온 것이 사실이다. 그러나 그 발전 과정은 다양한 장애물을 넘어야 하였다. 그리고 이런 난점은 수학적 표현을 포함하는 모든 시스템의 공통적인 장애물로 부각되었으며, 이러한 수식지원에 대한 체계를 표준화하여 공동으로 이 문제를 해결하고자 하는 노력이 21세기 들어서 진지하게 이루어져 왔다. 이 과정을 통하여 소개된 표준화된 수학적 표현체계를 Mathematical Markup Language라 하고 줄여서 MathML이라 부른다(W3C, 2006).

기존의 웹 콘텐츠에 추가되는 내용은 플래시와 JAVA 도구이며, 이것이 수학에서 효과적으로 표현되기 위하여 MathML등과 같이 웹상에서 수식표현을 지원하는 새로운 체계의 적용이 필요하다. 본 연구에서는 최신 기술인 MathML을 이용하여 분수표현이 가능한 JAVA 행렬계산기 개발의 주요 기술과 그 개발 과정을 공유하고, 연구자가 개발한 행렬계산기를 선형대수학 수업에 적용한 긍정적인 효과를 추가한다.

II. 웹상에서의 MathML의 구현

2.1 웹상에서의 수식구현

MathML은 XML을 기반으로 만들어진 수식표현을 위한 도구이다. XML(eXtensible Markup Language)은 WWW(World Wide Web)상에서 정보를 사용자가 자신의 뜻대로 구조화된 데이터베이스를 다루는 것처럼 데이터를 조작하여 전송하기 위한 새로운 언어이다(W3C, 2006). XML은 사용자가 데이터의 구조는 물론 해당 데이터를 자유자재로 수정할 수 있기 때문에 HTML에 비하여 다양한 쓰임새를 가지고 있다. 따라서 이러한 데이터 구조를 특수한 분야에 적용할 수 있다. 이를 수학에 적용한 것이 MathML이다. 이러한 MathML 표준을 통하여 수학자들은 인터넷 상에서 수식을 폭넓게 도입하여 쓸 수 있는 방법을 얻었고, 이를 통하여 수학적 내용도 일반적인 내용과 마찬가지로 정확하게 또 효과적으로 전달할 수 있는 효율적인 방안을 얻게 되었다(Miner,

2005).

이러한 MathML의 이용은 구현이 다각적으로 시도되어 왔다. 사용자들이 친숙하게 MathML을 생성할 수 있는 방안(박정희 외, 2003)과 이를 교과과정에 활용할 수 있는 방안(이수현 외, 2004)들이 시도되었고, MathML은 인터넷 상에서 수식을 표현하는 가장 이상적인 방법으로 자리매김하게 되었다.

이렇게 유용한 MathML이지만, 아직까지 그 수식을 직접 웹 브라우저인 인터넷 익스플로러나 파이어폭스(Firefox)등에 직접 표현하기에는 기술력이 부족한 편이다.)¹⁾ 이 때문에 MathML을 이용한 각종 표현용 도구들(Render; 수식표현용 클라이언트 프로그램)이 표준화가 되지 않은 관계로 다양한 회사에서 자신만의 기준을 이용하여 만들어져서 대중화는 되지 못한 상황이다. 또한 Render들은 앞으로의 기술변화에 능동적이지 못하다는 단점을 가지고 있다. 현재 진행 중인 마이크로소프트사의 Windows 운영체제의 발전방향을 살펴보면 차세대 개인용 컴퓨터의 운영체제인 Windows Vista부터는 액티브엑스(ActiveX)의 도입이 현저하게 줄어들 것으로 전망하고 있다(Microsoft, 2007). 이에 따라, 이러한 MathML Render 프로그램은 한동안 그 변화를 거친 후에 안정화를 이룰 것으로 전망된다. 이제 외국 사례를 포함한 선행연구를 마치고 본 연구로 들어간다.

2.2 MathML과 TeX Render 프로그램

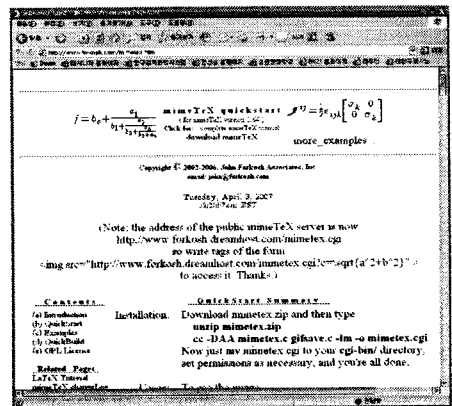
MathML의 장점은 수식의 편리한 입력체계이다. 수식을 만드는 명령을 모르더라도, MathML을 구현하는 프로그램이 이를 간단하게 처리해준다. 이는 수식을 모르는 일반인들도 수식을 자유롭게 쓸 수 있게 해 주지만 앞으로의 변화추세에 따라 MathML의 표준이 바뀔 것으로 예상되어 어떤 Render 프로그램을 적용하느냐는 신중해야 한다.

물론 수식의 표현을 MathML만이 구현한 것은 아니다. 이미 TeX이나 혼글²⁾, MS-Word, Matlab, Maple,

1) Mozilla를 기반으로 한 일부 웹 브라우저(Firefox, Netscape 등)는 MathML을 지원하긴 하지만 그 자체로 지원하는 것이 아니라 인터넷 익스플로러처럼 별도의 프로그램을 이용해야 한다 (W3C, 2007).

2) 특히 혼글의 수식기능은 현재 (주)한글과컴퓨터 SW개발연

Mathematica등 여러 방향에서 이 문제를 해결하기 위해 노력해 왔으며, 이들은 각각의 분야에서 강력한 수식표현방법을 개발해 왔다. 더구나 TeX은 이미지를 통하여 HTML로 그 표현을 구현할 수 있는 기능을 가지고 있는데, 이는 현재 가장 깔끔하고 정확한 수식표현기법을 지원하고 있다. 인터넷 환경에서는 LaTeX2HTML등과 같은 프로그램을 이용하여 이미지를 기반으로 깔끔한 수식표현체계를 가지고 있으나, 문제는 수식을 TeX을 바탕으로 구현하기 때문에 사용자가 TeX의 까다로운 문법을 따로 공부하여 수식을 표현하기가 쉽지 않다. 그러나 그 수식의 표현을 가장 올바르게, 깔끔하게 표현할 수 있다는 점에서 TeX의 장점을 활용할 필요가 있다. 따라서 이러한 TeX의 장점과, 이를 웹상에서 표현하는 방안을 생각해 볼 필요가 있으며 이러한 시도는 여러 방법으로 시도되고 있다. 대표적으로는 MimeTeX을 생각해 볼 수 있다.

