韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2008. 02. 제 47권, 제 1호, 1-10

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
February. 2008, Vol. 47, No. 1, 1-10

원주율의 상수성과 아르키메데스의 계산법

최 영 기 (서울대학교)
홍 갑 주 (서울대학교 대학원)

I. 서 론

학교수학의 내용 중에는 수학적으로 깊은 의미를 가지고 있지만 교실수업에서는 오히려 자명한 것으로 취급되어 그 중요성이 간과되고 있는 것이 있다. 예를 들어, 최영기・홍갑주(2006)는 '$\frac{1}{2}$×밑변×높이'라는 익숙한 식을 통해 정의되는 삼각형의 넓이 공식이 가진 수학적 의미를 재고찰하여 그 공식이 유클리드 기하학의 고유한 성질, 그리고 합동불변성과 가법성이라는 넓이의 일반적인 성질을 내포하고 있음을 지적한 바 있다.

원주율도 이러한 측면을 가지고 있다. 원주율은 원의 둘레 혹은 넓이에 관계된 계산상의 필요 때문에 초등학교 교육과정에서부터 일찍 다루어진다. 이때 실험을 통한 직관적인 설명을 통해 그 값이 소개되는 것이 일반적이며, 학생들의 수학 지식의 성장에 맞추어진 더 이상의 논의나 탐구는 이후 교육과정에서 이루어지지 않는다. 그러나 원주율은 다음과 같은 점에서 교실수업에서 학생들과 함께 탐구해 볼 가치가 있는 주제이다.

우선, 원주율의 값이 3.14159… 라고 말할 때, 그 값은 상수라는 사실이 전제되어 있다. 지금 다루고 있는 공간의 수학적 구조와 관련하여 이 사실은 중요한 의미를 함축하고 있으며, 이는 직관적인 예를 통해 학생들에게도 설명될 수 있다. 또한 아르키메데스의 원주율 계산법에 대한 연구는 무리수와 제곱근의 계산을 배운 학생들에게 흥미로운 예를 통한 계산 연습의 기회를 제공하고, 수학에서의 알고리즘의 의미와 그 효율성에 대한 논의를 유도하며, 중학수준의 기하와 대수에 걸친 수학적 아이디어들이 조화롭게 결합되는 과정을 보여준다.

이러한 인식하에 본 연구에서는 원주율의 값이 상수라는 사실의 의미를 수학적으로 재음미하고, 원주율 값의 계산에 대한 아르키메데스의 연구를 분석하여 탐구주제로서 원주율의 교육적 가치를 드러내고자 한다. 이 연구는 아르키메데스의 탐구를 큰 주제로 하고 서울 시내 모 중학교 2, 3학년 자원자들을 대상으로 하는, 학년별 총 10회의 수업 중 1회분의 이론적 배경으로 연구되어 수업으로 시행되었다.[1)]

II. 원주율의 상수성

1. 유클리드 기하의 고유성질로서의 원주율

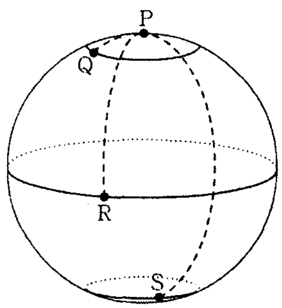
"원 둘레의 길이를 지름의 길이로 나눈 값"으로서 원주율을 정의할 때는 그 값이 반지름의 길이에 상관없이, 혹은 원의 위치에 상관없이 일정하다는 사실이 내포되어 있다. 그러나 이는 원의 정의 자체에는 포함되어 있지 않는 사실로서 어떤 암묵적인 가정을 전제하여 증명되는 것이다. 이 사실은 다음과 같은 직관적인 관찰을 통해 인식할 수 있다. 그림 1에서 단위구면상의 작은 길이 PQ를 반지름으로 하는 '원'에 대해서는 그 지름과 둘레의 길이 비가 평면에서의 원주율 값과 거의 일치할 것임

---

* 본 연구는 한국학술진흥재단 2006년도 고급지식확산지원사업과 한국과학재단 2007년도 과학고 R&E 프로그램의 지원에 의하여 연구되었음.
* 2007년 11월 투고, 2007년 11월 심사 완료
* ZDM분류 : G13
* MSC2000분류 : 97D30
* 주제어 : 원주율, 원주율의 상수성, 원주율의 계산, 유클리드 기하, 아르키메데스

1) 이 수업은 무게중심, 원주율, 원의 넓이, 구의 부피 등 학교수학의 내용과 관련된 아르키메데스의 연구를 학생들 수준에 맞게 재구성하여 지도함으로써 학생들에게 수학의 내용적 지식을 전달함과 더불어, 여러 수학적 아이디어들을 비교 감상하고, 증명의 논리적 기반을 신중하게 되짚어 보는 것과 같은 다양한 수학적 경험을 제공하는 것을 목표로 하고 있다.

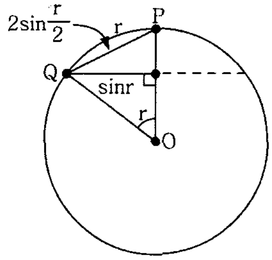
을 알 수 있다. 그러나 PR을 반지름으로 하는 원 즉, 그림 1의 구에서 '적도'에 해당하는 원에 대해서는 그 길이 비가 $2\pi/\pi=2$이다. 반지름이 PS와 같이 대원 둘레 길이의 절반에 가깝도록 길어지면 원의 둘레는 오히려 줄어들어 그 길이 비는 0에 가까워진다. 즉, 단위구면 위에서 원의 지름에 대한 둘레의 길이 비는 상수가 아니며, 반지름이 π에 가까워질수록 그 값은 0에 가까워진다.



