韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
2008. 02. 제 47권, 제 1호, 49-59

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
February. 2008, Vol. 47, No. 1, 49-59

포물선의 동적 표현과 마이크로월드

김 화 경 (상명대학교)

1. 들어가며

곡선은 조건을 만족하는 '1차원 집합'이라는 정적인 의미와 함께 시각에 따라 변하는 점이라는 동적인 의미를 함께 가진다(김홍종, 2004). 정적인 의미에서 곡선은 일정한 관계를 만족하는 점들의 집합이며 동적인 의미에서는 시간에 따른 행동의 자취이다. 정적인 의미에서 한 곡선이라 하더라도 동적인 의미에서는 다른 행동일 수 있다. 시간에 따른 행동은 곡선을 구성하는 방법을 제시하는 반면 점들이 만족하는 관계는 이미 주어진 곡선을 분석하는 방법이다.

곡선을 학교수학에서 다루는 방법을 보자. 제일 먼저 학교수학에 등장하는 곡선은 원이며, 초등학교에서 원을 도입할 때 '단추를 실에 묶어 돌려보기'나 '여러 사람이 양 손을 잡고 둥글게 서 보기'와 같이 도입하고, 이후 컴퍼스를 통해 원을 그리는 활동으로 나아가고 있다(교육인적자원부, 2001). 이와 같은 원에 대한 동적 표현을 통한 원의 구성을 강조하는 초기 도입 방식과 달리 중고등학교 교육과정에서 원을 다룰 때에는 정적 표현을 사용한다. 원은 '평면 위에서 한 정점으로부터 같은 거리에 있는 점들의 집합'으로 정의된다. 포물선, 타원, 쌍곡선 등의 이차곡선들은 초등적인 구성방법이 먼저 제시되던 원과는 달리 곧바로 정적 표현으로 도입되고 곡선의 점들이 만족하는 관계식이 강조된다. '평면 위에서 두 정점 F, F' 으로부터의 거리의 합이 일정한 점들의 집합'(임재훈 외, 2003)이라는 타원의 정의는 정적이며 이후 타원에 대한 관심은 곡선보다는 곡선 위의 점들이 만족하는 관계식에 집중된다. 포물선의 경우는 9-가 단계에서 이차함수의 그래프로 먼저 도입되며, 이후 초점과 준선을 이용하여 이차곡선으로 다시 정의된다.

이와 같이 학교수학에서 시간에 따른 행동이라는 곡선의 동적 표현은 거의 제시되어 있지 않다. 이는 수학적 확실성을 위한 역사적 노력의 결과로, 수학적 탐구 대상으로서 곡선을 이해하려는 역사적 결과이며 동시에 '종이와 연필'이라는 곡선의 동적 표현에 한계를 가진 교육 환경 때문이기도 하다.

김화경・송민호(2007)는 '컴퓨터와 수학교육'이라는 연구 분야의 틀에서 곡선에 대한 두 가지 표현 방식과 표현을 구현할 수 있는 컴퓨터 환경의 특징을 논의하고 있다. 하나의 표현 환경은 관계를 이용한 동적 기하 환경(Dynamic Geometry System; DGS)이며 다른 하나는 행동을 이용한 거북 마이크로월드(microworld) 환경이다. 이러한 구분은 조건을 만족하는 점의 집합, 관계를 만족하는 점의 집합으로 DGS에서 관계로 구현되는 정적인 곡선[1])과 시간이라는 변수에 따른 행동과 그 결과로 거북 마이크로월드에서 구현되는 동적인 곡선의 구분으로 볼 수 있다. 김화경(2006)은 이러한 두 가지 표현 환경의 통합의 중요성을 주장하고 있다. 이 때, 두 가지 표현 환경이 통합된다는 것은 동일한 환경에서 표현들 사이의 번역이 가능하며, 나아가 서로의 단점을 보완하는 환경이 된다는 의미를 갖는다.

서로 다른 표현들 사이의 번역 활동은 각각의 표현에 속하지 않는 통찰을 전해줄 수 있다. Janvier(김남희 외, 2006; 재인용)는 함수를 표현하는 양식을 상황・언어적

* 2007년 12월 투고, 2007년 12월 심사 완료.
* ZDM분류 : U73
* MSC2000분류 : 97C80
* 주제어 : 마이크로월드, 포물선, 곡선의 동적 표현, 컴퓨터와 수학교육, 자바말

1) DGS에서도 마우스 끌기 방식으로 점을 움직이고 종속된 점의 자취로 곡선을 접근할 수 있으므로 동적 의미를 가질 수 있다. 완성된 그림으로 제시되는 완전 정적인 곡선에 비해 DGS에서 관계를 만족하는 점의 자취의 표현은 동적인 과정을 표현하는 것으로 볼 수 있다. 그러나 우리는 시간이라는 변수가 명시화 될 수 있는 거북 마이크로월드에 비해 정적인 표현으로 이해하고 있다.

표현, 표, 그래프, 공식 등으로 나누고 이들 사이의 번역 활동의 중요성을 말하고 있다. 또한 Abelson과 diSessa(1980)는 LOGO 환경에서 거북 행동에 대한 여러 가지 표현들 사이의 번역 활동을 강조하고 있다.

본 연구의 목적은 두 가지 표현의 통합 환경에서 곡선의 정적 표현을 동적 표현으로 번역하는 활동이 가지는 장점을 살펴보는 것이다. 특별히 포물선에 대해 번역의 방법을 찾아보고 동적 표현이 가지는 의미를 논의한다. 여기서 포물선을 택한 이유는 이차함수의 그래프로 비교적 일찍 학교수학에 도입되며 이후 자주 등장하는 곡선이면서 자유낙하운동과 같은 역학적 현상과 연결되는 곡선이기 때문이다.