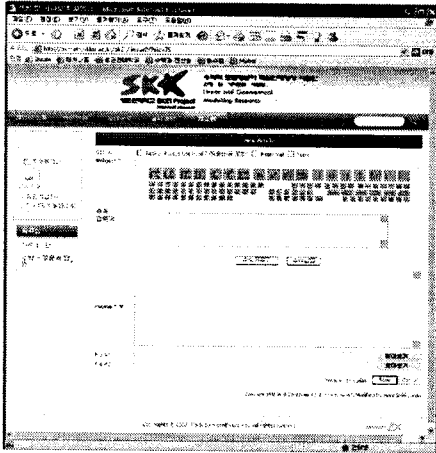


<그림 1> MimeTeX Program Homepage¹⁾

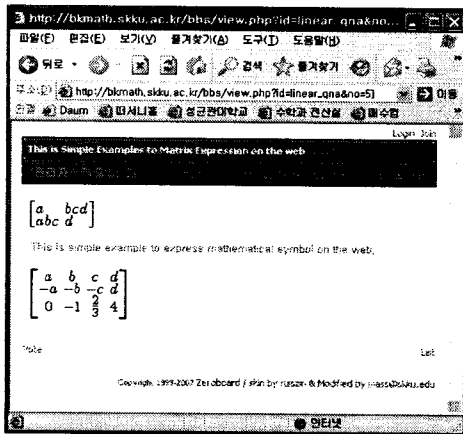
이러한 MimeTeX을 이용하면 웹상에서 다양한 수식을 사용자가 편리하게 입력할 수 있도록 그 시스템을 구성할 수 있다. 이러한 프로그램을 이용하면 복잡한 수식에 대해서도 손쉽게 웹상에서 표현할 수 있는 방안을 마련하게 해 준다. 웹상에서 동작하는 멀티미디어 콘텐츠를 제작하는데 응용하거나, 아래의 그림과 같이 게시판에 그 방법을 응용할 경우 사용자가 수식을 이용하여 자

구조장(CTO)인 성균관대학교 수학과 졸업생에 의하여 처음부터 TeX 명령어를 이용하여 개발되었다.

유롭게 수학내용을 문의하거나, 그에 대한 답변을 하는데도 손쉽게 응용할 수 있어서, 수학과 관련한 각종 정보를 교환할 때 효과적으로 이용할 수 있다. 이는 현재의 인터넷 환경에서 교육적 효과를 극대화 하는데 이용된다(이상구 외, 2005). 그리고 수학에서 성공한 기술은 컴퓨터공학을 포함한 모든 공학과 자연과학의 강좌에 바로 적용될 수 있다.



<그림 2> MimeType 시스템을 이용한 수식입력기3)



<그림 3> 웹상에서 수식을 입력한 결과4)

3) <http://bkmath.skku.ac.kr/bk21/linear2/?sid=75>
 4) http://bkmath.skku.ac.kr/bbs/view.php?id=linear_qna&no=5

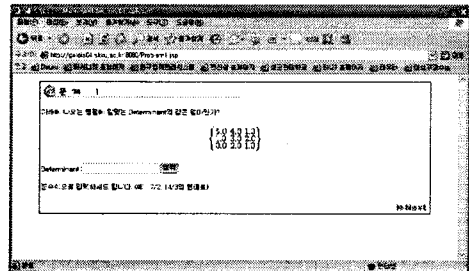
그러나 TeX을 웹상에서 이용한 입력의 방법은 이런 장점에도 불구하고 사용자에게 친숙하지 않아서, 초보자가 수식을 입력하는데 상당한 어려움이 존재하고, 익숙하게 시스템을 사용하기 위한 더 많은 시간이 소요된다. 따라서 사용자에게 친숙한 방법으로 TeX 언어를 이용하여 수식을 입력하는 방법이 필요하다.

MathML은 이러한 입력상의 문제를 해결해준다. 예를 들어 간단한 행렬을 입력하기 위해선 TeX명령을 이용하여 복잡한 방법을 통하여 입력을 하게 되지만, MathML의 경우, 다음과 같이 간단한 파일을 작성하는 것만으로도 손쉽게 수식표현을 할 수 있도록 지원한다.

```
<?xml version = '1.0'?>
<matrix>
  <mname> DetMatrix </mname>
  <row>
    <col>a</col>
    <col>4</col>
    <col>1</col>
  </row>
  <row>
    <col>1</col>
    <col>3</col>
    <col>2</col>
  </row>
  <row>
    <col>0</col>
    <col>a</col>
    <col>1</col>
  </row>
</matrix>
```

<그림 4> 행렬 $\begin{bmatrix} a & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$ 의 MathML 표현식, test.xml

따라서 이러한 내용으로 입력된 내용은 나름대로 해석할 수 있는 MathML Reader 프로그램을 통하여 그 값이 입력되어 실제로 웹상으로 아래의 그림과 같이 표현되도록 되어 있다.



<그림 5> <http://galois04.skku.ac.kr:8080/ProblemKOR4.jsp>

위의 예제는 그 중 a 부분에 대하여 임의의 값을 삽입하여 보여주는 예제이다. 이 파일은 test.xml로 저장되어 다음의 명령을 통해서 시스템에 입력된다.

```

17      <p align="center"><font size="2">
18      <jsp:useBean id="cm" scope="session" class="CMatrix" />
19
20      <
21      cm.BeanXMLLoader("/usr/local/tomcat/webapps/ROOT/test.xml");
22      >
23
24      <%=cm.printApplet() %>

```

<그림 6> Problem1.jsp 일부

BeanXMLLoader가 XML파일을 읽어 와서 이를 행렬 정보로 저장한 후, 이것을 MimeTeX을 이용한 이미지 프로그램으로 보낸 것이다.

이러한 방법을 통하여 우리는 손쉽게 MathML의 장점과 이를 통하여 TeX Render 프로그램의 장점 모두를 취하여 이를 이용하여 손쉽게 웹상에서도 복잡한 행렬 정보를 손쉽게 표현할 수 있다. 같은 방법이 모든 수학 분야에 이용가능하다. 현재 구현되어 있는 각종 MathML 기술과 TeX의 기술의 장점만을 이용하면 웹 상에서 수학적 표현에 대한 의미를 전달하는데 매우 유용하게 사용할 수 있다. 더구나 임의 행렬의 생성이 가능하고 그 행렬의 계산이 가능하며, 질문과 답변 그리고 본 연구진이 개발한 도구의 기능을 이용한 자동채점도 가능한 것이다.

III. JAVA와 MathML을 활용한 행렬계산기의 이론

3.1 웹상에서의 행렬계산 적용방안

앞 절에서는 웹상에서의 수식표현에 대하여 알아보았다. 수식의 표현은 일단 선형대수학상의 양방향 콘텐츠를 제공하는데 가장 기본적인 요소이다. 본 절에서는 선형대수학에서 양방향 교육을 수행하기 위한 JAVA도구 구현에 대하여 소개한다.

보통 선형대수학이 실제 사회에서 문제에 적용되어 쓰일 경우 그 크기가 상당히 큰 경우가 많다. 그리고 배운 수학적 지식을 적절하게 활용하여 여러 가지 요인을 동시에 분석해야 하는 큰 크기의 문제를 실제로 해결할 수 있어야 한다. 따라서 선형대수학의 교수학습 과정에

는 이러한 점을 반드시 반영하여야 한다.

사회의 많은 문제는 수학적 모델링과 선형화과정을 거쳐 대부분 행렬의 연산으로 해결할 수 있는 선형모델로 바뀐다. 그리고 실제 이러한 행렬 계산은 그 크기에 따라서 큰 난이도 차이를 가진다. 이런 능력을 배양하는 교육현장에서는 우선 교재의 내용과 비슷한 크기와 난이도의 문제에서 시작하여 크기가 큰 일반적인 사회모델이나 공학적 모델에 대해서 논의할 수 있도록 유도해야 한다.

3.2 선형대수학에서의 각종 수학문제의 해결방안

앞에서 소개한바와 같이 선형대수학에서는 일반적으로 행렬에 대한 연산문제가 주요 화두로 떠오른다. 행렬식은 일반적으로 선형연립방정식의 해를 구하는데 결정적인 역할을 담당하고 있으며, 고유값과 고유벡터는 행렬의 대각화를 해결하는데 큰 도움을 준다. 이러한 행렬의 대각화는 행렬연산에 대해서 단순화를 제공하고, 이러한 단순화과정은 사회 및 공학에서의 복잡한 문제를 단순화하는데 큰 도움을 주고 있다.

