

# 포화 구동기를 갖는 시간지연 선형시스템의 $H_\infty$ 추종 제어기

論 文

57-4-20

## $H_\infty$ Tracking Control of Time-delayed Linear Systems with Saturating Actuators

李 淵 圭\* · 金 鎮 勳†

(Yeom-Gui Yi · Jin-Hoon Kim)

**Abstract** - In this paper, we considered the  $H_\infty$  tracking control for time-delayed linear systems with saturating actuators. The considered time delay is a time varying one having bounded magnitude and rate, and the considered tracking reference is a general one only known its bounds of magnitude and rate. First, we have converted the  $H_\infty$  tracking control problem into an equivalent  $H_\infty$  disturbance attenuation problem using two steps of transformations. Next, based on a new Lyapunov-Krasovskii functional, we have derived the result in the form of LMI with two non-convex parameters. Finally, by numerical examples, we have shown the usefulness and effectiveness of our result.

**Key Words** : Time-delay, Actuator saturation, Lyapunov-Krasovskii function, LMI.

### 1. 서 론

일반적인 제어 시스템에 있어서 제어 입력 신호를 받아 실제 시스템을 구동하는 구동기에 대한 용량제한과 시스템의 상태 혹은 입력 등에 대한 시간지연 요소는 제어기 설계 시 반드시 고려되어야 하는 주요한 비선형적 요소라고 할 수 있다. 먼저 구동기는 여러 가지 물리적 혹은 경제적 제한조건으로 인하여 용량제한 특성을 지니게 되며 이러한 구동기가 갖는 용량제한 특성으로 인하여 대상 시스템은 허용된 입력 구간 값에 대하여는 선형시스템으로 동작하지만 허용 구간을 넘어서면 비선형으로 동작하는 특징을 보이게 된다. 다음으로 시스템에 대한 시간지연은 다양한 공학적, 물리학적 혹은 생물학적 시스템의 모델링에 적용되며 시간지연 요소의 값이 커짐에 따라 시스템의 안정성과 성능을 하락시키는 요인으로서 작용하게 된다. 따라서 시스템에 내재된 이러한 대표적인 비선형적 요소인 구동기 용량제한 및 시간지연 특성을 고려하지 않을 경우 시스템의 성능 저하뿐만 아니라 시스템의 안정성까지도 보장할 수 없기 때문에 구동기 용량제한 및 시간지연 요소는 제어기 설계 시 반드시 고려되어야만 한다.

구동기 용량제한을 갖는 시스템에 대한 제어기 설계는 글로벌(global), 세미-글로벌(semi-global)[4] 혹은 로컬(local) [6][7][15] 안정화의 관점으로 분류할 수 있으며 글로벌 안정화 조건의 경우에는 개루프 시스템에 대한 안정성

조건을 필요로 하기 때문에 주로 세미-글로벌 혹은 로컬 안정화 조건을 만족하는 제어기 설계에 연구의 초점이 맞추어져 왔다고 할 수 있다. 이러한 구동기 용량제한 시스템에 대한 제어기 설계의 대표적인 방법으로는 구동기 용량제한이 없는 이상적인 구동기를 가정하여 제어기를 설계한 후 시행착오(trial and error) 방식으로 제어성능을 조절하는 엔티-와이드업(anti-widup)[16] 방식 혹은 제어 시스템의 동작 중에 절대로 구동기 포화가 발생함을 허용하지 않음으로서 제어기 설계 시 선형구간 만을 고려하는 저이득 제어기 설계[6], 구동기 포화를 나타내는 비선형 구간을 컨벡스헐(convex hull)등의 수학적 기법을 활용하여 선형시스템으로 등가변환한 후 제어기를 설계하는 고이득 제어기 설계[15] 등으로 구분 지을 수 있으며 고이득 제어가 저이득 제어에 비하여 비교적 좋은 성능을 나타냄이 알려져 왔다. 특히 시간지연을 갖는 구동기 용량제한 시스템에 대한  $H_\infty$  적인 로컬 안정화의 경우에는 외란의 영향으로 인한 시스템의 도달가능집합(reachable set)과 구동기 용량제한으로 인한 제어 입력의 제한조건 및  $H_\infty$  성능조건을 동시에 만족하는 설계조건을 유도하는 것을 목표로 하며 기존의 접근방법들은 주로 Razumikhin의 방식에 근거한 제어기 설계 결과를 제시하였다[6][7]. 그러나 이러한 기존의 설계방식은 매우 보수적이며 결과적인 LMI 조건식에 비교적 많은 수의 non-convex 변수를 포함하는 단점을 지니고 있다고 할 수 있다. 따라서 이러한 제한을 극복하기 위해서는 Razumikhin 방식의 보수성을 해결할 수 있는 새로운 형태의 Lyapunov-Krasovskii 함수의 정의를 필요로 하며 새로운 Lyapunov-Krasovskii 함수는 Razumikhin 방식의 보수성을 해결함과 동시에 도달가능집합 및  $H_\infty$  성능조건을 효과적으로 유도할 수 있는 형태로 정의되어야만 한다.