2. 이론적 배경과 마이크로월드

구성주의에서 지식은 한 쪽에서 다른 쪽으로 일방적으로 전달되는 상품과 같은 것이 아니라 학습자에 의해 적극적으로 재구성되는 경험이다. Ackermann(2004)은 이런 구성주의자들의 관점을 다시 Piaget, Papert, Vygotsky식으로 구별하고 있다. 먼저 Piaget는 합리주의자로 인간의 인지 발달 과정을 규명하려고 노력하면서 가르치는 행위는 반드시 간접적이며, 지식과 정보는 다르며, 아동의 심리적 저항을 무시하는 교육이론은 실패한다고 주장하였다. 이러한 그의 주장은 구성주의자들의 기본 가정이 되었다. 그러나 서로 다른 발달 단계 아동들의 공통적 특징을 설명하려던 Piaget는 개인적 선호도나 문맥, 도구의 역할에 크게 주목하지 않았다. 이에 비해 실제적인 지식 구성을 강조한 직관주의자인 Papert는 지식의 구성에서 '도구(media)'의 역할을 중요시 여겼으며, 사회-문화주의자인 Vygotsky는 개인을 포함하는 '사회(others)'의 역할을 중요하게 생각했다(Ackermann, 2004).

지식의 구성에서 도구의 역할을 강조하여 '물리적 구성을 통한 정신적 구성'을 주장한 Papert 이론을 구성주의(constructivism)와 구별하여 constructionism이라고 한다.[2] Papert는 물리적 구성을 강조하고 실제 물리적 구성이 일어날 수 있는 바람직한 환경을 설계하고 이를 통해 지식이라는 정신적 구성을 실현하려고 노력했다. 이런 점에서 constructionism은 Piaget식의 구성주의를 실천하기 위한 구체적 방법론으로 볼 수 있다.

수학교육 분야에서 constructionism 관점으로 수학교육을 위한 컴퓨터 환경을 설계하고 구현하는 연구 분야가 '컴퓨터와 수학교육'(조한혁 2003; 김화경, 2006)이다. 이는 교수보다는 학습을 강조하는 구성주의자의 입장에서 물리적 구성을 강조하는 constructionism 관점을 더해 '컴퓨터와 함께 수학 학습'을 지향한다. 미리 정해진 학습 내용 수학의 효율적 교수를 위한 컴퓨터 환경보다, 컴퓨터와 함께 무언가 실제적인 것을 만들면서 지식을 구성할 수 있는 환경을 설계하고 구현하는 것을 목적으로 한다. 이는 지식을 '명제적 지식(know that)'과 '절차적 지식(know how)'으로 구별하는 것을 넘어 도구와 함께하는 지식이라는 'know-with'를 구별하고 강조한다. 이는 Borba 과 Villarreal(2004)의 'humans-with-media'와 맥이 닿아 있으면서 수학교육에 초점을 맞춘 것으로 이해될 수 있다.

'컴퓨터와 수학교육'이 이루어지는 환경, 수학교육의 constructionism 구현을 위해 설계된 환경을 우리는 '마이크로월드(microworld)'라고 부른다. 초기에 마이크로월드라는 개념은 실제 실험이 어려울 때, 가상 실험을 하기 위한 컴퓨터 환경이라는 의미로 사용되었다. 이후 마이크로월드는 수학 실험을 위한 공간인 동시에 '강력한 아이디어(Papert, 1980)'가 내재하는 컴퓨터 환경이라는 의미로 바뀌었다. 즉, 마이크로월드는 '직접적'으로 수학을 가르치려는 목적에서 설계된 환경이 아니며, 오히려 수학적 원리를 가지고 '기본 명령'이라는 구조를 설계한 환경이다. 학습자는 마이크로월드에서 할 수 있는 것과 없는 것을 알게 되며 그 한계를 테스트한다. 그리고 할 수 있는 것을 조합하여 무언가를 만들고 그 활동을 통해 지식을 구성하게 된다. 따라서 마이크로월드를 설계할 때 가장 중요한 것은 적절한 '기본 명령'을 정하는 일이다. 바람직한 마이크로월드는 간단한 '기본 명령'로부터 아주 많은 것을 만들 수 있는 환경이다(Resnick 과 Silverman, 2006).

지금까지 성공적이었던 대표적 마이크로월드는

2) Papert(1980)는 교수주의(instructionism)에 대비되는 용어로 constructionism이란 용어를 사용한다. 여기서 물리적 구성은 컴퓨터에 존재하는 가상적 대상물이나 시, 로봇 등의 구성을 모두 포함한다.

LOGO과 DGS가 있다. 이 두 마이크로월드는 모두 평면 기하 현상을 구성하고 조작하는 수학 실험 컴퓨터 환경이지만, LOGO는 '구성'을 DGS는 '조작'을 보다 강조하는 환경이다. LOGO는 순간적·국소적 거북 행동을 만드는 환경인 데 비해 DGS는 점들 사이의 관계 보존 환경이다(김화경, 2006). 예를 들어 LOGO에는 '가자', '돌자'라는 기본 명령이 있고, 학습자는 이 기본 명령들을 이용해 거북이의 행동을 만들고, 그 행동을 합성하여 '별' 자취를 만든다. 이에 비해 DGS에서 학습자는 한 원위에 존재하는 일정한 간격의 다섯 개 점들을 특정 관계로 서로 연결하여 '별'을 만든다. '별을 만든다'는 사실은 같지만 구성 방식은 '행동'과 '관계'로 차이가 있다. LOGO와 DGS는 각각 행동이라는 동적인 표현과 관계라는 정적인 표현을 위한 환경이다.

Sherin(2002)은 LOGO의 관점에서 새로운 DGS를 설계하여 두 환경을 통합하려고 하였다. 또한 김화경(2006)은 JavaMAL(http:www.javamath.com)이라는 인터넷 기반의 애플릿을 통해 두 환경을 통합하려는 시도와 그 특징을 살펴보고 있다. JavaMAL 환경은 LOGO와 DGS의 단순한 통합 환경이 아니라 서로의 명령 체계에 영향을 받는 유기적 통합 환경이다. 또한 LOGO의 행동 명령을 행동 문자로 다시 표현할 수 있는 환경이며, 행동 문자의 조작을 통해 재귀적 패턴을 만들 수 있는 표현의 수준 상승 환경이다. 나아가 JavaMAL 환경은 점들 사이의 관계를 기하적, 대수적 방식으로 부여할 수 있는 환경이다(김화경, 2006). 행동 문자와 더불어 Cho et al.(2007)과 김화경·송민호(2007)는 '가자', '돌자'의 거북 행동을 벡터 관점에서 이해하여 새로운 '기본 명령'인 행동 벡터 명령 'move'를 제안하고 있다. 그리고 이 명령을 이용한 함수의 그래프에 관한 질적 접근 사례를 살펴보았다. 이 때, 'move a, b'라는 명령은 거북이를 가로축으로 a만큼, 세로축으로 b만큼 움직이는 명령이다. 즉 'move a, b'는 벡터 (a, b)를 거북 행동으로 표현한 것이다. 김화경·송민호(2007)는 'move'와 함께 거북 머리 방향을 'move a, b' 방향으로 바꾸는 명령 'head a, b'의 필요성도 살펴보고 있다.