따라서 본 연구진은 이러한 행렬식(determinant), REF(Row Echelon Form), RREF(Reduced Row Echelon Form), 계수(rank), 퇴화차수(nullity), 수반행렬(adjoint), 고유값과 고유벡터의 문제를 컴퓨터상에서 손쉽게 해결할 수 있는 공학적 도구들을 개발해 왔다 (이상구, 2004). 이는 학생들에게 이론을 가르치고, 이를 손으로 계산해 보고, 또한 도구를 통하여 동일한 계산을 해 본 다음 이를 확인하는 과정을 통하여, 공학적 도구가 얼마나 효과적인지 인식시킨 다음, 이를 실제 사회문제나 공학적 문제를 해결할 수 있도록 적용하게 하였다 (이상구 외, 2005).

이러한 과정에서 앞에 소개한 각종 문제해결을 위한 공학적 도구들이 손으로 계산할 수 있는 작은 크기의 문제를 해결하는 것으로부터, 앞에서 소개한 실제 사회적, 공학적 문제인 large scale problem을 해결할 수 있는 도구의 필요성이 제기되었다. 이러한 도구의 제작과정에서 등장하는 문제들을 효과적으로 해결하기 위해선, 선형대수학 입문 내용과 기본적인 프로그래밍언어, 더 나아가 수치적 선형대수학에서 소개하는 행렬분해 이론등이 필요하게 된다(이상구, 2003).

행렬분해이론은 매우 다양한데, 실제로 앞에서 언급한 행렬식, REF, RREF, 계수, 퇴화차수, 수반행렬, 역행렬, 고유값과 고유벡터들을 해결하기 위해선 실제로 아래의 세 가지 행렬분해이론의 적용이 효과적이다.

1. LU-분해 : 가우스 소거법에 기반을 두고 있으며 선형연립방정식의 해, REF, RREF, rank, nullity, 수반행렬, 행렬식, 역행렬 등을 구하는데 이용된다.
2. QR-분해 : 고유값과 고유벡터를 구하는데 이용되어, 행렬의 대각화등에 쓰인다.
3. 특이값분해(SVD)⁵⁾ : LU-분해, QR-분해들이 일반적으로 연산하기 쉬운 형태의 행렬에⁶⁾ 대한 분해법이라면, 특이값분해는 행렬의 크기와 관계없이 앞에서 소개한 모든 내용들을 구하는데 쓰인다. 대표적으로 일반화된 역행렬(pseudo inverse), 특이값등을 구하는데 쓰인다.

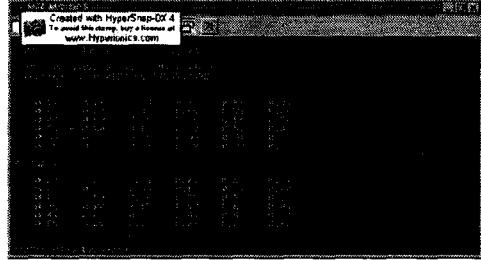
이러한 행렬분해이론은 컴퓨터상에서 유용하게 사용되며, 본 연구에서 개발된 행렬계산기에서도 가장 중요한 부분으로 구현되어 있다. 이 세 가지 행렬분해이론이 컴퓨터상에서 어떤 방법으로 구현할 수 있는지에 대하여도 확인할 수 있다(이상구 외, 2007).

3.3 선형대수학의 컴퓨터적 해법

앞에서 소개한 각종 이론들은 실제로 컴퓨터에 쓰이기 위해서 각각의 알고리즘을 가지게 된다. 예를 들어 LU-분해의 경우 가우스 소거법이 가장 중요하게 쓰이게 되는데, 여기서는 완전피보팅(Complete pivoting)방법을 사용하였다. 이 방법은 자신의 대각성분을 기준으로 그 위 및 아래의 모든 값을 찾아서 가장 큰 값으로 행을 바꾸는 방법을 의미한다.

이러한 기존의 컴퓨터 알고리즘들은 잘 알려져 있고 손쉽게 쓸 수 있도록 대부분 다양한 컴퓨터 프로그래밍

언어로 구현되어 있다. 앞의 알고리즘을 사용한 JAVA 도구의 JAMA 패키지(Hicklin 외, 2005)를 이용하여 프로그램을 실행하면 다음과 같다.



<그림 7> 프로그램 실행결과

이러한 대부분의 알고리즘들은 실수값에 그 기반을 두고 있다. 그러나 학생들이 일반적으로 교재에 근거한 행렬의 성분은 대부분 정수 및 분수가 대부분이고 당연히 그 결과는 분수의 형태로 나와야 그 교육적 효과를 기대할 수 있다. 또 실수 계산 과정에서의 기계의 고유오차(machine epsilon)는 잘못된 판단을 초래하는 문제점을 항상 가지고 있다.

따라서 일반적으로 단순한 계산에서조차 범용성을 고려한 일반적인 알고리즘으로는 원하는 교육적인 결과를 기대하기가 쉽지 않다. 따라서 우리는 이러한 범용적 알고리즘을 잘 활용하면서 동시에 의미있는 결과를 유도할 수 있는 방안을 고려하였다. 위의 알고리즘을 잘 살펴보면 그 연산의 범위가 곱하기(또는 나누기)와 덧셈으로만 이루어진 것을 알 수 있다. 즉, 연산의 데이터가 유리수

Q 인 경우 그 안에 닫힌 계산을 할 수 있다는 뜻이다. 따라서 우리는 이 알고리즘을 Q 안에서 생각할 경우 변환된 행렬의 성분은 모두 Q 안에서 값을 가지게 된다. 따라서 가우스 소거법은 분수를 이용하여 계산하더라도 그 알고리즘은 그대로 유지된다. 이것은 입력되는 데이터가 분수에 국한된다면 그 값은 언제든지 분수로 결과가 나타나게 된다. 따라서 실제 교육환경에서는 분수 풀의 결과가 더 가독성이 높다. 또 교재의 답과 일치하므로 이론은 물론 학생들의 알고리즘에 대한 이해를 높이는 데 더욱 도움이 되는 것을 알 수 있다. 우리는 본 연구에서 실제 이 아이디어를 적용하여 수학교육에 바로 적용 가능한 오차없는 JAVA 계산기를 구현하였다.

5) Singular Value Decomposition

- 6) 일반적으로 LU-분해의 경우에는 정사각행렬에서만 구할 수 있으며, QR-분해의 경우에도 대각화가 가능한 행렬(diagonalizable matrix)에서 가능하다. 즉, 매우 일반적인 행렬에서는 구하기 어려울 수 있으나, 특이값분해는 이러한 제한조건 없이 일반적인 모든 행렬에서 가능하다.

IV. JAVA와 MathML을 이용한 종합행렬 계산기의 구현

4.1 객체지향성과 수학과와의 관계

최근의 자바 도구 언어는 대부분 객체지향을 추구한다. 그 이유는 기존의 Fortran이나 C와 달리, 다양한 입력의 형식을 사용하는 여러 입력 데이터를 손쉽게 처리할 수 있는 능력이 있기 때문이다. 예를 들어, 기존의 C 프로그램에서는 4차 행렬을 표현하는데 “double a[4][4]”와 같은 배열의 구조만 사용한다.