<그림 1> 구면 위에서의 원주율의 변화

이 값을 실제로 계산해 보면 다음과 같다. 그림 2의 단위구 위에서 반지름 r인 원의 둘레는 $2\pi \sin r$이므로, 이때의 원주율은 $\frac{2\pi \sin r}{2r}=\pi\frac{\sin r}{r}<\pi$ 이다. r이 0에 수렴할 때 그 값은 평면에서의 원주율 값 π에 수렴하며, r이 커질수록 그 값은 줄어들어 $r=\pi$에서는 0이 된다.

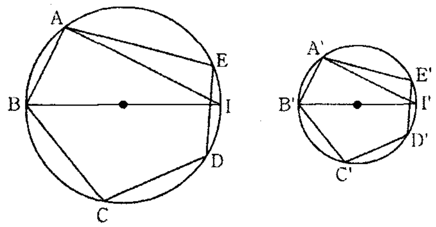
또한, 구 위에서는 원의 넓이와 그 반지름 제곱의 비 역시 상수가 아니다. 적분을 통해 단위구 위에서 반지름 r인 원의 넓이는 $4\pi \sin^2\frac{r}{2}$임을 알 수 있는데, 이는 아르키메데스가 그의 논문 《구와 원기둥》 I 권에서 증명한 사실이기도 하다. 그는 이 명제를 "구를 평면으로 절단하여 만들어진 조각의 넓이는 그 조각의 꼭지점에서 그 조각의 가장자리까지의 길이(그림 2에서 선분 PQ)를 반지름으로 하는 원의 넓이와 같다"라고 표현하였는데 (Dijksterhuis, 1987), 교육과정상 7-나에서 제시되는 바, 반지름 R인 구의 겉넓이가 $4\pi R^2$이라는 것은 이 명제에서 $r=2\pi$인 특수한 경우로 볼 수 있다. 그 조각의 넓이를 r^2으로 나눈 값, $\frac{4\pi \sin^2(r/2)}{r^2}$ 역시 r이 0에 수렴할 때 π에 수렴하지만, r이 커질수록 그 값은 줄어들어 $r=\pi$일 때는 $\frac{4}{\pi}$가 된다.



<그림 2> 단위구의 단면

이와 같은 고찰을 통하면, 원의 둘레와 그 지름의 비, 혹은 원의 넓이와 그 반지름 제곱(즉, 반지름을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이)의 비가 상수임을 보이는 증명 속에는 유클리드 기하의 특징적인 성질이 어디에선가 이용되고 있을 것임을 추측할 수 있다.

실제로, 원의 넓이에 대해 지금 언급한 사실을 증명하는 유클리드의 《원론》 XII권(Heath, 1956)의 명제 2를 살펴보자. 이 명제의 증명은 두 원 각각에 내접하는 닮은 도형의 넓이는 원의 지름의 제곱에 비례한다는, 같은 책의 명제 1에 의존하여 소진법의 논의를 통해 증명된다. 명제 1의 증명은 크게 두 부분으로 나누어지는데, 하나는 내접도형들의 대응하는 변의 길이 비가 원의 지름의 비와 일치한다는 것을 보이는 것이고, 다른 하나는 닮은 도형의 넓이 비는 대응하는 변의 길이 비의 제곱에 따른다는 것을 보이는 것이다.



<그림 3> 《원론》 XII권의 명제1

여기서 전자는 세 내각이 일치하는 삼각형은 대응하는 변의 길이 비가 같다는 VI권의 명제 4에 의존하는데, 이 증명은 평행사변형의 성질을 바탕으로 이루어진다. 후자는 닮은 삼각형의 넓이 비는 대응하는 변의 길이 비의 제곱의 따른다는 VI권의 명제 19에 의존하는데, 《원

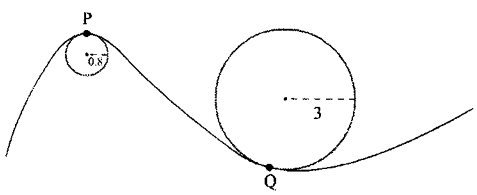
론》에서 삼각형의 넓이의 취급은 평행사변형의 존재성에 의존한다. 평행사변형의 존재성과 그 성질들은 평행선공준을 바탕으로 성립하는 것이므로, 결국 원주율의 상수성은 유클리드 기하의 고유한 성질임을 알 수 있다.

2. 공간의 내재적 성질로서의 원주율

앞서 살펴본 바와 같이 구면, 혹은 일반적인 곡면 위에서 원주율의 변화는 평면과는 다르다. 이를 거꾸로 해석하면, 원주율의 값이 상수가 아니라는 사실은 그 원이 놓여있는 곳이 평면이 아니라는 사실을 말해준다는 것이 된다. 즉, 원이라는 도형의 성질은 그 원이 놓여있는 공간의 성질을 반영한다. 이러한 사실은 수학적으로, 그리고 인식론적으로 중요한 함의를 가지고 있다.