† 교신저자, 正會員 : 忠北大學校 電氣電子工學部 教授·工博  
E-mail : jinhkim@chungbuk.ac.kr

\* 正會員 : 忠北大學校 大學院 制御計測工學科 博士課程  
接受日字 : 2007年 12月 20日  
最終完了 : 2008年 2月 11日

시스템의 출력이 따라야 할 추종 기준입력(reference)이 시간에 따라 변화하는 일반적인 추종제어(tracking control)의 문제는 기준 입력과 측정출력의 차이로 표현되는 추종오차를 시스템의 상태방정식에 포함시킬 수 있는 적절한 시스템 등가변환을 수행한 후 이렇게 변환된 시스템에 대한 안정화 문제로서 전환하여 해결하는 일반적인 접근방식을 취하게 된다. 그러나 대부분의 추종 제어기 설계 방식은 기준 입력을 미리 알고 있거나 기준입력에 대한 동적 특성을 알고 있음을 가정하게 되므로 구동기 용량제한과 시간지연을 고려함과 동시에 미지의 기준입력에 대한 추종 제어기 설계 문제는 그 연구가 아직 진행 중이라 할 수 있다. 따라서 이 논문에서는 구동기 용량제한을 갖는 시간지연 선형시스템에 대한  $H_\infty$  추종 제어기 설계 문제를 구동기 용량제한을 갖는 시간지연 선형시스템에 대한  $H_\infty$  제어기 설계문제로 변환할 수 있는 시스템 등가변환에 기초한 고이득 추종 제어기의 설계 기법을 제안하고자 한다. 우선 잘 알려진 SVD(Singular Value Decomposition) 기법을 활용하여 시스템의 상태 중 추종출력에 직접적으로 관계되는 상태만을 효율적으로 분리한 후 추종오차를 시스템의 동적인 상태방정식에 포함되도록 하는 시스템 등가변환을 수행함으로써 추종 제어기를 설계하게 된다. 또한 추종제어의 경우 제어기의 추종성능은 시간에 따라 변화하는 기준입력의 크기뿐만 아니라 기준입력의 시간적 변화율에도 영향을 받기 때문에 기준입력의 크기와 더불어 기준입력의 시간변화율 역시 변환된 시스템의 동적 방정식에 대한 새로운 상태변수로서 포함되게 된다. 이렇게 설계된 추종 제어기는 기준입력의 변화에 빠르게 반응할 수 있을 뿐만 아니라  $H_\infty$  혹은 추종에러의 최대크기 등의 다양한 성능요소 조건을 만족할 수 있는 장점을 지니게 된다.

표기법 : 윗첨자 T는 행렬에 대한 전치를 의미하며,  $R^n$ 은 벡터 놈  $\|\cdot\|$ 를 갖는  $n$ -차원 유클리드 공간을 의미한다.  $R^{n \times m}$ 은  $n \times m$ 차원의 실수 행렬들의 집합을 의미하며  $P > 0$ 은  $P \in R^{n \times n}$ 에 대하여  $P = P^T$ 임과 동시에 양확정(positive definite)임을 나타낸다.  $x_r(\theta) = x(t + \theta)$ ,  $\theta \in [-h, 0]$ 임을 나타내며  $I_n$ 은  $n$ -차원의 항등행렬을 의미하며 행렬속의 ( $\star$ )는 대칭임을 나타낸다.

## 2. 문제기술 및 예비 결과

구동기 용량제한과 시간지연을 갖는 추종제어 시스템을 아래와 같이 정의한다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d(t)) + B_1 \text{sat}(u(t)) \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2)$$

시스템이 갖는 시간지연 값  $d(t)$ 는 시간에 따라 변화하는 변수로서 아래와 같이 정의된다.

$$0 \leq d(t) \leq h, \quad |\dot{d}(t)| \leq \mu < 1 \quad (3)$$

여기서  $x \in R^n$ 는 시스템의 상태로서 아래의 조건을 만족하며

$$x(t) = 0, \quad t \in [-h, 0] \quad (4)$$

$u \in R^m$ 는 시스템의 입력,  $y \in R^n$ 는 측정출력을 나타낸다. 다음으로  $\text{sat}(u)$ 는 구동기 포화를 나타내는 포화함수 벡터로서  $\text{sat}(u) = [\text{sat}(u_1), \text{sat}(u_2), \dots, \text{sat}(u_m)]^T$ 로 주어지며 각 제어입력  $u_i$ 에 대한 포화특성은 다음과 같다.