3. 포물선

역사적으로 포물선은 그리스 시대에 원뿔곡선을 연구한 Menaechmus에 의해 처음으로 연구가 이루어졌다. Menaechmus는 그리스 시대의 3대 작도불가능 문제 중 '배적 문제'를 해결하기 위해 두 포물선의 교점을 이용했다(Burton, 2007). 또한 Archimedes는 소진법(method of exhaustion)을 이용하여 포물선으로 둘러싸인 부분의 넓이와 Archimedes 삼각형의 넓이 사이의 비를 찾았다.[3] 그러나 그리스 시대의 포물선은 초점과 준선 사이의 관계로 정의되지는 않았고, 초점과 준선의 개념을 처음으로 도입한 것은 Kepler이다. Kepler는 행성의 운동을 연구하면서 운동의 자취인 원뿔곡선을 초점과 준선의 관계로 정의하였다. 또한 Galilei는 자유낙하운동에서 시간에 따른 낙하 거리를 이차함수식으로 표현하였다(Stillwell, 2001). 역학 관점에서 포물선은 일정한 중력 가속도 상황에서 쏘아올린 공의 자취에 해당한다. 원뿔곡선은 포물선의 정적 표현이고, 운동 자취는 포물선의 동적 표현이라 볼 수 있다.

김남희 외(2006)는 함수의 역사적 발달 단계를 나누면서 기하적 함수 단계와 대수적 함수 단계를 구별하고 있다. 이는 함수를 운동 곡선과 연관하여 생각하던 기하적 함수 단계와 대수식을 중요하게 여기는 대수적 함수 단계의 구별을 말한다. 초기의 연구자들은 함수에서 연속성이 중요하다는 생각했고 연속성은 다시 운동으로 회귀하여 정의할 수밖에 없었다(Stillwell, 2001). 즉 정적 관계식보다는 동적인 운동이 역사적으로 먼저 나왔다. Dennis(1995)는 역사적으로 방정식이 곡선을 만드는 것이 아니라 곡선으로부터 방정식이 나왔다고 보고 곡선의 방정식보다 곡선을 만드는 도구가 가지는 교육적 의미를 논의하였다.

본 연구에서는 먼저 포물선의 동적 표현이 교육과정에서 어떻게 다루어지는 지 살펴보기 위해 포물선을 다루는 중학교 수학 9-가, 수학 II 교과서와 중학교 과학 교과서를 분석한다. 다음으로 현행 교육과정에서 부족한 부분을 마이크로월드로 보완하는 방법에 대해 논의한다.

---

3) Archimedes는 포물선의 넓이를 소진법으로 구했다(Stillwell, 2001). 반면 Osler(2006)는 역학적 관점에서 벡터를 이용하여 Archimedes 방법을 재해석하고 있다.

(1) 교육과정

7차 교육과정에서 포물선은 '9-가' 단계에서 이차함수의 그래프로 가장 먼저 도입된다(교육부, 1999). 이러한 도입은 개정되는 교육과정, 교과서에서도 큰 변화가 없을 것으로 예상된다. 개정된 교육과정에서도 중학교 3학년의 '함수' 영역에서 이차함수의 그래프로 '포물선'이라는 용어가 처음 도입될 예정이기 때문이다. 실제 7차 교육과정의 몇몇 수학 교과서에서 포물선은 정의하는 방식은 다음과 같다.

> '이차함수 $y = ax^2$의 그래프와 같은 모양의 곡선을 **포물선**이라고 한다.' (강옥기 외, 2003)
> '이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프와 같은 곡선을 **포물선**이라 한다.' (박윤범 외, 2003)
> '이차함수 $y = x^2$의 그래프와 같은 곡선을 **포물선**이라 한다.' (강행고 외, 2003)

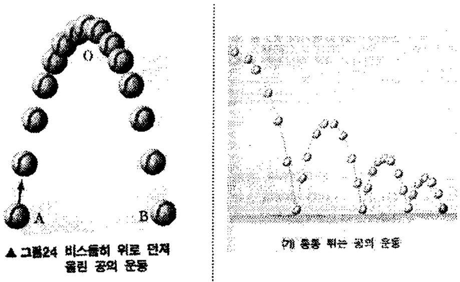
위의 정의가 타당한가? 위의 포물선 정의에서 이차함수의 그래프를 회전이동한 곡선 또는 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프는 포물선인가? 모든 포물선은 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 같은 모양인가?

주어진 곡선이 포물선인지 아닌 지를 판단하는 기준으로서, 포물선의 정적인 정의로서 위의 정의들은 충분히 타당하다. 물론 '같은 곡선' 또는 '같은 모양의 곡선'이라는 일상적 표현이 수학적으로 다소 모호하기는 하지만 변환의 관점에서 '같은 곡선'이나 '같은 모양의 곡선'이란 표현을 '서로 닮음 관계인 곡선'으로 이해한다면 위의 정의들은 모두 적절하다. 특히 포물선을 '이차함수 $y=x^2$의 그래프와 같은 곡선'으로 정의하더라도 본질적으로 모든 포물선은 닮았으므로 이는 적절한 정의이다.[4]

중학교에서 포물선이 도입된 이후 수학 Ⅱ에는 초점과 준선을 이용해 이차곡선으로 포물선을 아래와 같이 다시 정의한다.[5] 타원과 쌍곡선도 수학 Ⅱ에서 조건을 만족하는 점의 자취나 점들의 집합으로 정의된다.