그러나 이것은 저장 공간의 의미만을 가지고 있다. 그 이상의 어떠한 기능이 없기 때문에, 만일 이 행렬의 행렬식(Determinant)를 구하고자 한다면, 그 크기와 저장 공간의 구조를 생각하여 사용할 때마다 다시 프로그램을 구성해야 한다. 바로 이것은 구조에 의존하는 구조형 프로그램(Structure Oriented Programming)의 특징이며, 수학적인 접근을 시도할 때에는 그에 맞는 컴퓨터적인 논리로 다시 알고리즘을 구상하여 접근해야 할 필요가 있다.

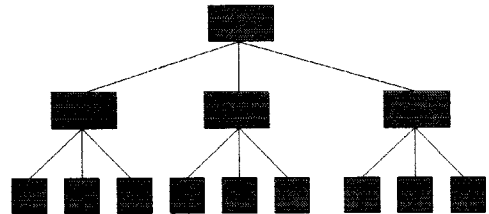
그러나 JAVA는 위의 행렬을 클래스(Class)로 정의가 가능하다. C언어의 단순한 저장공간에 비하면 클래스라는 것은 좀 길어 보이지만, 실제로 이 클래스를 이용할 경우 단순한 저장공간의 의미를 넘어서서 좀 더 다양한 기능성을 가진 새로운 형태로 이해할 수 있다. 앞의 C언어의 경우에는 구조가 바뀌거나, 다른 목적을 위하여 프로그래밍을 해야 할 경우 각각의 경우를 상황에 맞춰서 다시 만들어야 하지만, 자바 클래스 경우에는 이전과 같은 프로그램의 대대적 수정을 고려할 필요가 없다. 따라서 클래스의 경우 한번 잘 만들어 두면 효율적으로 쓸 수 있는 라이브러리(Library)로 바로 만들 수 있으며, 이를 이용하면 처음부터 새로운 프로그램을 작성하는 것이 아니라 기존에 구성된 부분을 기반으로 삼아서 더 발전된 프로그램을 훨씬 빠르고 손쉽게 제작할 수 있다.

또한 이러한 구조는 수학적인 개념구조와 유사하여, 수학적 사고가 어느 정도 있다면 손쉽게 클래스의 개념을 이해하여, 그 내부적 개념을 자유롭게 이용할 수 있다. C언어는 자체적으로 컴퓨터에 맞는 논리로 바뀌어야 하지만, 객체지향적 프로그래밍에서는 수학적인 알고리

즘을 그대로 적용할 수 있다. 이를 이용하여 JAVA는 수학에서 계산상의 도움뿐만이 아니라, 개념을 구체화하여 표현하는데 훨씬 수월한 장점을 보인다.

그리고 이러한 객체지향적 성격은 앞에서 소개한 MathML을 사용하는 경우 중요한 역할을 한다. 실제로 MathML은 XML의 응용으로 그 문서양식은 DOM(Document Object Model)을 따른다(W3C, 2006; W3C, 2007). 이러한 구조는 객체 지향적 구조(Object oriented structure)에서 시작되어 구조 자체가 이미 객체를 중심으로 구성되어 있다.

앞에서 예를 들었던 test.xml의 DOM구조를 살펴보면 다음과 같다.



<그림 8> MathML의 DOM구조 예제

따라서 MathML을 구현할 때에는 반드시 객체지향적 구조를 받아들일 수 있는 틀이 필요하고, 이러한 틀은 객체지향성을 가진 언어들이 구현해야 할 부분인 것이다. 바로 이러한 과정의 중간에서 이를 구현해 주는 것이 JAVA도구이다.

따라서 수학적 표현은 일대일로 MathML에서 쓰이는 객체와 연결되고 이는 바로 JAVA와 연결된다. 이러한 점은 앞으로 수학적 문제해결에 객체지향적 프로그래밍이 중요하게 사용될 것을 의미한다. 따라서 객체지향성과 수학적 연산구조는 서로에게 중요한 관계임을 알 수 있다(Fujiwara, 2006).

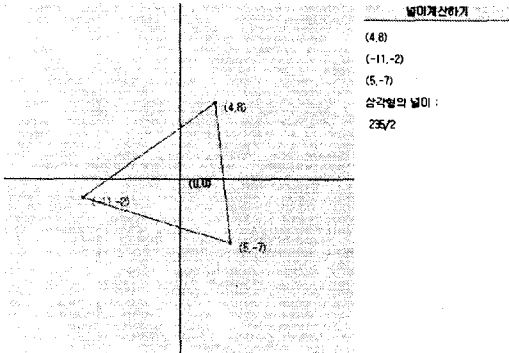
4.2 자바애플릿(JAVA Applet)과 인터넷과의 관계

WWW은 처음 HTML을 기반으로 구성되고, 멀티미디어(Multimedia; 동영상, 소리, 그림, 글)를 한꺼번에 처리하여 보낼 수 있다는 장점을 보유하고 있다. 그러나 초창기의 WWW은 단방향적으로 사용자에게 정보를 전달하는 방식으로 많은 한계를 가지고 있었다. 이를 극복

하고 상호간에 정보의 교환을 위하여, 많은 기술들이 제시되어 왔다.

이렇게 제시된 기술 중에서, JAVA를 이용한 JAVA 애플릿은 JAVA 도구를 기반으로 하여 사용자의 환경에 기반을 두고 작동하는 체계를 가짐으로써, 이제까지 일방적이던 정보의 흐름을 바꾸어서, 웹페이지 게시자와 사용자와 정보를 교환할 수 있는 체계를 마련해 주었다.

JAVA 애플릿은 사용자, 즉 클라이언트(Client) 시스템의 성능에 따라 그 기능이 결정되었다. 따라서 초창기에 개발된 JAVA 애플릿은 그 속도가 매우 느리고, 각종 멀티미디어 자료를 처리하는데 낮은 성능을 보여서 그 능력을 크게 인정받지 못했다. 그러나 점점 개인용 컴퓨터의 성능이 좋아지면서 자바애플릿의 기능은 점점 늘어나게 되어 뛰어난 그래픽과, 사용자에게 편리한 인터페이스, 그리고 수학과 연결되는 알고리즘 개발체계가 융합되면서 인터넷이 보편화되면서 각광받는 기술로 부각되었다.

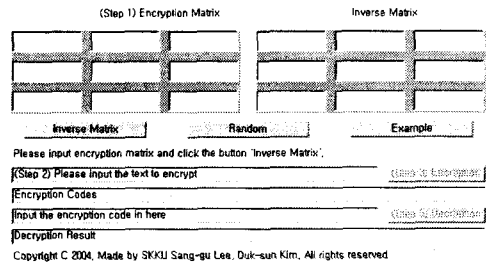
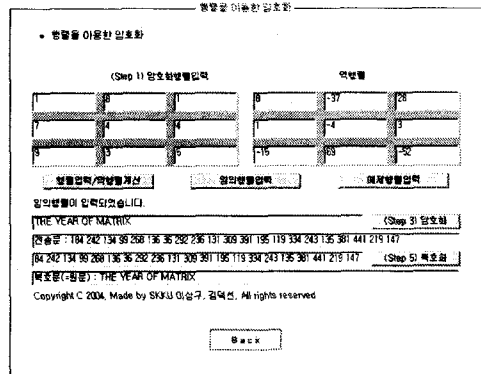


<그림 9> 벡터를 활용한 실습애플릿7)

위와 같은 장점은 우리가 이해하고 있는 수학적 개념을 표현하기에도 적합할뿐더러, 이는 교육적 환경에도 적용하여 학생들에게 손쉽게 그 결과를 보여주는 방법을 우리에게 제시하고 있다. 이는 양방향 교육환경에서 중요한 요소이며, 이러한 노력을 통하여 교육적 효과를 극대화 할 수 있는 장점을 가지고 있다.