$$\text{sat}(u_i) = \begin{cases} u_i^0, & \text{if } u_i > u_i^0 \\ u_i, & \text{if } |u_i| \leq u_i^0 \\ -u_i^0, & \text{if } u_i < -u_i^0 \end{cases} \quad (5)$$

(5)에서  $u_i^0$ 는 각 입력  $u_i$ 에 대한 선형구간의 범위를 나타내며 각 입력  $u_i$ 는  $(1/r_i) \cdot u_i^0$ 의 범위에 존재함을 가정한다. 다음으로 구동기 포화 및 시간지연을 갖는 시스템(1)-(2)에 대하여 인가되는 기준입력을  $y_r(t)$ 로서 나타낸다. 이 때 시스템 (1)-(2)의 추종성능은  $y_r(t)$ 의 크기뿐만 아니라  $y_r(t)$ 의 시간적 변화율  $\dot{y}_r(t)$  및  $y_r(t-d(t))$ 에도 영향을 받기 때문에  $y_r(t)$ ,  $y_r(t-d(t))$ ,  $\dot{y}_r(t)$ 를 모두 고려한 기준입력의 제한조건을 아래와 같이 정의하도록 한다.

$$\begin{aligned} & y_r^T(t)y_r(t) + y_r^T(t-d(t))y_r(t-d(t)) + \dot{y}_r^T(t)\dot{y}_r(t) \\ & \leq y_{r,max}^2 + y_{r,max}^2 + \dot{y}_{r,max}^2 = w_{r,max}^2 \end{aligned} \quad (6)$$

이제 (6)에 의하여 새로운 상태변수  $w_r(t,d)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$w_r(t,d) = \begin{bmatrix} y_r(t) \\ y_r(t-d(t)) \\ \dot{y}_r(t) \end{bmatrix}, \quad w_r^T(t,d)w_r(t,d) \leq w_{r,max}^2 \quad (7)$$

다음으로 시스템(1)-(2)의 추종오차는 아래와 같이 정의한다.

$$e(t) = y(t) - y_r(t) \quad (8)$$

다음으로 시스템 (1)의 상태에 대한 타원형태의 영역을 다음과 같이 정의한다.

$$\varepsilon(P) = \{x \in R^n : x^T(t)Px(t) \leq w_{r,max}^2; P = P^T > 0\} \quad (9)$$

이제 (1)-(9)를 바탕으로 하여 구동기 포화 및 시간지연을 갖는 선형시스템에 대한 고이득 추종 제어기 설계 문제를 다음과 같이 명확하게 정의한다.

**고이득  $H_\infty$  추종 제어기 설계:** (3)의 시간지연과 (5)의 구동기 포화를 갖는 (1)-(2)의 시스템에 대하여 (6)의 제한조건을 만족하는  $y_r(t)$ 가 부과될 경우 시스템 (1)의 도달가능집합은 (9)형태의 타원영역에 존재하고 각 제어입력은  $|u_i| \leq (1/r_i) \cdot u_i^0$ 의 영역에 존재함과 동시에 (7)로 정의된  $w_r(t,d)$ 로부터  $e(t)$ 까지의  $L_2$ 계인은  $\gamma$ 를 넘지 않음을 보장하

는 제어규칙  $u(t)$ 를 설계한다.

마지막으로 주요 정리를 유도하는데 유용하게 사용될 결과들을 보조정리로서 제시한다.

**보조정리 1:** (Rugh, 1996).  $V_1(x) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(t,s)ds$ 라 할 때, 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dt} V_1(x) = \dot{b}(t)f(t,b(t)) - \dot{a}(t)f(t,a(t)) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t,s)ds.$$

**보조정리 2:** (Gu, 2000).  $M \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$ 이라 할 때, 다음이 성립한다.

$$\left( \int_{t-d}^t f^T(s)ds \right) M \left( \int_{t-d}^t f(s)ds \right) \leq d \int_{t-d}^t f^T(s) M f(s)ds.$$

**보조정리 3:** (Boyd, 1994).  $V(x(t))$ 에 대하여  $V(x(0))=0$ 을 만족하며  $w^T(t)w(t) \leq w_{max}^2, \forall t$ 라 할 때, 다음의 관계식을 만족하면

$$\frac{d}{dt} V(x) + \alpha V(x) - \beta w^T w \leq 0, \quad \alpha, \beta > 0$$

아래의 결과를 얻을 수 있다.