> '평면 위에서 한 정직선 l과 그 위에 있지 않은 한 점 F에 이르는 거리가 같은 점의 자취를 **포물선**이라 한다.' (우정호 외, 2003)
> '평면 위에 한 정점 F와 그 점을 지나지 않는 정직선 l이 있을 때, 점 F와 직선 l에 이르는 거리가 같은 점들의 집합을 **포물선**이라고 한다.' (임재훈 외, 2003)

포물선이 타원이나 쌍곡선보다 먼저 중학교에서 도입되는 이유를 미루어 짐작하면 이차함수의 그래프를 곡선으로 이름 붙이기 위한 이유와 함께 포물선 운동이 소개되는 중학교 과학과 적절히 연계시키기 위함이었을 것으로 추측된다.[6] 예를 들어 이성묵 외(2003)은 <그림 1> 같은 자유낙하운동이 소개하고 있다. Galilei가 밝혔듯이 자유낙하운동에서 물체의 높이는 시간에 관한 이차함수이며, 던진 공이 그리는 자취는 포물선을 이룬다.[7]



<그림 1>중학교 과학 3 교과서

종이라는 도구를 이용하는 교과서의 표현 방식의 한계로 시간에 따른 공의 위치를 하나의 그림으로 나타냈지만, 여기서 시간에 따른 공의 자취는 포물선 운동을

4) 이차함수 $y=ax^2$의 그래프에서 양변에 $a(a \neq 0)$을 곱하면

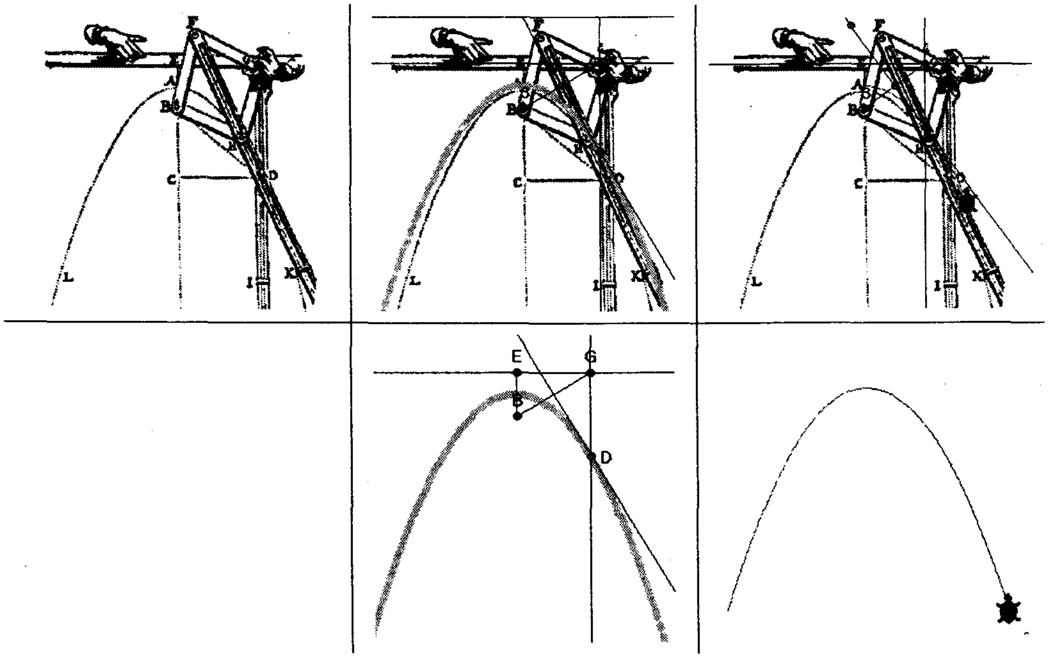
$$y=ax^2$$
$$ay=a^2x^2$$
$$ay=(ax)^2$$

이므로 이차함수 $y=ax^2$의 그래프의 그래프는 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 닮았음을 알 수 있다. a의 값에 따라 포물선의 모양이 달라지는 것은 아니다. 모든 포물선은 확대 혹은 축소를 통해 합동이 될 수 있다.

5) 조건을 만족하는 '점의 자취'의 정의가 '점들의 집합'이라는 정의보다는 동적 표현으로 볼 수 있다.

6) 수학 교과서와 과학 교과서의 공통 용어에 관하여는 이형주(2006)에 자세히 연구되어 있다.

7) 이성묵 외(2002)에서와 같이 중학교 2학년에서 포물선 운동이 처음 그림으로 등장하고, 역학적 에너지와 관계하여 중학년 3학년 과정에 보다 많은 포물선 운동이 등장한다.



<그림 2> 포물선 만들기

나타낸다. 일정한 간격의 시간과 그 때의 위치를 표시했다면 그림에서 각 공의 x축 방향 위치 변화율은 일정해야 한다. 이 표현은 시간이라는 매개변수가 개입되었다는 측면에서 포물선 운동의 동적 표현이다. 이에 비해 수학교과서 9-가에 제시된 것과 같이 이차함수의 그래프로 포물선을 정의하는 것은 식이 먼저 있고 점들의 집합으로 포물선을 나타낸 정적 표현이다.

만약 포물선을 동적으로 표현하고 정적인 표현을 동적 표현으로 번역하여 나타낼 수 있는 환경이 있다면 보다 포물선을 깊이 이해할 수 있을 것이다. 그 방법을 모색해 보자.

(2) 관계와 행동으로 포물선 표현하기

남호영 외(2001)는 포물선을 만드는 여러 가지가 방법을 소개하고 있다. 마찬가지로 Dennis(1995)는 역사적 맥락에서 이차곡선을 그리는 도구를 살펴보면서 그 교육적 의미를 논의하고 있다. <그림 2>의 왼쪽 그림은 Descartes의 업적에 대한 자세한 설명으로 유명한 Schooten(1615~1660) 업적에 나오는 포물선을 그리는 도구이다[8](Dennis, 1995). 그림에서 직선 GE는 포물선의 준선이며, 점 B는 초점이다. 점 G가 준선 위에서 움직이면 점 D의 자취는 포물선이 된다.

<그림 2>의 가운데 두 그림은 이 사진을 컴퓨터 마이크로월드로 불러온 그림이다. 그리고 DGS 도구들을 이용하여 사진을 재구성한 그림이다. 먼저 초점과 준선에 해당하는 점과 선을 사진 위에 만들고, 포물선을 그리는 도구에서 점 D가 만들어지는 방법을 DGS로 재구성한 것이다. 즉, 그림에서 점 G를 마우스로 끌면 점 D의 자취는 포물선이다. 이 구성 방법은 본질적으로 초점과 준선을 통한 포물선의 정의와 같다. 점 D는 '선분 BG의 수직이등분선'과 '준선에 수직이면서 점 G를 지나는 직선'의 교점이므로 $\overline{BD}=\overline{DG}$이다. 즉, 점 D는 초점과 준선으로부터 거리가 같은 점이 되고 그 자취는 포물선이 된다.