4.3 자바애플릿의 수학교육적 활용과 그 예제

그러면 자바애플릿의 수학교육적 활용의 예제를 살펴 보도록 하자. 저자는 교재(이상구, 2004; 이상구 2006)에 나오는 “행렬을 이용한 암호화 방법”에 대한 과정에 대하여 학생들이 직접 이해하고 실습할 수 있도록 아래와 같은 자바애플릿을 개발하여 학생들이 직접 배운 이론의 진행과정을 실습해 볼 수 있도록 지원하였다.



<그림 10> 행렬을 이용한 암호화 애플릿

이 자바애플릿의 기능은 암호화 하고자 하는 문장과 임의로 생성되거나 또는 직접 입력하여 만든 암호화행렬을 가지면, 그 다음 과정이 어떻게 전개되는지 JAVA도구가 대신 계산결과를 보여주는 기능을 갖고 있다. 즉, (1)암호화행렬이 가역행렬인지를 확인하여 역행렬을 찾아주고, (2)암호화행렬에 평문을 곱해서 만든 코드를 보여주고, (3)암호화된 코드에 암호화행렬의 역행렬을 곱하여 복호화 해준다.

7) <http://matrix.skku.ac.kr/CLAMC/javatools/j13.html>

또한 본 연구팀이 자체개발한 자바애플릿은 교재 (이상구, 2006)에 인터넷상의 주소(URL)를 소개하여 학생들이 별도의 수학적 프로그램을 구하여(또는 구입하여) 사용하지 않고, 바로 인터넷에 접속할 수 있는 장소라면 어디에서든 실습이 가능하고 온라인교재(이상구, 2004)을 통하여 바로 학생이 실습하여 사용할 수 있기 때문에 학생들의 자발적인 수업참여가 가능하다. 이를 통하여 본 연구팀은 실제로 많은 학생들의 호응하는 효과를 직접 확인하였다

본 자바 애플릿들을 실제로 수업에 활용한 뒤, 학생들의 반응 중 주목할 만한 사실은 수업 중 만나게 되는 문제를 해결하기 위하여 많은 노력을 하고, 이러한 문제 해결을 위하여 활발하게 주어진 도구를 활용하는 모습을 보였다. 학생들은 부여된 문제에 대하여 많은 고민을 하였고, 이를 스스로 해결하지 못하는 경우, 해당하는 도구들을 이용하여 문제를 해결하는 모습을 보였다.

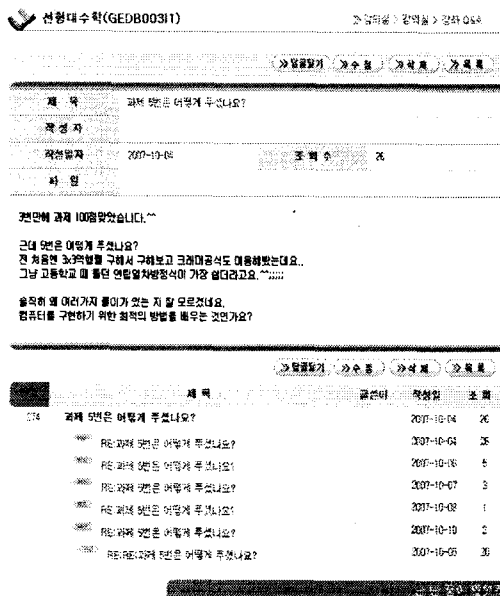
번이 게시판 9페이지, 총 180여개의 질문 및 답변으로 학생 및 교수자간의 정보로 채워질 정도로, 학생들은 많은 관심과 활동을 보여주었다. 물론 이렇게 높아진 학습 동기를 유지시키기 위해선, 교수자도 이에 상응하게 관심을 가져야 한다. 그림 11에서 보는 바와 같이 한 학생의 질문에 대하여 학생이 답변한 경우, 이해하기 어려운 결론으로 흘러갈 경우, 교수자는 적절하게 이를 조정해주는 역할을 중간에 담당해야 한다. 그리고 그 사이에 적절하게 JAVA도구를 부여하여 학생들이 직접 문제를 해결하는 방법을 알려주어야 한다. 이러한 과정에서 학생들은 스스로 더 나은 결론을 추구하게 된다. 그리고 이런 적극적인 참여는 2007학년도 2학기 70명단위의 교양 강좌에서 총 2,000회 이상의 질문과 답변에 참여하며 교재와 과제의 거의 모든 문제를 자기주도적으로 토론해가며 해결해가는 모습을 볼 수 있었다.

4.4 분수화 알고리즘 구현과 객체지향성

객체지향적 프로그래밍(9)에서는 클래스가 프로그래밍의 기본단위이다. 연산의 기본 단위이기도 하여서 연산을 자유롭게 정의하여 계산이 손쉽게 이루어지도록 만들 수 있다. 따라서 분수를 계산할 수 있는 클래스를 만들어서 이를 통하여 계산에 용의하도록 하여야 한다. 이 클래스는 다음과 같은 기능을 포함해야 한다.

1. 분수의 정의
2. 분수의 계산 (사칙연산)
3. 분수의 기약화

이에 기반을 두고 JAVA에서 객체지향적 프로그래밍 기법을 이용하여 분수화 클래스를 이용한 행렬을 구현할 수 있다. 이 클래스도 앞의 분수클래스와 마찬가지로 사



<그림 11> 학생의 질문과 답변 및 토론

자바애플릿을 같이 활용하는 동안 1주일(8)을 주어서 테스트를 하였는데, 해당 게시판에는 관련된 질문 및 답

9) 현재까지 소프트웨어 개발을 위한 개념이나 철학(Paradigm)으로 정립된 것은 크게 구조적(Structured)인 것과 객체지향적(Object Oriented)인 것으로 나눌 수 있다. 여기서 구조적인 것은 소프트웨어를 기능위주의 관점으로 바라보면서 원하는 기능을 세분화, 구체화시킴으로써 해결책을 만들어 내는 것인 반면, 객체지향적인 것은 소프트웨어를 데이터 위주의 관점으로 바라보면서 구체적인 데이터들 간의 상호관계를 정의함으로써 원하는 목적을 달성할 수 있는 해결책을 만들어내는 것을 가리킨다.

8) 2007년 9월 28일~10월 4일, 가운데 휴일이 3일 포함된다.

칙연산중 가능한 연산(더하기, 곱하기, 빼기)을 지원하고, 이를 통하여 행렬을 수와 같이 계산할 수 있는 환경을 마련해준다. 이는 앞에서 소개한 Matrix Class와 비슷한 형태를 가진다. JAVA는 비록 객체지향적 프로그래밍 언어지만 연산재정의(Operator Overloading)을 지원하지 않기 때문에 연산기능을 모두 함수(function, method¹⁰)으로 추가하여야 한다. 이를 이용하여 분수와 클래스를 지원하는 LU-분해를 구현하였다.

JAVA의 경우에는 다음과 같은 분수연산을 지원하는 행렬을 만들고, 연산재정의(Operator Overloading)가 지원되지 않기 때문에 알고리즘을 일부 수정해 주어야 한다.¹¹ 물론 수정은 가해지지만, 각각의 연산자 부분을 함수로 치환하는 작업만이 더 해지므로 기존의 알고리즘의 의미는 그대로 유지된다고 할 수 있다. 실제로 아래의 FMatrix Class안의 함수를 살펴보면, 주석처리한 부분과 아래의 Fraction Class의 연산함수를 쓴 부분과의 의미는 전혀 다르지 않다.