$$V(x) \leq \frac{\beta}{\alpha} w_{max}^2, \quad \forall t.$$

### 3. 시스템 등가 변환

먼저 (2)에서 정의된  $p \times n$ 차원을 갖는 측정출력 행렬  $C$ 에 대하여 SVD를 적용하면  $U \in \mathbb{R}^{p \times p}, V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 에 대하여 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$C = USV^T, \quad S = [S_p \ 0] \tag{10}$$

여기서  $UU^T = VV^T = I$ 를 만족하고  $S_p = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}$ 로서  $\sigma_i$ 는 행렬  $C$ 의 특이치(singular value)를 나타내며 (10)의 결과에 의하여 (2)에서 정의된 시스템의 측정출력  $y(t)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y(t) = USV^T x(t) \tag{11}$$

이제 (11)에서  $\bar{x}(t) = V^T x(t)$ 로 하면 (1)-(2)로 주어진 시스템은 다음과 같이 변환할 수 있다.

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{A}_d\bar{x}(t-d) + \bar{B}_1 \text{sat}(u(t)) \tag{12}$$

$$y(t) = \bar{C}\bar{x}(t) \tag{13}$$

여기서  $\bar{A} = V^T A V, \bar{A}_d = V^T A_d V, \bar{B}_2 = V^T B_2, \bar{C} = US$ 를 나타낸다. 다음으로 (12)에서 정의된 시스템 상태  $\bar{x}(t)$ 중에서 추종출력  $y(t)$ 에 직접적으로 관련된 항을 (10)의 결과를 활용하여 다음과 같이  $\bar{x}_1(t)$ 로 정의한다.

$$y(t) = US_p \bar{x}(t) = US_p \bar{x}_1(t) \tag{14}$$

다음으로 시스템 (12)는 다음과 같은 형태로 확장하여 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{A}_{d,11} & \bar{A}_{d,12} \\ \bar{A}_{d,21} & \bar{A}_{d,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t-d) \\ \bar{x}_2(t-d) \end{bmatrix} \\ &+ \bar{B}_2 \text{sat}(u(t)) \end{aligned} \tag{15}$$

여기서 (8)로 정의된 추종오차와 (14)로 정의된 시스템 출력을 사용하여 추종오차를 포함하는 새로운 상태방정식을 유도하기 위하여 다음과 같이 새로운 상태변수  $\tilde{x}(t)$ 를 정의한다.

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) - y_r(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} \tag{16}$$

이제 (16)에 대하여 (14)의 결과를 적용하면 새로운 상태변수  $\tilde{x}(t)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix} US_p \bar{x}_1(t) - y_r(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} US_p & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} - y_r(t) \tag{17}$$

마지막으로 시스템 (12)-(13)에 대하여 (17)의 관계를 적용한 시스템 등가변환을 수행하면 추종오차와 기준입력의 변화를 포함하는 새로운 시스템 방정식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{A}_d\tilde{x}(t-d) + \tilde{B}_1 \text{sat}(u(t)) + \tilde{B}_2 w_r(t, d) \tag{18}$$

$$e(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) \tag{19}$$

여기서 식을 간단히 하기 위해 행렬  $F$ 를 다음과 같이 정의하면

$$F = \begin{bmatrix} US_p & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

각 행렬  $\tilde{A}, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \tilde{C}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\tilde{A} = F\bar{A}F^{-1}, \quad \tilde{A}_d = F\bar{A}_dF^{-1}, \quad \tilde{B}_1 = F\bar{B}_1,$$

$$\tilde{C} = [I_p \ 0], \quad \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{d,11} & -I \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{d,21} & 0 \end{bmatrix}$$

이제 (18)-(19)로 표현된 시스템은 SVD에 의하여 추종출력과 관련된 상태들을  $\tilde{x}_1(t)$ 로 분리할 수 있을 뿐 만 아니라

추종오차 및 기준입력의 변화를 상태방정식 내에 포함하기 때문에 추종성능을 효율적으로 향상시킬 수 있는 장점을 지니게 된다. 다음으로 (5)에서 일반적인 입력항  $sat(u_i(t))$ 의 비선형성은 입력항  $u_i(t)$ 와 아래와 같은 성질을 갖는  $\phi_i(t)$ 와 의 곱으로 표현 가능하다. 즉,  $sat(u_i(t)) = \phi_i(t) \cdot u_i(t)$ 이고  $\phi_i$ 는 아래와 같다.

$$\phi_i(t) = \begin{cases} \frac{u_i^0}{u_i(t)} & u_i < u_i(t) \\ 1 & |u_i(t)| \leq u_i^0 \\ -\frac{u_i^0}{u_i(t)} & u_i(t) < -u_i^0 \end{cases} \quad (20)$$

따라서,  $|u_i(t)| \leq (1/r_i) \cdot u_i^0$ ,  $r_i \in (0,1]$ 의 범위내에서  $\phi_i(t)$ 는 다음의 범위를 취하게 된다.

$$r_i \leq \phi_i(t) \leq 1. \quad (21)$$

그리고  $\phi_i(t)$ 를 대각요소로 갖는 대각행렬  $\Phi(t) \in R^{n \times m}$ 은 다음으로 기술된다.