<그림 2>의 오른쪽 그림은 DGS로 만들어진 그림에

8) Dennis(1995)는 포물선과 타원, 쌍곡선 등의 곡선을 그리는 역사적 도구들을 자세히 설명하고 있다.

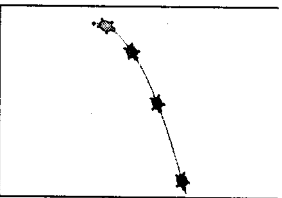
서 직선 DF가 포물선의 접선임을 인식하고 직선 DF의 기울기를 순간적인 거북 행동으로 나타낸 그림이다. 직선 DF는 선분 GB의 수직이등분선이므로 선분 EG의 길이를 x, 선분 AB의 길이를 p라고 하면 직선 GB의 기울기는 $\frac{2p}{x}$이고, 접선 DF의 기울기는 $-\frac{x}{2p}$임을 알 수 있다. 이를 이용하면 포물선 행동을 나타내는 다음 거북 행동을 얻을 수 있다.[9]

move 1, $-\frac{0}{2p}$; move 1, $-\frac{1}{2p}$; move 1, $-\frac{2}{2p}$;…;

거북 행동이라는 동적 표현으로 곡선을 나타내는 것은 곡선의 접선과 관계된다. 즉, 행동 벡터 'move' 명령은 접선의 기울기와 밀접한 관련이 있다.

<그림 2>는 현실적 문맥에 존재하는 포물선 운동을 사진을 이용해 마이크로월드라는 가상 세계로 가져와 DGS 도구를 이용해 탐구하고, 이를 다시 거북 행동으로 번역하여 현실적 문맥에서의 운동, 행동을 재현하는 과정이다. 즉, 거북 행동 표현은 주어진 포물선의 동적 표현이다. <그림 3>은 행동 표현만을 자세히 나타낸 것이다.

for x=0 to ∞[10]
head 1, $-\frac{x}{2p}$;
move 1, $-\frac{x}{2p}$;
next



<그림 3> 포물선 행동 표현

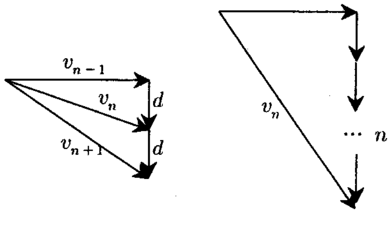
9) 기울기는 삼각형의 닮음비를 이용한 것으로 볼 수 있다. 곡선의 방정식을 이용해 거북 행동을 만드는 방법도 있다. 만약 포물선이 이차함수 $y=ax^2$의 그래프라고 하면, 미분계수 $y'=2ax$를 이용해 거북 행동을 만들 수 있다. <그림 2>의 예에서는 초점 거리를 찾고 포물선의 방정식 $x^2=-4py$에서 $y'=-\frac{1}{2p}x$을 이용하면, 'move 1, $-\frac{0}{2p}$; move 1, $-\frac{1}{2p}$; move 1, $-\frac{2}{2p}$; …; '라는 거북 행동을 얻을 수 있다. 이 표현이 x축 방향 변화량을 1로 고정하고 y축 방향 변화량을 변화하면서 포물선 행동을 만들어내는 것이므로, 엄밀한 의미에서 순간변화율은 아니고 평균변화율이다. 그러나 평균값의 정리와 포물선의 특징을 생각한다면 이러한 거북 행동이 본래의 포물선 운동과 다르지 않음을 알 수 있다.

(3) 포물선 행동 표현과 재귀적 패턴

행동 표현은 다시 시간에 따른 재귀적 패턴으로 이해될 수 있다. <그림 3>의 왼쪽 명령에서 $p=10$이라고 하면 n단계 명령은 'head 1, $-\frac{n}{20}$; move 1, $-\frac{n}{20}$'이다. 이 명령으로 n단계 거북 행동을 위치 벡터(v_n)로 나타내면 다음과 같다.

$$v_n=\left(1,-\frac{n}{20}\right)$$

즉, <그림 3>의 오른쪽 포물선 운동은 v_n의 합, $\sum_{n=0}^{\infty}v_n$으로 볼 수 있다. 여기서 벡터의 끝점들을 차례로 연결하면 포물선을 얻을 수 있다. 이 때, 모든 n에 대하여 벡터 v_n의 시점을 한 곳으로 모으면 <그림 4>와 같이 모든 벡터의 끝점이 일직선에 위치하게 된다.[11] 즉, 모든 n에 대하여 $v_n-v_{n-1}=\left(1,-\frac{1}{20}\right)=d$로 일정하다. 벡터열 $\{v_n\}$은 인접한 두 항의 차가 벡터 d로 일정한 일종의 등차열인 셈이다.[12] 따라서 <그림 4>의 오른쪽 그림과 같이 n단계 벡터 $v_n=v_0+nd$가 성립한다.



<그림 4> 포물선 행동 표현의 재귀적 관계

10) 이 명령은 x에 0, 1, 2, … 를 순서대로 대입하면서 실행하라는 뜻이다. 실제 컴퓨터에서 ∞는 가능하지 않고 유한값까지만 실행하게 된다.

11) 접선 벡터를 한 점에 모아서 그 종점을 연결한 그래프를 호도그래프(hodograph)라고 한다. 이 예에서 알 수 있듯 포물선의 호도그래프는 직선이다. 또한 타원의 호도그래프는 시점이 중심이 아닌 원이다.

12) 일반적으로 등차수열은 실수에서 정의되지만 자연수에서 평면 벡터로 가는 함수로 벡터열을 $\{v_n\}$을 생각하고 포물선의 행동 벡터로 벡터열을 만들면 이웃한 항 사이의 차이가 항상 일정한 벡터 d인 '등차열'이 된다.