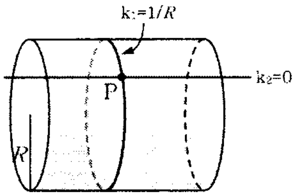
어떤 기하학적 대상의 성질은 외재적인 성질과 내재적인 성질로 분류할 수 있다. 기하학적 대상의 외재적인 성질이란 그것을 포함하는 더 큰 공간을 가정할 때, 그 공간에서 정의되는 개념을 통해 파악되는 성질이다. 반면, 내재적인 성질이란 더 큰 공간을 가정하지 않고, 그 대상 내부에서 정의되는 개념을 통해 파악되는 성질이다 (Weeks, 2002).

우리의 시각적 경험에 비추어 볼 때 곡면의 굽어진 정도 즉, 곡률은 그 곡면을 포함하는 3차원 공간에서 비로소 정의될 것으로 여겨진다. 실제로 그 방법을 살펴보자. 먼저 평면곡선 위의 한 점에서의 곡률을 곡선에 대한 그 점에서의 접촉원의 반지름의 역수로 정의한다(그림 4).



<그림 4> 주어진 평면곡선 위의 점 P에서의 곡률은 1/0.8, 점 Q에서의 곡률은 1/3이다.

이제, 곡면 위의 임의의 점 P에서의 법선을 포함하는 평면을 그 법선을 축으로 하여 1회전시키면 매 순간 그 절단으로서의 평면곡선이 결정되며, 따라서 그 곡선에 대한 점 P에서의 곡률을 생각할 수 있다. 그 중에서 최대값을 k_1, 최소값을 k_2라 할 때, 그 곱을 점 P에서의 곡률 혹은 가우스 곡률이라고 정의한다. 이 정의 하에 평면 위의 각 점에서의 곡률은 0, 반지름 R인 구의 각 점에서의 곡률은 $1/R^2$, 둥글게 구부러진 종이, 혹은 원통 위의 각 점에서의 곡률은 0이다(그림 5).[2] 곡률에 대한 지금의 정의는 접촉원 혹은 법선이 놓이는 외부의 공간을 가정하고 있다는 점에서 곡면에 외재하는 성질로서 곡률을 정의한 것이다.



<그림 5> 원통면 위의 각 점에서 가우스곡률은 $k_1 \cdot k_2 = (1/R) \cdot 0 = 0$ 이다.

반면, 원주율의 변화에 대한 앞의 관찰은 곡률이 곡면의 내재적인 성질로도 정의될 수 있을 것임을 시사한다. 원주율은 원이 놓인 곡면 안에서 측정될 수 있는 값이기 때문이다. 그 관찰을 좀 더 확장시키면, 작은 구일수록 원의 반지름이 커짐에 따라 원주율이 줄어드는 정도가 커진다는 사실을 알 수 있다.

실제로 곡률은 곡면의 내재적인 성질로서 정의될 수 있다. 1827년에 발간된 가우스의 책 《Disquistiones generales circa superficies curvas》에 제시된 중요한 착상은 곡면은 단지 그 내부에서의 호의 길이 측정에 의존하는, 내재적인 기하를 가진다는 것이다. 어떤 곡면(예컨대, 쌍곡평면)은 3차원 공간에 매장될 수 없음이 밝혀져 있다. 곡면에 내재하는 개념으로서의 곡률에 대한 가우스의 정의는 이러한 곡면을 이해하는 수학적 틀을 제공해 주었다(Greenberg, 1980). 특히, 가우스 곡률은 단지 원주율의 변화를 이용한 식으로 다음과 같이 표현할 수 있다. 즉, 점 P를 중심으로 하고 반지름 r인 원 둘레의 길이를 $l(r)$이라 할 때, P에서의 가우스 곡률은

---

2) 편평한 종이(가우스 곡률이 0)로 원통의 옆면(가우스 곡률이 0)을 감쌀 수는 있지만, 종이에 주름을 만들지 않는 한 공(가우스 곡률이 양수)을 둘러쌀 수는 없다는 것도 편평한 종이의 내적인 기하가 원통의 옆면과는 같지만 공과는 다르기 때문이라는 것으로 설명될 수 있다.

$$K=\lim_{r\to 0}\frac{3}{\pi}\frac{2\pi r-l(r)}{r^3}$$

이다(McCleary, 1994).[3] 원주율이 π로 일정하다면, 모든 r에 대해 $l(r)=2\pi r$이므로 $K=0$이 된다. 즉, 원주율의 값이 상수로 결정된다는 사실은 지금 다루고 있는 곡면은 그 곡률이 항등적으로 0인 공간 즉, 유클리드적인 공간임을 말해준다.

가우스의 착상이 가진 또 하나의 중요성은 인식론적인 것이다. 도형의 내재적인 성질에 대한 관찰은 인간이 자신이 사는 우주의 모양을 이해하고자 할 때 취할 수 있는 입장이다. 비유컨대, 자신이 붙어있는 구면이 우주의 전부인 가상의 2차원 생물체는 구면 '밖'에서 자신의 공간을 관찰할 수 없다. 그러나 구면에 다양한 반지름을 가진 여러 개의 원을 그려봄으로써 자신이 사는 공간의 모양을 수학적으로 연구할 수 있다. 우주의 모양을 이해하고자 하는 인간의 입장도 이와 같다. 사람은 우주의 '밖'에서 자신이 사는 우주를 관찰할 수 없으나, 우주의 곡률에 대한 내적인 관찰을 통해 우주 전체의 모양을 추정할 수 있다(Weeks, 2002). 원주율의 측정을 통해 그 원이 놓여있는 공간을 파악하고자 하는 실험은 우주의 내적인 관찰로 얻은 정보를 통해 우주의 기하학적 형태에 대해 파악하고자 하는 전문적인 연구에 대한 이차원의 초보적인 유추라 할 수 있다.