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= diag\{\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_m(t)\} \\ &= \sum_{i=1}^{2^m} \zeta_i(t) \theta_i; \quad \sum_{i=1}^{2^m} \zeta_i(t) = 1, \quad \zeta_i \in [0,1] \end{aligned} \quad (22)$$

여기서  $\theta_i, i=1,2,\dots,2^m$ 은 행렬  $diag\{[r_1,1],[r_2,1],\dots,[r_m,1]\}$ 의 꼭지점 행렬이다. 결과적으로 구동기 용량제한을 갖는 시간 지연 선형시스템(18)은  $|u_i(t)| \leq (1/r_i) \cdot u_i^0$ 의 범위에서는  $u(t) = K\tilde{x}(t) + Hw_r(t,d)$ 의 제어규칙에 의하여 아래의 식으로 변환할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= [\tilde{A} + \tilde{B}_1 \cdot \Phi(t) \cdot K] \tilde{x}(t) + \tilde{A}_d \tilde{x}(t-d(t)) \\ &\quad + \tilde{B}_1 \cdot \Phi(t) \cdot K] w_r(t,d) \\ &= \sum_{i=1}^{2^m} \zeta_i [\tilde{A} + \tilde{B}_1 \theta_i K] \tilde{x}(t) + \tilde{A}_d \tilde{x}(t-d(t)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2^m} \zeta_i [\tilde{B}_2 + \tilde{B}_1 \theta_i K] w_r(t,d) \\ &= \hat{A} \tilde{x}(t) + \hat{A}_d \tilde{x}(t-d(t)) + \hat{B}_2 w_r(t,d). \end{aligned} \quad (23)$$

$$e(t) = \tilde{C} \tilde{x}(t) \quad (24)$$

여기서  $\hat{A} = \sum_{i=1}^{2^m} \zeta_i [\tilde{A} + \tilde{B}_1 \theta_i K]$ ,  $\hat{B}_2 = \sum_{i=1}^{2^m} \zeta_i [\tilde{B}_2 + \tilde{B}_1 \theta_i K]$ 를 나타낸다.

#### 4. 주요 결과

이제 앞 절에서 제시된 변환된 시스템과 보조정리를 이용하여 (1)-(2)로 정의된 구동기 용량제한을 갖는 시간지연 선형시스템에 대한 주요 결과를 아래와 같이 제시한다.

**정리 1:** (3)의 시간지연을 갖고 (7)의 왜란의 영향하에 놓여있는 (23)-(24)로 정의된 구동기 용량제한을 갖는 시간지연 선형시스템에 대하여 아래의 LMI들을 만족하는 임의의 행렬  $X = X^T \in R^{n \times n} > 0$ ,  $Q = Q^T \in R^{n \times n}$ ,  $R_1 \in R^{m \times m}$ ,  $R_2 \in R^{n \times n}$ ,  $S \in R^{m \times n}$ ,  $W \in R^{m \times n}$ ,  $H \in R^{m \times 3p}$  및 임의의 실수  $\alpha > 0, \sigma_1, \sigma_2 > 0, \gamma > 0$ 가 존재하고 ( $i=1,2,\dots,2^m$ )

$$\begin{bmatrix} X & \sigma_1 X \\ \star & Q + \frac{1}{h} e^{-\alpha h} (R_1 - hR_2) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_2 X & 0 & W_j^T \\ 0 & (1-\sigma_2)I & H_j^T \\ \star & \star & \left( \frac{u_j^0}{r_j \cdot w_{r,max}} \right)^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad j=1,2,\dots,m \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11(i)} & 2\tilde{A}_d X - \sigma_1 X & \lambda_{13(i)} & \lambda_{14(i)} & \sigma_1 \mu X \\ \star & \lambda_{22} & \sigma_1 X \tilde{A}_d^T - Q & 0 & 0 \\ \star & \star & \lambda_{33} & \lambda_{34(i)} & \mu Q \\ \star & \star & \star & -\alpha I & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -\mu S \end{bmatrix} \leq 0 \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} \pi_{11(i)} & 2\tilde{A}_d X - \sigma_1 X & \pi_{13(i)} & \pi_{14(i)} & \sigma_1 \mu X & X \tilde{C}^T \\ \star & \pi_{22} & \sigma_1 X \tilde{A}_d^T - Q & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \pi_{33} & \pi_{34(i)} & \mu Q & 0 \\ \star & \star & \star & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -\mu S & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (28)$$