인접한 두 항 사이의 관계로 v_n을 이해하고 시간에 따라 그려지는 곡선을 $\{v_n\}$의 부분합으로 이해하는 것은 포물선 행동을 '재귀적 패턴'으로 이해하는 것이다. 김화경(2006)은 재귀적 패턴을 만들고 조작할 수 있는 환경으로 '행동 문자'를 말하고 있다. 이는 거북 행동(가자, 돌자)을 '문자(f, >, <)'로 나타내고 '문자 되쓰기' 즉 '대입'을 통해 재귀적 패턴을 만들고 조작하는 환경을 말한다. 이는 거북의 수준 상승 환경이다. LOGO에서 '가자 50; 돌자 90'과 같이 구체적 수와 연결되어야만 표현되던 거북 행동을 이 환경에서는 행동 문자만으로 나타낼 수 있고, 대입이라는 문자 조작을 통해 프렉탈과 같은 복잡한 그림열을 만들 수 있다.

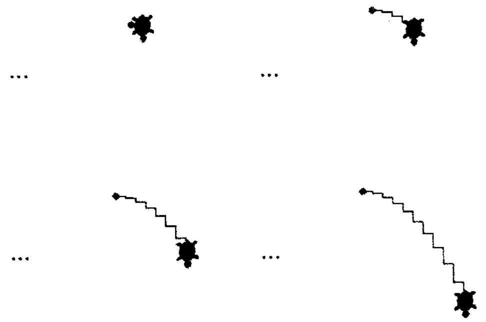
<표 1> L-system 행동 문자 명령

명령	의미
f	일정한 거리를 선을 그으면서 앞으로 가기
<, >	기본각도만큼 반시계방향, 시계방향으로 돌기

<표 1>은 행동 문자와 그 의미이다. 생물의 성장을 위해 도입된 L-system 명령 체계를 LOGO로 나타내는 명령이다. 행동 문자 환경은 LOGO와 DGS가 통합된 JavaMAL에 다시 통합되어 구현되어 있다.

이제 행동 문자를 이용해 포물선을 만들어 보자. 먼저 초기값에 해당하는 v_0를 지정하고, 공차에 해당하는 d(거북명령 f)를 정하고 문자 되쓰기 규칙이 적용되도록 각 단계의 거북 행동 명령을 만들어줄 수 있다. 또한 전체 포물선 행동 표현은 n항까지의 부분합으로 나타낼 수 있다. 이런 절차를 거쳐 명령을 만들고 단계별로 실행하면 <그림 5>와 같은 포물선 행동 표현을 얻을 수 있다.

a='<fff>'; v='vf'; S='sav'
do_3 S



<그림 5> L-system으로 포물선 그리기

<그림 5>에서 a가 초기값 v_0에 해당하고, av가 각 단계에서의 벡터 $v_n = v_{n-1} + d$에 해당하며, S가 부분합 $S_n = S_{n-1} + v_n$에 해당하고 포물선 운동을 나타낸다.[13] 재귀적 관계에서 포물선 운동은 초기값과 공차라는 두 가지 변수로 결정됨을 알 수 있다. 이를 역학 관점에서 보면 공차 d는 중력가속도($-g$)이며, 초기값은 공을 던지는 속도라고 볼 수 있다.[14]

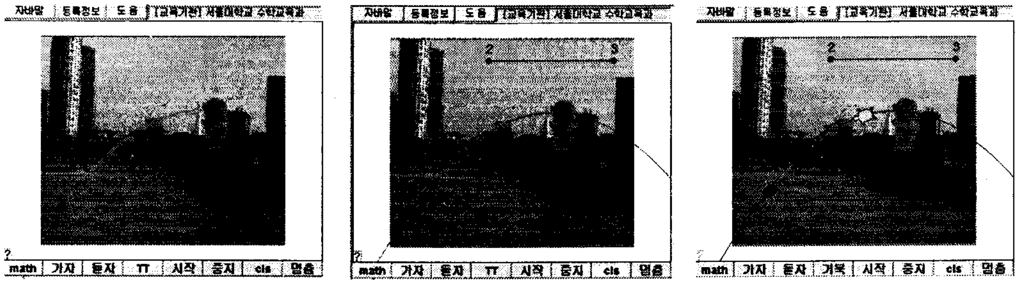
귀납적 패턴은 문제 해결을 위한 중요한 사고 패턴이다(우정호, 1998). 시간에 따른 포물선 행동을 귀납적 패턴으로 이해하는 위의 예는 귀납적 패턴의 유용성을 확인시켜준다. 포물선의 동적 표현은 곡선을 시간에 따른 귀납적 패턴으로 인식할 수 있는 기회를 준다.

4. 교육적 의미

우리는 초점과 준선을 이용한 포물선의 관계 표현(DGS)과 이차함수식에 의한 포물선의 표현을 거북 행동

13) n단계의 $v_n = v_0 + nd$에서 두 벡터 v_0와 nd가 순서대로 연결되어 직각으로 꺾인 모양이 나타나게 되지만 단계별 결과만을 고려하면 포물선 행동 표현으로 볼 수 있다.

14) 초기값이나 공차를 변화시켜 포물선 행동을 만드는 환경을 설계해 볼 수 있다. 만약 초기값을 고정시키면 공차 d의 방향과 포물선의 대칭축의 방향은 일치하게 된다. 즉, 아래쪽으로 공차가 향하는 경우는 포물선의 대칭축이 y축과 평행하지만 공차가 다른 방향이라면 그에 따라 포물선은 회전한 모양이 된다.



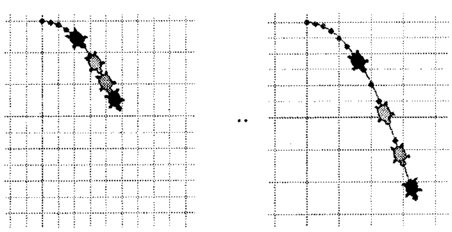
<그림 6> 분수에서 떨어지는 거북이

표현으로 번역하는 과정에 대해 살펴보았다. 이차함수의 식은 포물선의 '기호적 표현'이며 그 그래프는 포물선의 '영상적 표현'이다. 이에 비해 DGS로 포물선을 그리는 과정이나 거북 행동 표현은 포물선의 '행동적 표현'으로 볼 수 있다. 마이크로월드는 포물선의 기호적, 영상적 표현과 더불어 행동적 표현이 가능하며, 이들 사이의 번역이 가능한 표현 체계로 의미를 갖는다..