Ⅲ. 원주율의 계산

1. 아르키메데스의 원주율 계산법

아르키메데스는 자신의 논문 《원의 측정》의 명제 3에서 원의 내접다각형과 외접다각형을 이용하여 원주율 π의 범위가 $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$임을 밝혔다(Dijksterhuis, 1987). 기원전 2000년 경 바빌로니아인들이나 동시대의 이집트인들은 $\pi=3\frac{1}{8}=3.125$ 혹은 $\pi=\frac{16^2}{9^2}=3.16049\cdots$이라는 값을 사용했는데, $3\frac{1}{7}\approx 3.1429$, $3\frac{10}{71}\approx 3.1408$이므로 아르키메데스가 얻은 결과는 이 값들에 비해 훨씬 정확한 근사값을 제공한다(Beckman, 1976). 그러나 아르키메데스의 연구가 그의 이전 사람들과 구별되는 본질적인 측면은 결과의 정확성에 있는 것이 아니라, 연구가 설정한 목표에 있다. 즉, 아르키메데스는 특정한 하나의 근사값을 얻는데 그치지 않고, 원하는 만큼 얼마든지 정밀한 값을 산출할 수 있는 재귀적인 근사 알고리즘을 찾는다.[4] 이런 점에서 아르키메데스와 그 이전 사람들이 이룬 성과의 차이는 양적인 것이라기보다는 질적인 것이다.

아르키메데스의 연구를 요약해 보자. 우선 그의 논의에서 기본이 되는 사실은 원의 내접다각형과 외접다각형에 대해 '(내접다각형 둘레의 길이)<(원 둘레의 길이)<(외접다각형 둘레의 길이)' 라는 부등식이 성립하며, 변의 개수를 점점 늘여 나갈 때 내접 정다각형 둘레의 길이는 점점 커지고, 외접 정다각형 둘레의 길이는 점점 작아져서 그 차이는 원하는 임의의 값 이하로 줄어들 수 있다는 것이다.[5] 그러면 원의 내접 정다각형과 외접 정다각형의 둘레의 길이 사이의 값으로서 원의 둘레를 근사할 수 있으며, 결국 내접, 외접 정다각형의 둘레를 구하는 것이 이후의 목표가 된다. 실제로, 아르키메데스는 내접, 외접 정다각형의 변의 개수를 2배씩 증가시키면서 그 둘레의 길이를 구하였는데, 그는 이 값들을 개별적으로 다룬 것이 아니라 현대적인 용어로 말하자면 정$2n$각형의 둘레와 정n각형의 둘레 사이의 점화식을 구하였다.

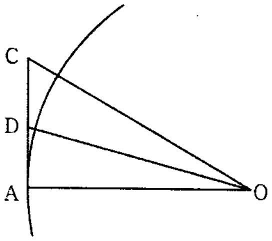
학교수학과 관련하여 특히 흥미로운 점은 이 점화식이 유클리드 원론에 제시된, 중학수학의 교육내용이기도 한 매우 단순한 기하학적 정리들로부터 유도된다는 것이다. 먼저, 외접 정다각형의 경우를 살펴보자. 그림 6에서 원 O는 단위원이고, AC는 외접 정n각형의 한 변의 절반, AD는 외접 정$2n$각형의 한 변의 절반을 나타낸다. 삼각형 한 내각의 이등분에 대한 유클리드의 원론 Ⅵ권의 명제 3(그림 7)에 의해 $\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{OC}}$ 즉, $\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AD}}$

3) 평면에서는 $l(r)=2\pi r$이 되므로 $K=0$ 임을 확인할 수 있고, 단위구면에서는 $l(r)=2\pi\sin r$ 이 되므로 $K=1$ 임을 확인할 수 있다.

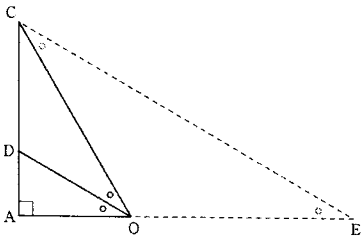
4) $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$이라는 근사값은 아르키메데스의 알고리즘의 네 번째 단계를 통해 얻어지는 하나의 계산 결과일 뿐이다.

5) 아르키메데스는 이 사실들을 그의 책 《구와 원기둥에 대하여》 Ⅰ권의 앞부분에서 엄밀하게 증명했다.

이다. 따라서 $\frac{\mathrm{OC}+\mathrm{OA}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{CD}+\mathrm{AD}}{\mathrm{AD}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}}$ 즉, $\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AD}}=\frac{\mathrm{OA}+\mathrm{OC}}{\mathrm{AC}}$. 그런데 여기서 OA = 1이고, OC는 피타고라스의 정리에 의해 $\sqrt{1^2+\mathrm{AC}^2}$ 이므로, AD와 AC 사이의 점화식 $\mathrm{AD}=\frac{\mathrm{AC}}{1+\sqrt{1+\mathrm{AC}^2}}$ 이 얻어진다.[6] 아르키메데스는 외접 정6각형에 대한 계산으로부터 출발하고 이 식을 반복 적용함으로써, 외접 정96각형에 이르러 $\pi<\frac{22}{7}$을 얻었다.