이제 만들어진 코드를 실제로 테스트를 해 볼 수 있다. 사용방법은 아래와 같다.

```

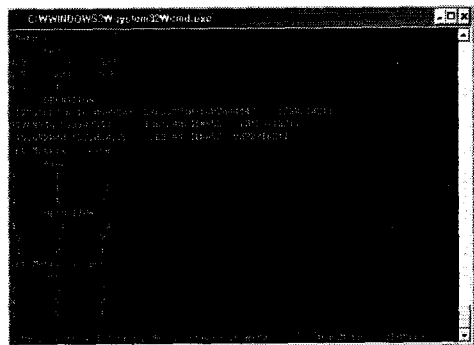
FMatrix fm3=new FMatrix(3,3);
fm3.set(0,0,3);
fm3.set(0,1,1);
fm3.set(0,2,2);
fm3.set(1,0,2);
fm3.set(1,1,1);
fm3.set(1,2,-1);
fm3.set(2,0,3);
fm3.set(2,1,1);
fm3.set(2,2,3);
fm3.print();
System.out.println("-----OPERATION-----");
fm3.inverse().print();
System.out.println("Int Matrix : "
    +fm3.inverse().isIntMatrix());
System.out.println("-----new3-----");
FMatrix fml=FMatrix.mdINIDETGenerator(1,3);
fml.print();
)
/* 기타함수 생략 : 실제 Applet등에서 연산에 쓰이는
부분 및 MathML 구현 관련부분 생략 */
    
```

<그림 12> FMatrix Class : DOS용 테스트함수부

```

public class FMatrix
{
    /* 기타함수 생략 : 이미 앞에서 소개한 함수들임 */
    public static void main(String[] args) throws Exception
    {
        System.out.println("-----new1-----");
        FMatrix fm2=new FMatrix(3,3);
        fm2.mdGenerator(1);
        fm2.print();
        System.out.println("-----OPERATION-----");
        fm2.inverse().print();
        System.out.println("Int Matrix : "
            +fm2.inverse().isIntMatrix());
        System.out.println("-----new2-----");
    }
}
    
```

위 소스는 3×3 행렬을 하나 생성하고, mdGenerator함수를 이용해서 1자리 임의의 수를 생성한다. 그리고 역행렬은 fm2.inverse()를 통해서 구하고 그것을 print()함수를 통해서 출력할 수 있는 코드이다. 이를 실행하면 다음과 같이 나온다.



<그림 13> FMatrix Class 실행결과

이렇게 유리수를 이용하여 그 결과를 확인하면 상대적으로 학생들도 알아보기 쉽게 되고, 그 교육적 효과는

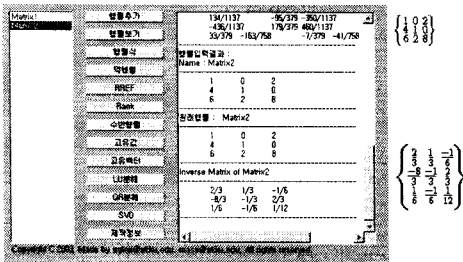
10) 객체지향적 프로그래밍에서는 객체 안에 쓰이는 함수를 method라고 한다.

11) Java가 아닌 다른 객체지향적 언어 중(대표적으로 C++, C#) 연산재정의(Operator Overloading)을 지원하는 경우, 기존의 알고리즘을 그대로 활용할 수 있다. 따라서 굳이 본 내용에서 소개하듯 LU-분해 함수를 새로 개발할 필요는 전혀 없다. 만일 추후 JAVA가 연산재정의를 지원하게 될 경우, 여기서 소개하는 함수를 새로 정의할 필요가 없어서, 더욱 개발이 손쉬워질 수 있다.

극대화 될 수 있다. 따라서 이러한 기술을 수학적으로는 행렬분해의 이론을 사용하여, 컴퓨터 기술적으로는 분수화 클래스를 이용한 구현을 통하여 우리에게 더 나은 교육환경 제공을 위한 기술을 보여준다. 또한 이러한 분수화 클래스의 구현은 각종 공학분야에서도 오차를 줄인 결과를 보여줌으로서, 각종 수학적 모델구성 및 다양한 연구결과 예측에도 큰 도움을 줄 수 있다.

4.5 JAVA와 MathML을 이용한 종합행렬 계산기

본 연구팀은 이제까지 소개한 다양한 기술을 이용하여 응용 및 공학적 계산, 그리고 교육적 활용을 목적으로 다음과 같이 한글판과 영문판으로 MathML을 이용한 행렬계산기를 제작하였다.



<그림 14> 2008년 MathML 버전 종합행렬계산기¹²⁾

본 종합행렬계산기는 각종 행렬분해를 실행하고, 이를 이용하여 행렬식 및 역행렬, 고유값등을 구하는 기능을 실수 및 복소수를 기반으로 수행할 수 있다. 본 프로그램은 인터넷

<http://matrix.skku.ac.kr/newMatrixCalENG11/Test.html>

[영문판]

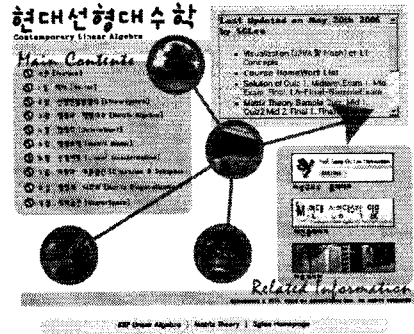
<http://matrix.skku.ac.kr/newMatrixCalKOR11/Test.html>

[한글판]

에서 언제든지 직접 실행해서 확인해 볼 수 있다. 위에 제시한 다양한 JAVA도구를 탑재하여 만든 선형대수학 콘텐츠는 아래의 주소에서 이용할 수 있다(이상구, 2004).

12) <http://matrix.skku.ac.kr/newMatrixCalKOR11/Test.html>

<http://matrix.skku.ac.kr/CLAMC/index.html>



<그림 15> 현대선형대수학 멀티미디어 콘텐츠

4.6 교육적 효과에 대한 분석

이러한 JAVA와 MathML을 활용한 도구들은 (Ham 외, 2005)에서 언급한 것처럼, 웹을 통하여 계산을 한다거나, 수학적 표현을 하는 것을 학생들로 하여금 편리하게 제공해주어서, 선형대수학의 의미를 분명하게 전달하는데 매우 큰 도움을 제공한다. 실제로 이런 방식의 수업을 진행한 반과 그렇지 않은 반은 공통종합시험의 성취도에서 다음과 같이 의미있는 차이를 보여주고 있다.

<표 1> 실험반과 일반반의 학업성취도 비교 (2007년 가을학기자료)

분반 (성적)	A	B	C 또는 D	F	학생 수
실험반	22	20	25	14	78
일반1반	18	20	38	11	78
일반2반	14	26	38	7	78
일반3반	16	16	37	4	73

또한, 학생들의 반응을 살펴보기 위하여 2007년도 가을학기에 JAVA도구와 MathML을 활용한 수업을 들은 학생들을 대상으로 아래와 같은 설문조사를 자체적으로 실시하였다.