또한 거북 행동 표현은 자유낙하운동과 같은 역학적 운동을 마이크로월드에 구현하기에 적당한 표현이다. 예를 들어 포물선 운동을 하는 거북이, 농구공, 메뚜기 등을 만들 수 있다. 김화경(2006)은 마이크로월드에서 자신을 표현할 수 있는 능력이라는 개념의 '컴퓨터 유창성'의 중요성을 말하고 있다. 즉, 마이크로월드의 기본 명령으로 '타일(tile)'을 만들고 만들어진 타일을 움직여 자신만의 작품을 만드는 과정을 통해 constructionism의 학습 원리인 'learning by making' 나아가 'learning by designing'을 실현할 수 있다는 것이다. 만약 자신이 만드는 타일의 포물선 운동을 만든다면 이는 '컴퓨터와 수학교육'의 실현이다. 예를 들어 메뚜기 타일을 만들고 메뚜기를 포물선 행동으로 구현하는 활동을 통해 포물선이라는 곡선을 보다 더 깊이 이해할 수 있다.

생활 주변에서 벌어지는 포물선 운동의 예를 사진으로 저장하고 이를 마이크로월드 가상 세계로 불러와 DGS 도구를 이용해 탐구하고, 다시 동적 표현으로 번역하는 활동은 역학적 상황의 수학적 분석과 재현이라는 의미와 더불어 학습의 시작이 현실적인 문맥에서 이루어지는 기회가 될 것이다. 예를 들어 <그림 6>은 물이 나오는 분수 사진을 마이크로월드 가상 세계로 가져오고 이를 DGS 도구로 탐구하고, 타일로 그 운동으로 똑같이 재현한 동영상이다. 분수에서 물이 아니라 거북이가 나온다. 다른 예로 Cho et al.(2007)은 자신 만의 곡선과 동영상을 만드는 예로 불꽃놀이를 구성하였다. 이는 포물선이라는 지식을 이용하여 자신만의 곡선을 구성한다는 점에서 '자신이 원하는 그림을 그리기 위해 수학을 사용하는 경험이 가능한 환경'이라는 Papert의 LOGO 개발 원칙과 부합한다. 학습 대상인 포물선이 아니라 원하는 동영상을 만들기 위해 포물선 운동을 이해하고 수단으로 사용하는 것이다.

다음으로 교육과정에서 정적인 관계로 도입되는 포물선을 동적으로 번역하는 활동은 포물선의 성질에 대해 다시 생각하는 기회가 되기도 한다. 포물선을 행동 표현으로 나타내면 같은 자취의 포물선이라도 시간에 따라 다른 운동을 하게 된다. 이 때, 동적 표현으로는 다르더라도 변하지 않는 포물선의 성질, 곡선의 기하학적 성질이 있다. 여기서 곡선의 기하학적 성질이란 매개화의 방법이 달라지더라도 변하지 않는 성질을 뜻한다(김홍종, 2004). 대표적인 곡선의 기하학적 성질은 곡선의 길이와 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이이다.



<그림 7> 포물선의 여러 가지 행동 표현

<그림 7>은 같은 포물선 자취를 서로 다른 행동 표현으로 나타냈을 때의 그림이다. 이 때, 주어진 시간에 거북이가 움직인 거리는 그 구간에서 포물선의 길이이다. 곡선 $y=f(x)$의 거북 행동 표현은 'head 1, $f'(x)$; move 1, $f'(x)$'의 부분합 나타낼 수 있으므로 이 명령을 본래의 거북 행동 명령인 '가자(fd)'로 바꾸면 'head 1, $f'(x)$; 가자 $\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}$'이 된다. 이 때, 거북이가 움직인 거리가 가자값은 $\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}$이고 특정 구간에서 움직인 거리는 이들의 부분합으로 볼 수 있다. 이를 극한과 연결하여 생각하면 곡선의 길이를 구하는 적분 공식을 거북 문맥에서 직관적으로 이해할 수 도 있다.

5. 맺으며

곡선은 동적인 운동 개념과 정적인 관계 개념이 복합된 사고 대상이다. 그러나 학교수학에서는 포물선을 이차함수의 대수식을 만족하는 점들의 집합이라는 정적인 표현만을 다루며, 동적인 표현을 제대로 다루지 못하고 있다. 우리는 학교수학의 포물선을 동적 포물선 행동으로 표현할 수 있는 환경을 고찰하였다.

먼저 수학과 교육과정을 분석하여 포물선을 도입하는 방식을 9-가 단계와 수학 II에서 확인하였다. 이를 통해 이차함수의 그래프라는 정적 표현으로 도입되는 포물선은 이후 초점과 준선의 관계를 통해 다른 이차곡선과 함께 정의됨을 확인할 수 있었다. 또한 학교수학에서 다루는 포물선의 표현은 정적인 관계만을 나타내고 있어 동적인 표현이 가능한 환경의 필요성을 제기하였다. 그리고 동적 표현을 도입하는 컴퓨터 마이크로월드 환경에서 곡선을 그리는 물리적 도구와 DGS 관계 표현을 이용하여 포물선을 만들어 보았다. 또한 이 DGS 관계 표현을 거북 행동으로 번역하는 방법을 살펴보았다.

'컴퓨터와 수학교육'은 미리 정해진 수학 내용을 효과적으로 가르치기 위해 컴퓨터를 이용하는 것이 아니라 '컴퓨터'라는 사고 도구를 이용해 무언가를 만들 때 수학을 사용하고 이 과정에서 교육이 일어나는 환경에 대해 연구하는 분야이다. LOGO에서 학생들은 미리 정해진 수학을 배우는 것이 아니라 원하는 그림을 그리기 위해 수학을 사용한다. 별을 그리기 위해 도는 각도를 알아야 하고, 각도를 알려면 수학을 이용해야 한다. 마찬가지로 불꽃놀이를 만들려면 포물선이라는 곡선을 행동 벡터로 이해해야 한다. 포물선 행동으로 불꽃놀이를 만드는 과정을 통해 현실적 맥락에서 포물선을 이해할 수 있으며 시간에 따른 포물선 행동을 재귀적 패턴으로 이해할 수도 있다. 그리고 정적 표현으로는 같은 것을 행동 표현에서는 서로 다를 수 있다는 점을 이해하고 이들의 공통점으로 곡선의 기하학적 성질을 이해할 수 있는 기회를 제공한다.