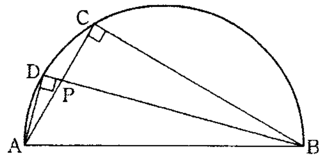


<그림 6> 외접 정n각형과 정$2n$각형의 한 변의 길이의 절반을 각각 AC, AD로 나타내었다.



<그림 7> 원론 VI권 명제3의 증명.
AO : OE = AD : DC. 그런데, OE = OC 이므로
AO : OC = AD : DC.

이제 원의 내접 정다각형의 경우를 살펴보자. <그림 8>에서 원 O는 단위원이고, AC는 내접 정n각형의 한 변을, AD는 외접 정$2n$각형의 한 변을 나타낸다. 이때 BD는 각 ABC를 이등분하므로, 앞서 언급한 원론 VI 권의 명제 3과 직각삼각형들의 닮음에 의해 $\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}}=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{PC}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{PA}}$. 따라서 $\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}}=\frac{\mathrm{BC}+\mathrm{BA}}{\mathrm{PC}+\mathrm{PA}}=\frac{\mathrm{BC}+\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$.[7] 그런데, 여기서 AB = 2이고, BC와 BD는 피타고라스의 정리에 의해 각각 $\sqrt{2^2-\mathrm{AC}^2}$, $\sqrt{2^2-\mathrm{AD}^2}$ 이므로 $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}}=\frac{\sqrt{4-\mathrm{AC}^2}+2}{\sqrt{4-\mathrm{AD}^2}}$. 이를 정리하면 $\mathrm{AD}^2=\frac{\mathrm{AC}^2}{2+\sqrt{4-\mathrm{AC}^2}}$ 이 된다.[8] 아르키메데스는 내접 정6각형에 대한 계산으로부터 출발하고 이 식을 반복 적용함으로써, 내접 정96각형에 이르러 $\pi>3\frac{10}{71}$ 을 얻었다.



<그림 8> 내접 정n각형과 정$2n$각형의 한 변의 길이. 각각 AC, AD로 나타내었다.

한편, 아르키메데스는 외접, 내접 정6각형을 계산의 출발점으로 삼았으므로, 이후의 계산을 위해서는 $\sqrt{3}$의 값을 필요로 했다. 실제로 그는 $\frac{265}{153}<\sqrt{3}<\frac{1351}{780}$ 이라는 값을 사용했는데, $\frac{265}{153}\approx 1.7320261$, $\frac{1351}{780}\approx 1.7320513$ 이므로 $\sqrt{3}\approx 1.7320508$과 매우 가까운 값이다.[9] 자신이 어떻게 이 값을 찾아내었는지에 대해서 아르키메데스가 직접 밝히고 있지는 않다. 아르키메데스가 선택한 값이 그 정밀성에 비해 매우 간단한 분수를 통해 표현되었기 때문에 수학사학자들은 그가 어떻게 이 값을 찾았는지를 궁금하게 생각했고, 이에 대한 몇 가지

6) $t_{2n}=\mathrm{AD}$, $t_n=\mathrm{AC}$라 두면 $t_{2n}=\frac{t_n}{1+\sqrt{1+t_n^2}}$ 으로 나타낼 수 있다.

7) 이때, 반지름이 아니라 지름을 한 변으로 하는 삼각형들을 이용한 것은 주목할 가치가 있다. 이렇게 함으로써 그는 직각삼각형들의 닮음비를 이용할 수 있었고, 계산에 피타고라스의 정리를 이용할 수 있었다.

8) $s_{2n}=\mathrm{AD}$, $s_n=\mathrm{AC}$ 라 두면 $s_{2n}^2=\frac{s_n^2}{2+\sqrt{4-s_n^2}}$ 으로 나타낼 수 있다.

9) 휴대폰에 내장된 계산기 정도의 정밀도로 $\frac{1351}{780}$의 제곱을 계산해 보면 그 값이 정확히 3으로 출력된다. 수업에 참여한 한 학생은 이 사실을 발견하고는 이 값의 정밀성에 대해 매우 감탄하였다.

가설을 제시하기도 하였다(Heath, 2002; Dijksterhuis, 1987). 본 연구에서는 원주율 계산의 탐구에 선행하여 도입하기에 적합한 소주제로서, 제곱근 계산의 몇 가지 방법을 부록으로 제시하였다.

마지막으로, 앞에서의 논의를 고려하면, 상수로서의 원주율 값을 계산하고 있는 아르키메데스의 방법 중 어딘가에는 유클리드 기하의 특징적인 성질이 이용되었을 것이라고 추측할 수 있다. 실제로 피타고라스의 정리와 반원의 원주각에 대한 정리는 평행선공준을 바탕으로 성립되는 유클리드 기하의 특징적인 성질이다.

2. 교육적 시사점

Toeplitz(1963)는 미적분학에 대한 발생적 접근을 시도한 자신의 저서를 통해 무한과정의 가장 특징적인 예로서 아르키메데스의 원주율 계산법을 들고 있다. 그의 알고리즘은 완전히 정확하게 계산될 수 없는 양[10]에 대해, 임의의 원하는 정확도까지 근사시킬 수 있는 원리를 제공한 역사상 최초의 업적이다.