다음의 제어규칙

$$u(t) = K\tilde{x}(t) + Hw_r(t,d); \quad K = WX^{-1}$$

를 시스템 (23)-(24)에 적용하면 시스템 (1)-(2)의 도달가능집합은  $\epsilon(X^{-1})$ 의 영역에 머물며 입력은  $|u_i(t)| \leq (1/r_i) \cdot u_i^0$ 의 범위에 존재함과 동시에 기준입력  $w_r(t,d)$ 로부터 추종오차  $e(t)$ 까지의  $L_2$ 게인이  $\gamma$ 를 초과하지 않음을 보장한다. 여기서 LMI 내의 각 성분은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \lambda_{11(i)} &= 2(\tilde{A}X + X\tilde{A}^T + \tilde{B}_1 \theta_i W + W^T \theta_i^T \tilde{B}_1^T) + 2(\sigma_1 + \alpha)X + R_1, \\ \lambda_{13(i)} &= \sigma_1 X \tilde{A}_d^T + \sigma_1 W^T \theta_i^T \tilde{B}_1^T + \alpha \sigma_1 X + Q, \\ \lambda_{14(i)} &= \pi_{14(i)} = 2(\tilde{B}_2 + \tilde{B}_1 \theta_i H), \\ \lambda_{22} &= \pi_{22} = -e^{-\alpha h} (R_1 - hR_2) + \mu S, \\ \lambda_{33} &= -\frac{1}{h} e^{-\alpha h} R_2 + \alpha Q, \\ \lambda_{34(i)} &= \pi_{34(i)} = \sigma_1 (\tilde{B}_2 + \tilde{B}_1 \theta_i H), \\ \pi_{11(i)} &= 2(\tilde{A}X + X\tilde{A}^T + \tilde{B}_1 \theta_i W + W^T \theta_i^T \tilde{B}_1^T) + 2\sigma_1 X + R_1, \\ \pi_{13(i)} &= \sigma_1 X \tilde{A}_d^T + \sigma_1 W^T \theta_i^T \tilde{B}_1^T + Q, \\ \pi_{33} &= -\frac{1}{h} e^{-\alpha h} [(1-\alpha h)R_2 + \alpha R_1]. \end{aligned}$$

증명: 먼저 구동기 용량제한을 갖는 시간지연 선형시스템 (23)-(24)에 대하여 아래와 같이 Lyapunov-Krasovskii 함수를 정의하자.

$$V(\tilde{x}_t) = V_0(\tilde{x}(t)) + V_1(\tilde{x}_t) + V_2(\tilde{x}_t) \quad (29)$$

여기서

$$V_0(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}^T(t)X^{-1}\tilde{x}(t)$$

$$V_1(\tilde{x}_t) = \left[ \tilde{x}^T(t) \int_{t-d(t)}^t \tilde{x}^T(s)ds \right] \begin{bmatrix} X^{-1} & \sigma_1 X^{-1} \\ \star & X^{-1}QX^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \int_{t-d(t)}^t \tilde{x}(s)ds \end{bmatrix}$$

$$V_2(\tilde{x}_t) = \int_{t-d(t)}^t e^{\alpha(s-t)} \tilde{x}^T(s)X^{-1} [R_1 + (s-t)R_2] X^{-1} \tilde{x}(s) ds$$

이다. 다음으로 아래와 같이 새로운 변수  $\xi_t$ 를 정의하면

$$\xi_t^T = \left[ \tilde{x}^T(t)X^{-1} : \int_{t-d(t)}^t \tilde{x}^T(s)X^{-1} ds \right]$$

$V(\tilde{x}_t)$ 는 다음과 같이 바꾸어 표현할 수 있다.

$$V(\tilde{x}_t) = \tilde{x}^T(t)X^{-1}\tilde{x}(t) + \xi_t^T \begin{bmatrix} X & \sigma_1 X \\ \star & Q \end{bmatrix} \xi_t + \int_{t-d(t)}^t e^{\alpha(s-t)} \tilde{x}^T(s)X^{-1} [R_1 + (s-t)R_2] X^{-1} \tilde{x}(s) ds \quad (30)$$

다음으로 (4)의 조건에 의해 (29)로 정의된 Lyapunov-Krasovskii 함수는  $V(\tilde{x}(0))=0$ 의 조건을 만족함을 쉽게 알 수 있으며 (3)으로 정의된 시간지연 값과 Lyapunov-Krasovskii 함수의 변수  $s$ 에 대한 적분구간의 범위에 의하여 다음의 조건이 성립한다.