이 글은 학교수학에 동적 표현이 부족하다는 논의에서 시작하여 동적 표현을 만들고 조작할 수 있는 마이크로월드 환경에서 포물선을 중심으로 논의하였다. 그러나 함수 개념의 역사적 발달 순서나 그에 따른 '곡선에 관한 질적 접근(Cho et al, 2007)'의 전개와 순서가 일치하지는 않는다. 함수 개념의 역사적 발달 순서를 고려한다면 동적인 행동 표현이 정적 관계 표현이나 식보다 우선해야 할 것이다. 이런 관점에서 Cho et al.(2007)은 흐르는 강물 위에서 헤엄치는 '거북 은유'를 통해 곡선에 대한 질적 접근을 시도하고 있다. 이에 비해 이 글은 현재 교육과정에 부분적으로 동적 행동 표현을 도입할 수 있는 실제적 적용 방법을 구안하고 있을 뿐이라는 한계가 있다.

참 고 문 헌

강옥기 · 정순영 · 이환철 (2003). 중학교 수학 9-가. 서울: (주)두산.

강행고 · 이화영 · 박진석 · 이용완 · 한경연 · 이준홍 · 이혜련 · 송미현 · 박정숙 (2003). 중학교 수학 9-가. 서울: (주)중앙교육진흥연구소.

교육부 (1999). 중학교 교육 과정 해설(III). 서울: 대한교과서(주).

교육인적자원부 (2001). 수학 3-나. 서울: 대한교과서(주).

김남희 · 나귀수 · 박경미 · 이경화 · 정영옥 · 홍진곤 (2006). 수학교육과정과 교재연구. 서울: 경문사.

김홍종 (2004). 미적분학 1. 서울: 서울대학교 출판부.

김화경 (2006). '컴퓨터와 수학교육' 학습-지도 환경에 관한 연구. 서울대학교 대학원 교육학 박사학위 논문.

김화경 · 송민호 (2007). LOGO와 DGS 매개 모델과 오류 사례. 수학교육학연구 **17(2),** pp.111-125, 서울: 대한수학교육학회.

남호영 · 정춘희 · 김세식 · 원유미 (2001). 원뿔에서 태어난 이차곡선. 서울: 수학사랑.

박윤범 · 박혜숙 · 권혁천 · 육인선 (2003). 중학교 수학 9-가. 서울: 대한교과서(주).

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교 출판부.

우정호 · 류희찬 · 문광호 · 송갑석 · 박선화 · 박경미 (2003). 수학 II. 서울: 대한교과서(주).

임재훈 · 이경화 · 김진호 · 윤오영 · 반용호 · 조동석 · 이희종 · 박수연 · 한명주 · 남승진 (2003). 수학 II. 서울: (주)두산.

이성묵 · 채광표 · 김기대 · 이문원 · 권석민 · 손영운 · 노태희 · 정지오 · 서인호 · 김영수 · 김윤택 · 이세영 (2002). 중학교 과학 2. 서울: (주)금성출판사.

이성묵 · 채광표 · 김기대 · 이문원 · 권석민 · 손영운 · 노태희 · 정지오 · 서인호 · 김영수 · 김윤택 · 이세영 (2003). 중학교 과학 3. 서울: (주)금성출판사.

이형주 (2006). 중학교 수학교과서와 과학교과서의 공통용어 비교 · 분석. 서울대학교대학원 교육학 석사학위논문.

조한혁 (2003). 컴퓨터와 수학교육. 수학교육 **42(2),** pp.177-192, 서울: 한국수학교육학회.

Abelson, H. & diSessa, A. (1980). *Turtle geometry.* Cambridge, MA: MIT Press.

Ackerman, E. K. (2004). Constructing knowledge and transforming the world. In M. Tokoro & L. Steels (Eds.), *A learning zone of one's own: Sharing representations and flow in collaborative learning environments*(pp.15-36). Amsterdam: IOS Press.

Borba, M. C. & Villarreal, M. E. (2004). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking.* NY: Springer.

Burton, D. M. (2007). *The history of mathematics: An introduction.* Singapore: McGraw-Hill.

Cho, H.,; Kim, H., & Song, M. (2007). Mediating model between LOGO and DGS for planar curves. *Proceeding of Psychology of Mathematics Education* **31**, Seoul.

Dennis, D. (1995). *Historical perspectives for the reform of mathematics curriculum: geometric curve drawing devices and their role in the transition to an algebraic description of functions.* Thesis of doctor of philosophy at the Cornell University.

Osler, T. J. (2006). Archimedes' quadrature of the parabola: A mechanical view. *College Mathematics Journal* **37(1),** pp.24-28.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: children, computers, and powerful ideas.* Cambridge, Massachusetts: Perseus Publishing.

Resnick, M. & Silverman, B. (2005). Some reflections on designing construction kits for kids. *Proceeding of interaction design and children conference,* Boulder, CO.

Sherin, B. (2002). Representing geometric constructions as programs: a brief exploration. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* **7(1),** pp.101-115.

Stillwell, J. (2001). *Mathematics and its history.* NY; Springer.

Dynamic Representations of Parabolas in a Microworld

Kim, Hwa Kyung
Dept. of Mathematics Education, Sangmyung University, Seoul 110-743, Korea
E-mail : indices@smu.ac.kr

In this paper, we discuss two representations of a curve. One is a static representation as set of points, the other is a dynamic representation using time parameter. And we suggest needs of designing a computer microword where we can represent a curve both statically and dynamically. We also emphasize the importance of translation activity from a static representation to a dynamic representation.

For this purpose, we first consider constructionism and 'computers and mathematics education' as a theoretical backgrounds. We focus the curve of a parabola in this paper since this is common in mathematics curriculum and is related to realistic situation such as throwing ball. And we survey the mathematics curriculum about parabola representation. And we introduce JavaMAL microworld that is integrated microworld between LOGO and DGS. In this microworld, we represent a parabola using a dynamic action, and connect this dynamic parabola action to recursive patterns. Finally, we remake a parabola for a realistic situation using this dynamic representation. And we discuss the educational meaning of dynamic representation and its computer microworld.

* ZDM Classification : U73
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C80
* Key Words : microworld, parabola, dynamic representation, computers and mathematics education, JavaMAL