저명한 수학자인 Felix Klein(1939)은 그리스 수학자 중에서도 가장 탁월한 사람으로 아르키메데스를 꼽으며, 그의 업적과 학자로서의 개성을 유클리드 원론이 가진 제한된 내용에 대비시킨다. 원주율의 연구는 이때 Klein이 고려한 중요한 사항 중 하나이다. 즉, 이 연구는 그가 매우 발전된 수치 계산의 개념을 가지고 있었음을 보여준다. 유클리드 원론에서는 두 원의 넓이 비는 각각의 반지름 제곱에 비례한다는 것을 보이고 있으나, 그 비례상수 즉 원주율의 값에 대한 계산은 시도조차 되지 않는다.

또한, Klein에 의하면 유클리드는 과학의 실용적인 적용은 하급의 일이라 생각하여 다루지 않은데 비해, 아르키메데스는 수학의 적용에 대한 폭넓은 흥미를 가지고 있었다. 마지막으로, 유클리드의 원론은 단순히 이미 알려진 지식의 "수집과 체계화"에 한정되었던 반면, 아르키메데스는 그의 모든 연구에서 지식의 실질적 발전을 이룬, "위대한 연구자이자 개척자"였다. 이 주장들에 대해서는 Klein이 직접적으로 원주율의 예를 언급하고 있지 않지만, 원주율의 연구가 여기서도 중요한 예가 된다는 것은 분명하다.

실제로 아르키메데스가 원주율의 연구에서 사용한 기하학적 정리들 즉, 피타고라스의 정리(Ⅰ권의 명제 47), 반원의 원주각에 대한 정리(Ⅲ권의 명제 31), 삼각형 한 내각의 이등분에 대한 정리(Ⅵ권의 명제 3)는 모두 유클리드 원론에 이미 수록되어 있던 것이다. 유클리드의 관심은 정리들 사이의 논리적 위계구조를 밝히는데 한정되었고, 그 정리들의 응용에는 관심이 없었다. 특히, 정리 Ⅵ.3은 유클리드 원론에서는 이후의 어디에서도 이용되지 않는다. 반면, 아르키메데스는 이 정리의 내재한 가치를 발견하여 원주율을 구하는 점화식을 유도하는데 핵심적인 성질로서 활용하였다. 그리고 그 연구를 통해 수학의 분야 자체를 확장하였다.

원주율에 대한 아르키메데스의 연구에서 중학수학에서 다루어지는 많은 대수적, 기하학적 지식들이 보다 깊은 수학적 지식을 얻기 위한 목적 하에 치밀하고 역동적으로 조합되는 과정을 살펴볼 수 있다. 아르키메데스의 연구는 학생들 수준에서 고급의 수학연구가 이루어지는 과정을 보여줄 수 있는 좋은 예일 것이다.

현행 교육과정에 대해 이 연구는 다음과 같은 시사점을 가진다. 현재로서 원주율은 초등학교 교육과정에서 다루어진 이후 많은 응용문제에 등장하지만, 그 개념 자체에 대한 논의는 더 이상 이루어지지 않는다. 원주율은 대수적으로 무리수, 제곱근 계산법, 이차방정식 등에 의해, 기하학적으로 피타고라스 정리, 삼각형 내각의 이등분에 대한 정리 등에 의해 수학적으로 잘 설명되며, 이는 대부분 중학교 교육과정의 범위에 속한 것이다. 원주율이 수학에서 쓰이는 가장 중요한 상수 중 하나이고, 학교수학의 여러 내용에 걸쳐 밀접한 관련성을 갖고 있음을 고려하면, 학생들의 수학 지식의 성장에 따른 원주율에 대한 추가적인 논의가 교실수업에서 이루어질 필요가 있을 것으로 보인다. 그리고 이러한 학습 주제들에 대한 흥미로운 예로서 원주율과 그 계산법이 도입될 수 있을 것이라 생각된다.

Ⅳ. 요약 및 결론

본 연구에서는 원주율에 대한 두 가지 수학적 측면을 고찰하여 학교수학의 탐구주제로서의 가치를 모색하였

10) π는 무리수이므로 분수나 유한소수로 나타낼 수 없다.

다. 하나는 그 값이 상수라는 것으로서, 이를 유클리드 기하의 고유한 성질로서 그리고 기하의 내적인 성질로서 재음미였다. 다른 하나는 그 값의 계산으로서, 원주율 계산에 대한 아르키메데스의 연구가 가진 수학적 의미 및 중학교 교육과정과의 관련성을 논의하였으며, 이 연구가 중학수준의 기하와 대수의 아이디어들을 조화롭게 결합하여 깊이 있는 수학적 결론을 얻고 있음을 살펴보았다. 또한 제곱근의 계산법에 대한 탐구를 원주율 계산과 관련된 작은 주제로서 제시하여 학생들에게 수학적 알고리즘의 의미와 그 비교를 위한 관점을 제시하는 방안을 모색하였다.

원주율은 학생들에게 수학에서 가장 친숙한 개념이면서도 교실수업에서 충분히 다루어지지 않는다. 이 연구를 바탕으로 하는 원주율에 대한 탐구는 학생들에게 수학의 공식을 여러 관점에서 살펴보는 가치를 보여주고 도형의 성질을 그 도형이 속해있는 공간의 성질과 관계하여 파악하는 새로운 관점을 제공하며 중학 교육과정의 학습내용들을 통해 보다 깊은 수준의 수학적 결론을 얻는 흥미로운 경험이 될 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

최영기 · 홍갑주 (2006). 유클리드 기하의 고유한 성질로서의 삼각형 넓이 공식에 대한 재음미. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **45(3)**, pp.367-373.