<표 2> 만족도 설문조사 문항

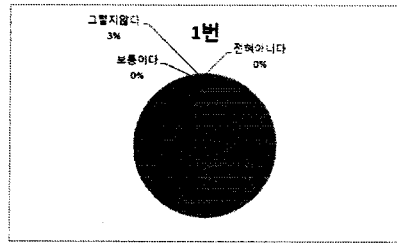
만족도 조사 (선형대수학-고급 반)

- 고등학교 때보다 더 자세한 내용을 배울 수 있었다.
 매우 그렇다 그렇다 보통이다 그렇지 않다
 전혀 아니다
- 고급반을 BL 강의에서 영어로 강의하여도 수강했을 것이다.
 매우 그렇다 그렇다 보통이다 그렇지 않다
 전혀 아니다
- 수업 내용의 난이도는 적절했다.
 매우 그렇다 그렇다 보통이다 그렇지 않다
 전혀 아니다
- 수업을 들어보니 고급반에서 수강 했어도 어렵지 않았을 거라 생각한다.
 매우 그렇다 그렇다 보통이다 그렇지 않다
 전혀 아니다
- 다른 수업들도 차별성을 두어 일반반과 고급반을 운영했으면 좋겠다.
 매우 그렇다 그렇다 보통이다 그렇지 않다
 전혀 아니다
- 이 수업을 통해 전공에 흥미와 관심을 갖게 되었다.
 매우 그렇다 그렇다 보통이다 그렇지 않다
 전혀 아니다
- 수강 내용을 이해하지 못했을 경우, 어떤 조치를 취하겠는가?
 ① 이해되지 않더라도 넘어간다.
 ② 우선 의문다.
 ③ 참고 문헌이나 인터넷 등을 통해 문제점을 해결한다.
 ④ 선배의 도움을 받거나 친구들과 같이 해결한다.
 ⑤ 교수 및 조교에게 도움을 청한다.
- 선형대수학-고급반 강의의 내용은 어떠한가?
 ① 이해가 잘 된다 ② 이해가 된다 ③ 보통이다
 ④ 이해하기가 어렵다 ⑤ 전혀 이해하기 어렵다
- 강의 콘텐츠와 동영상 강의 및 QnA 등에서의 교수님 설명은 이해하기 쉬운가?
 ① 이해하기 충분하다 ② 어느 정도 이해한다 ③ 보통이다
 ④ 이해하기가 어렵다 ⑤ 전혀 이해하기 어렵다
- 현재 강의되고 있는 교수자의 강의 방법은?
 ① 대부분 text 를 이용
 ② OHP나 SLIDE, HTML, 부교재, 학생 참여 이용
 ③ 플래쉬, 자바, 컴퓨터나 동영상 등 IT매체 사용
 ④ 위 3가지 방법을 잘 배합
 ⑤ 기타()

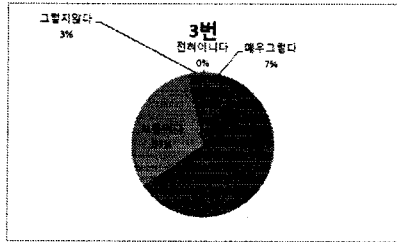
본 설문조사 중 학생의 만족도를 표시하는 1번과 3번, 6번과 7번, 8번, 9번, 10번의 분석결과는 다음과 같았다.

1번문항 : 고등학교때보다 더 자세한 내용을 배울 수 있었다.

많은 학생들이 고등학교때보다는 더 자세한 내용을 많이 배우는데 대하여 만족감을 표시하였다.

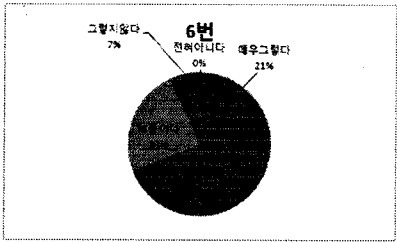


3번문항 : 수업내용의 난이도는 적절했다.



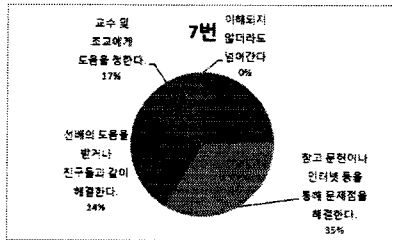
대체적으로 선형대수학 수업의 수업내용의 난이도에 대해서는 적절한 쪽으로 생각하였다.

6번문항 : 이 수업을 통해 전공에 흥미와 관심을 갖게 되었다.



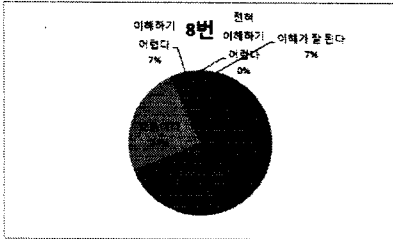
많은 학생들이 본 수업이 자신의 전공과 연계됨을 강조하고, 자신의 전공과에 흥미를 느끼는데 충분한 동기 부여를 하였다.

7번문항 : 수강내용을 이해하지 못한 경우, 어떤 조치를 취하겠는가?



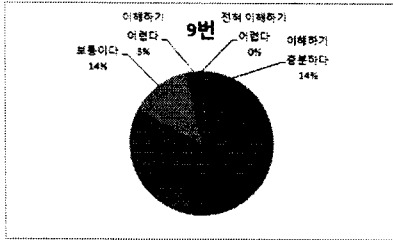
대체적으로 학생들이 어려움이 봉착한 경우 다양한 해결방법을 이용하여 그 문제를 해결하는 것으로 보인다. 특히 인터넷에 대한 의존도가 가장 높아서, 다양한 문제 해결을 위하여 인터넷을 주로 사용하는 것을 알 수 있다.

8번문항 : 선형대수학-고급반 강의의 내용은 어떠한가?



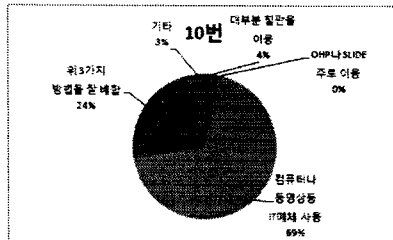
많은 학생들이 본 수업에 대하여 대부분 이해하기 쉽다는 생각을 하고 있었다.

9번문항 : 강의 콘텐츠와 동영상 강의 및 QnA 등에서 교수님 설명은 이해하기 쉬운가?



교수님의 수업진행에서 대다수 이해하는 것으로 파악되었으며, 많은 학생이 대부분 잘 이해할 수 있는 수업을 진행한 것으로 파악된다.

10번문항: 현재 강의되고 있는 교수자의 강의 방법은?



선형대수학 수업에 나와있는 각종 Java 도구들과 기타 도구들이 효율적으로 학생들이 사용하였음을 보여주는 결과이다.

이렇게 학생을 대상으로 한 직접적인 설문조사결과 JAVA와 MathML을 이용한 도구를 수업에 활용한 것이 학생들에게 더 좋은 만족도를 제공하였고, 이를 통하여 좀 더 효과적인 교육환경을 제공할 수 있음을 확인하였다.

V. 결론

유한계산의 영역인 컴퓨터와 가장 조화를 잘 이루는 분야인 선형대수학에서는 ATLAST Project¹³⁾ 및 다양한 방법을 통하여 이미 1990년부터 판서에서 벗어나 MATLAB, Mathematica, Maple 등 CAS의 활발한 이용이 있어왔다. 이는 인터넷 환경의 발전과 함께 새로운 교육환경을 열었고, 이제는 오프라인 교육의 장점에 온라인 콘텐츠¹⁴⁾¹⁵⁾ 및 공학적 도구의 장점을 보태어 'Blended Learning'에 적용되고 있다. 이러한 새로운 교육환경을 효과적으로 이용하여 학생에게 더욱 강한 동기를 부여하고 동시에 활발한 양방향교수 학습 활동을 통하여 교육의 질을 혁신적으로 개선 할 수 있다(Ham 외, 2005).