$$-h \leq -d(t) \leq s-t \leq 0 \quad (31)$$

$$R_1 - hR_2 \leq R_1 - d(t)R_2 \leq R_1 + (s-t)R_2 \leq R_1. \quad (32)$$

이제 (31),(32)의 조건과 보조정리 2에 의하여 (29)로 정의된 Lyapunov-Krasovskii 함수가 모든 상태에 대하여 항상 양확정임을 다음과 같이 보인다.

$$\begin{aligned} V(\tilde{x}_t) &\geq \xi_t^T \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xi_t + \xi_t^T \begin{bmatrix} X & \sigma_1 X \\ \star & Q \end{bmatrix} \xi_t \\ &\quad + e^{-\alpha h} \frac{1}{h} \left( \int_{t-d(t)}^t \tilde{x}^T(s)X^{-1} ds \right) [R_1 - hR_2] \left( \int_{t-d(t)}^t X^{-1} \tilde{x}(s) ds \right) \\ &= \xi_t^T \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xi_t + \xi_t^T \begin{bmatrix} X & \sigma_1 X \\ \star & Q + \frac{1}{h} e^{-\alpha h} (R_1 - hR_2) \end{bmatrix} \xi_t \end{aligned} \quad (33)$$

다음으로 (29)로 정의된 Lyapunov-Krasovskii 함수의 각 항에 대한 시스템(23)의 상태제적에 따른 시간미분 결과를 각각 유도한다. 먼저 첫 번째 항에 대한 결과는 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} V_0(\tilde{x}_t) \\ &= 2\tilde{x}^T(t)X^{-1}\dot{\tilde{x}}(t) \\ &= 2\tilde{x}^T(t)X^{-1} [\hat{A}XX^{-1}\tilde{x}(t) + \tilde{A}_dXX^{-1}\tilde{x}(t-d(t)) + \hat{B}_2w_r(t,d)] \\ &= \xi_t^T \Psi_0 \xi_t \end{aligned}$$

여기서 행렬  $\Psi_0$  및 벡터  $\tilde{\xi}_t$ 는 다음과 같다.

$$\Psi_0 = \begin{bmatrix} \hat{A}X + X\hat{A}^T & \tilde{A}_dX & 0 & \hat{B}_2 \\ \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\xi}_t^T = \left[ \tilde{x}^T(t)X^{-1} \quad \tilde{x}^T(t-d(t))X^{-1} \int_{t-d(t)}^t \tilde{x}^T(s)X^{-1} ds \quad w_r^T(t,d) \right]^T.$$

다음으로 두 번째 항에 대한 시간 미분항을 다음과 같이 유도한다.

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} V_1(\tilde{x}_t) \\ &= 2\xi_t^T \begin{bmatrix} I & \sigma_1 I \\ \star & QX^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{x}(t) - (1-d)\tilde{x}(t-d(t)) \end{bmatrix} \\ &= 2\tilde{\xi}_t^T \left( \begin{bmatrix} I & 0 & \sigma_1 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_1 I & 0 & QX^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}X & \tilde{A}_dX & 0 & \hat{B}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ X & -X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\xi}_t \right) \\ &\quad + 2\xi_t^T \begin{bmatrix} I & \sigma_1 I \\ \star & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ dX^{-1}\tilde{x}(t-d(t)) \end{bmatrix} \\ &\leq \tilde{\xi}_t^T \left( \begin{bmatrix} \hat{A}X + X\hat{A}^T + 2\sigma_1 X & \tilde{A}_dX - \sigma_1 X & \sigma_1 X\hat{A}^T + Q & \tilde{B}_2 \\ \star & 0 & \sigma_1 X\tilde{A}_d^T - Q & 0 \\ \star & \star & 0 & \sigma_1 \tilde{B}_2 \\ \star & \star & \star & 0 \end{bmatrix} \tilde{\xi}_t \right) \\ &\quad + \mu \tilde{x}^T(t-d(t))X^{-1}SX^{-1}\tilde{x}(t-d(t)) + \mu \xi_t^T \begin{bmatrix} \sigma_1 X \\ Q \end{bmatrix} S^{-1} [\sigma_1 X \quad Q] \xi_t \\ &= \tilde{\xi}_t^T (\Psi_1 + \mu Y^T S^{-1} Y) \tilde{\xi}_t \end{aligned}$$

여기서  $\Psi_1$ 과  $Y$ 은 다음과 같다.