Beckman, P. (1976). *A history of pi.* New York: St. Martin's Press. [박영훈 옮김 (2002). 파이의 역사. 서울: 경문사]

Dijksterhuis, E. J. (1987). *Archimedes.* New Jersey: Princeton university press.

Dodes, I. A. (1966). Mathematics: Its structure, Logic, and Method. In Begle, E. G (Ed.), *The role of axiomatics and problem solving in mathematics*(pp. 27-43). Ginn and Company.

Greenberg, M. J. (1980). *Euclidean and non-euclidean geometries: Development and history*(2nd ed.). W. H. Freeman and Company.

Heath, T. L. (1956). *The thirteen books of the Elements*(Vol 3). New York: Dover Publications.

__________ (1981). *A History of Greek Mathematics*(Vol 2). New York: Dover Publications.

__________ (2002). *The works of Archimedes.* New York: Dover Publications.

Klein, F. (1939). *Elementary mathematics from an advanced standpoint - Geometry.* New York: Dover Publications.

McCleary, John (1994). *Geometry from a differentiable viewpoint.* Cambridge university press.

Toeplitz, O. (1963). *The Calculus: A genetic approach.* The University of Chicago Press.

Weeks, J. R. (2002). *The shape of space*(2nd ed.). New York: Marcel Dekker.

The Nature of Pi as a Constant and Archimedes' Calculation Method

Choi, Younggi
Dept. of Mathematics Education, Seoul National University, Seoul 151-748, Korea
E-mail: yochoi@snu.ac.kr

Hong, Gap ju
Dept. of Mathematics Education, Seoul National University Graduate School, Seoul 151-748, Korea
E-mail: gapdol@empal.com

Some of school mathematics contents that have deep mathematical meanings are regarded as obvious and their importance is frequently overlooked. We first reexamined the mathematical meaning of pi as a constant. Then we indicated the educational implications of Archimedes' calculation method of pi and finally underlined the availability of pi as a valuable research topic in school mathematics.

* ZDM Classification : G13
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D30
* Key Words : pi, pi as a constant, calculation of pi, Euclidean geometry, Archimedes

<부록> 제곱근 계산을 위한 알고리즘

원주율의 계산에는 제곱근 계산법이 필수적으로 사용된다. 제곱근의 계산을 위한 알고리즘은 여러 가지가 있는데, 이에 대한 탐구를 포함시킴으로써 원주율의 탐구는 보다 완비된 교육과정으로 계발될 수 있을 것이다. 또한 이러한 탐구는 원주율 값을 구하는 아르키메데스의 알고리즘을 보다 일반적인 관점에서 평가할 수 있는 안목을 학생들에게 제공해 준다.

Dodes(1966)는 제곱근을 구하는 세 가지 알고리즘을 제시하고 교육적 관점에서 논의한 바 있다. 다음은 소수점 세 번째 자리까지 그 방법들 각각의 실행과정을 설명없이 보여주는 것이다.

방법1.
첫 추측: 1.5
$(1.5)^2 = 2.25 < 3$
$(1.6)^2 = 2.56 < 3$
$(1.7)^2 = 2.89 < 3$
$(1.8)^2 = 3.24 > 3$
$(1.71)^2 = 2.9241 < 3$
$(1.72)^2 = 2.9584 < 3$
$(1.73)^2 = 2.9929 < 3$
$(1.74)^2 = 3.0276 > 3$
$(1.735)^2 = 3.010225 > 3$

방법2.
첫 추측: 1.5
$3.000/1.500 = 2.000$
$(1.500 + 2.000)/2 = 1.750$
$3.000/1.750 = 1.714$
$(1.750 + 1.714)/2 = 1.732$
$3.000/1.732 = 1.732$

방법3.

```
          3. 00 00 00 ) 1.732
          1
27        2 00
          1 89
343         11 00
            10 29
3462           71 00
               69 24
                1 76
```

방법 1은 현재 우리나라 교육과정(9-가)에서 가르쳐지는 것이기도 하다. 이 방법은 일종의 시행착오 방법으로, 많은 계산을 필요로 한다. 그러나 계산 과정 자체가 이 계산법이 성립하는 이유를 보여준다는 점에서, 이 방법은 자기 설명적(self-explanatory)이다. 또한 제곱근의 정의를 가장 직접적으로 이용하므로 학생들로서는 이해하기에 가장 쉬운 것이며, 아마 스스로 생각해 낼 수 있는 유일한 방법일 것이다.

방법 2는 $3/a = a$가 되는 수 a로서 $\sqrt{3}$의 근사값을 찾는 방법이라 요약할 수 있다. 첫 번째 시도에서 $3.000/1.500 = 2.000 > 1.500$이므로 1.500과 2.000의 사이의 어떤 수로 다시 3을 나누어 본다. 여기서는 두 수의 평균인 1.750을 선택하였다. 이때 결과는 $3.000/1.750 = 1.714 < 1.750$ 이므로, 이번에는 1.714와 1.750의 평균인 1.732를 선택하여 다시 3을 나눈다. $3.000/1.732 = 1.732$ 이므로 이 알고리즘은 종료된다.[12] 이 방법은 계산이 올바르게 이루어졌는가를 자명하게 보여준다는 점에서 자기 검증적(self-checking)이라는 장점이 있다.