특히, 선형대수학 과정의 경우 학생은 이론의 이해와 작은 크기의 행렬계산 능력에서 더 나아가 큰 크기의 행렬문제를 실제로 해결할 수 있는 능력을 요구받고 있다. 이전에는 그 중 소수만이 상업용 프로그램을 이용하여 이 요구에 답하였으나, 지금은 이 정도의 문제 해결 능력은 모두에게 요구되고 있다. 많은 비용을 들여 대개는 수입한 프로그램을 구입하고 설치한 후 부가적으로 시간과 노력을 들여 초보적 사용법을 익히고 그를 이용하여 몇 가지 기능만을 이용하다가 프로그램 업그레이드를 하는 과정을 반복하는 비경제성은 가장 큰 장애물이었다.

본 연구에서는 앞에서 소개한 여러 가지 문제를 해결하기 위하여 다양한 JAVA 프로그램을 공학적 용도뿐만이 아니라, 교육적 목적으로 사용하는데 주안점을 두고 개발하였다. 특히 범용적으로 사용될 수 있도록 수식표현의 문제를 MathML등의 XML에 기반을 두고 있는 기술을 도입하여 해결하였다.

13) <http://www.umassd.edu/SpecialPrograms/Atlas/>

14) <http://ceee.rice.edu/Books/LA/index.html>

15) <http://matrix.skku.ac.kr/sglee/krf/index.htm>

또한, JAVA 도구의 객체지향적 성격은 알고리즘을 개발하는 데에도 도움을 주지만, 객체지향적 성격을 공유하는 MathML과도 연결되어 웹 환경에서 수학적 표현을 효과적으로 전달하는데 큰 도움이 된다. 또 이러한 과정에서 발생하는 기계적 고요오차를 피하기 위하여 분수연산 알고리즘을 도입하였다.

앞에서 소개한 JAVA 도구들은 우선 교육적 효과를 증진시키기 위하여 개발된 도구들이다. 따라서 학생들이 직접 실습해 볼 수 있는 작은 크기의 행렬을 다루는 문제로부터 시작하였으나 실제로는 2×2 행렬에서 15×15 크기의 행렬계산을 가능하게 하는 도구이다. 더 나아가 여기에 쓰인 알고리즘은 사용자 환경만 조정하면 1000×1000 행렬을 무리없이 다룰 수 있는 것임을 입증한다. 이는 같은 JAVA도구가 바로 연구 등 다른 용도로 이용영역을 넓힐 수 있다는 의미이다.

마지막으로 본 연구에서 개발된 MathML을 이용한 JAVA 계산기는 분수화된 복소수 알고리즘을 채택함으로써 양방향 교육에 추가로 투입될 수 있다. 그렇다면 현재 선형대수학 교육현장에 사용되는 상업용 소프트웨어의 기능은 거의 모두 MathML을 이용한 JAVA도구가 대체할 수 있다는 의미이다. 즉, 수학교육에 투자되는 막대한 소프트웨어 비용을 절감하는 효과가 있게 될 것이다.

참 고 문 헌

- 박정희·이미정 (2003). MathML에 기반한 수학적 생성 웹사이트의 설계 및 구현, 한국컴퓨터교육학회 논문집 6(3), pp 173-184
- 이상구 (2006). 현대선형대수학 2권, 서울 : 경문사, pp. 211-219
- 이상구·설한국·한신일 (2005). A Research on a Model of BL-PBL Self-Directed Linear Algebra Lecture at College, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 19(4), pp.769-785.
- 이수현·홍은표 (2004). MathML을 이용한 수학교과 ICT 활용 교육방안, 한국정보교육학회 논문집 7(1), pp.11-27
- Berlinghoff W.P. & Gouvêa F.Q. (2004). *Math through the Ages*, Oxtton House Publihsers and The Mathematical Association of America(MAA), ISBN : 0-88385-736-7, pp. 53-58
- Fujiwara T.; Nakano J. & Yamamoto Y. (2006). Using mathematical expressions in a statistical language, *Computational Statistics & Data Analysis*, doi: 10.1016/j.csda.2006.10.022
- Ham, Y. & Lee, S.-G. (2005). New Learning Environment of Linear Algebra in Korea. *J. KSME Ser. E* 9(1), pp.57-66
- Miner R. (2005). The Importance of MathML to Mathematics Communication, *Notices Amer. Math Soc.* 52(5), pp.532-538
- 이상구 (2003). Numerical Linear Algebra Multimedia Contents, [Online] available: <http://matrix.skku.ac.kr/nla/>
- 이상구 (2004). 현대선형대수학 온라인 교재, [Online] available: <http://matrix.skku.ac.kr/CLAMC/index.html>
- 이상구·김덕선 (2007). 컴퓨터에 활용되는 행렬분해이론, [Online] available : <http://matrix.skku.ac.kr/sglee/camd/>
- Hicklin J.; Boisvert R.F.; Moler C.; Miller B.; Webb, P.; Pozo R. & Remington K. (2005), JAMA Package, The MathWorks and the National Institute of Standards and Technology (NIST), [Online] available: <http://math.nist.gov/javanumerics/jama/>
- Microsoft Corp. (2007). Windows Vista에서의 ActiveX 관련사항, [Online] available : <http://www.microsoft.com/korea/windows/compatibility/activex.mspx>
- World Wide Web Consortium(W3C) (2006). XML, [Online] available : <http://www.w3.org/XML/>
- World Wide Web Consortium(W3C) (2007). MathML, [Online] available : <http://www.w3.org/Math/>
- World Wide Web Consortium(W3C) (2007). The W3C MathML software list, [Online] available : http://www.w3.org/Math/Software/mathml_software_cat_browsers.html

MathML and JAVA implementation in Linear Algebra interactive contents and education

Kim, Duk-Sun

Sungkyunkwan University, Chuncheon-Dong 300, Suwon, Gyeonggi-Do
mass@skku.edu

Lee, Sang-Gu[†]

Sungkyunkwan University, Chuncheon-Dong 300, Suwon, Gyeonggi-Do
sglee@skku.edu

Jung, Kyung-Hun

Sungkyunkwan University, Chuncheon-Dong 300, Suwon, Gyeonggi-Do
jjjjkh@naver.com

Seol, Han-Guk

Daejin University, Pocheon, Gyeonggi-Do
hgseol@skku.edu

Internet has been widely spread out and the need of convenient mathematical expression in the internet has been in need. In this paper, we discuss how MathML and JAVA have been developed for mathematical expressions in the internet. And we introduce our JAVA applet tools that adapted the object oriented programming techniques of the MathML and JAVA. Most of our JAVA tools have been developed for linear algebra course whose method can be applied to other subject as well. Then we discuss how we use those tools and output from the use of them in our class.

* This work was partially supported by BK 21, KRF project #2006-0869-000 and Com*2MaC.

* ZDM Classification : D30, B40, H60

* 2000 Mathematics Subject Classification : 15-04, 15A06, 97B40, 97U60, 97U70,

* Key Words : Contents, JAVA, MathML, Linear Algebra, CAS, Matrix Computation

[†] corresponding author