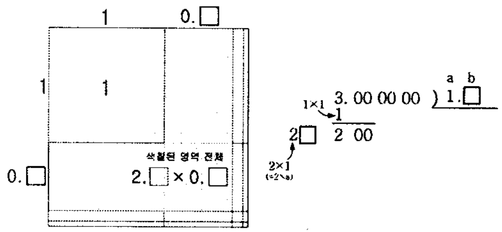
방법 3은 효율성면에서 우수한 알고리즘이만, 학생들이 이해하기에는 가장 어려울 것으로 보인다. 이 방법은 2세기 초의 수학자인 Ptolemy[13]가 사용한 것으로 알려져 있으며, 어떤 이차부등식을 만족하는 미지수의 값을 구하는 과정을 반복하는 것으로 설명할 수 있다. 그러나 그림을 이용한다면 넓이가 3인 정사각형의 한 변의 길이 $a.bcd\cdots$ 의 각 자리숫자 a, b, c, d 를 찾는 과정으로서 다음과 같이 좀 더 쉽게 설명할 수 있다(Heath, 2002).

우선, 제곱해서 3을 넘지 않는 최대의 정수가 1이므로 $a = 1$이다. 따라서 a를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 1이다. 이제 소수 첫째자리의 숫자 b를 결정해야 하는데, b는 그림 9의 색칠된 영역의 넓이

12) 현대수학에서 이 방법은 뉴턴 방법(Newton's Method)이라 불리는 것이다.

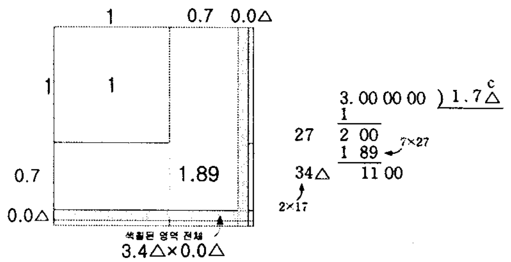
13) 알렉산드리아와 이집트에서 활동했으며 천동설을 지지하는 천문학 저서인 《Almagest》로 유명하다. 천문학자로서, 그는 이른바 sin에 대한 "합차공식"과 "반각공식"을 이용하여 삼각비의 표를 만들었는데, 이를 위한 기초가 된 것이 바로 상기에 언급한 아르키메데스의 점화식으로 추정된다(Heath, 1981).

$(2\times1+0.\square)\times0.\square=2.\square\times0.\square$가 $3-1^2=2$를 넘지 않도록 하는 즉, $2\square\times\square\le 200$ 을 만족하는 □의 최대값으로서 결정된다. 그 값은 7이며, 따라서 색칠된 영역의 넓이는 $2.7\times0.7=1.89$이다.



<그림 9> 소수 첫째자리 숫자의 결정

다음으로 소수 둘째자리의 숫자 c를 결정해야 한다. c는 그림 10의 색칠된 영역의 넓이 $(2\times1.7+0.0\triangle)\times0.0\triangle=(3.4\triangle)\times0.0\triangle$가 $3-1-1.89=0.11$을 넘지 않도록 하는 즉, $34\triangle\times\triangle\le 1100$ 을 만족하는 △의 최대값으로서 결정된다. 그 값은 3이며, 따라서 색칠된 영역의 넓이는 $(3.43)\times0.03=0.1029$이다. 이어서, 비슷하게, 소수 셋째자리 수가 2임도 알 수 있다.



<그림 10> 소수 둘째자리 숫자의 결정

이 방법들을 종합적으로 비교하자면 다음과 같다. 방법 1은 시행착오를 거쳐야 하며, 앞의 계산 결과를 다음 단계에서 다시 이용하지 않는다는 점에서 비효율적이다. 또한 단계가 거듭될수록 더욱 많은 자리수를 가진 수의 곱셈을 해야 하므로 계산은 점점 복잡해진다. 반면, 방법 2는 앞의 계산 결과를 다음 단계에서 다시 이용하며 단계가 거듭될 때 계산이 크게 복잡해지지 않는다. 방법 3은 한 단계에 정확히 소수점 아래 한 자리만큼 더 정밀한 값이 구해진다. 또한, 단계가 거듭되어도 계산은 복잡해지지 않는다. 이와 같이, 하나의 공통된 값을 구하기 위한 알고리즘이라 할지라도 연산의 어려운 정도, 참값에 가까이 가는 속도 등의 관점에서 장단점을 비교할 수 있다.

한편, 위의 방법 2는 Archimedes가 원주율 값을 계산하는 과정에서 등장하는 무리수들을 근사한 방법으로 추측되고 있는 것 중 하나이다. 예를 들어, $\frac{5}{3}$으로부터 출발하여 방법 2를 적용한다면, 다음과 같이 Archimedes가 사용한 $\sqrt{3}$ 값의 위쪽 한계 $\frac{1351}{780}$에 금방 이르게 된다.

$$3\div\frac{5}{3}=\frac{9}{5},\quad \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}+\frac{9}{5}\right)=\frac{26}{15},$$

$$3\div\frac{26}{15}=\frac{45}{26},\quad \frac{1}{2}\left(\frac{26}{15}+\frac{45}{26}\right)=\frac{1351}{780}$$