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} \hat{A}X + X\hat{A}^T + 2\sigma_1 X & \tilde{A}_d X - \sigma_1 X & \sigma_1 X \hat{A}^T + Q & \hat{B}_2 \\ \star & \mu S & \sigma_1 X \tilde{A}_d^T - Q & 0 \\ \star & \star & 0 & \sigma_1 \hat{B}_2 \\ \star & \star & \star & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y = [\sigma_1 X \quad 0 \quad Q \quad 0].$$

마지막으로 세 번째 항에 대한 시간미분의 결과를 보조정리 1을 이용하여 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} V_2(\tilde{x}_t) \\ &= \tilde{x}^T(t) X^{-1} R_1 X^{-1} \tilde{x}(t) \\ & \quad - e^{-\alpha d(t)} \tilde{x}^T(t-d(t)) X^{-1} [R_1 - d(t) R_2] X^{-1} \tilde{x}(t-d(t)) \\ & \quad - \alpha \int_{t-d(t)}^t e^{\alpha(s-t)} \tilde{x}^T(s) X^{-1} [R_1 + (s-t) R_2] X^{-1} \tilde{x}(s) ds \\ & \quad - \int_{t-d(t)}^t e^{\alpha(s-t)} \tilde{x}^T(s) X^{-1} R_2 X^{-1} \tilde{x}(s) ds \\ & \leq \tilde{x}^T(t) X^{-1} R_1 X^{-1} \tilde{x}(t) \\ & \quad - e^{-\alpha h} \tilde{x}^T(t-d(t)) X^{-1} [R_1 - h R_2] X^{-1} \tilde{x}(t-d(t)) - \alpha V_2(\tilde{x}_t) \\ & \quad - \frac{1}{h} \left( \int_{t-d(t)}^t \tilde{x}^T(s) X^{-1} ds \right) \left( e^{-\alpha h} R_2 \right) \left( \int_{t-d(t)}^t X^{-1} \tilde{x}(s) ds \right) \\ & = \tilde{\xi}_t^T \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\alpha h} (R_1 - h R_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h} e^{-\alpha h} R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\xi}_t - \alpha V_2(\tilde{x}_t) \\ & = \tilde{\xi}_t^T \Psi_2 \tilde{\xi}_t - \alpha V_2(\tilde{x}_t). \end{aligned}$$

이제 첫 번째로 LMI (26)은  $\tilde{x}^T(t) X^{-1} \tilde{x}(t) \leq w_{r,max}^2$  이 성립할 경우 항상  $|u_j(t)| \leq (1/r_j) \cdot u_j^0$  임을 보장함을 다음과 같이 보인다.

$$\begin{aligned} & |u_j(t)| \leq (1/r_j) \cdot u_j^0 \\ & \Leftrightarrow u_j^T(t) u_j(t) \leq \left( \frac{u_j^0}{r_j} \right)^2 \\ & \Leftrightarrow u_j^T(t) \left( \frac{r_j \cdot w_{r,max}}{u_j^0} \right)^2 u_j(t) \leq w_{r,max}^2 \\ & \Leftrightarrow w_{r,max}^2 - u_j^T(t) \left( \frac{r_j \cdot w_{r,max}}{u_j^0} \right)^2 u_j(t) \geq 0 \end{aligned} \quad (34)$$

그리고 (34)에  $\tilde{x}^T(t) X^{-1} \tilde{x}(t) \leq w_{r,max}^2$  의 조건을 S-procedure에 적용하면 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} (34) & \Leftrightarrow w_{r,max}^2 - u_j^T(t) \left( \frac{r_j \cdot w_{r,max}}{u_j^0} \right)^2 u_j(t) \\ & \quad - \sigma_2 \left[ w_{r,max}^2 - \tilde{x}^T(t) X^{-1} \tilde{x}(t) \right] \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \sigma_2 \tilde{x}^T(t) X^{-1} \tilde{x}(t) + (1 - \sigma_2) w_{r,max}^2 \\ & \quad - u_j^T(t) \left( \frac{r_j \cdot w_{r,max}}{u_j^0} \right)^2 u_j(t) \geq 0 \end{aligned} \quad (35)$$

여기서 (35)에 대하여  $w_r^T(t,d) w_r(t,d) \leq w_{r,max}^2$  의 조건과  $u_j(t) = K_j \tilde{x}(t)$  및  $K_j = W_j X^{-1}$ 의 관계를 적용하면 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} (35) & \Leftrightarrow \sigma_2 \tilde{x}^T(t) X^{-1} X X^{-1} \tilde{x}(t) + (1 - \sigma_2) w_r^T(t,d) w_r(t,d) \\ & \quad - \tilde{x}(t) X^{-1} W_j^T \left( \frac{r_j \cdot w_{r,max}}{u_j^0} \right)^2 W_j X^{-1} \tilde{x}(t) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \left[ \tilde{x}^T(t) X^{-1} \quad w_r^T(t,d) \right] \begin{bmatrix} \sigma_2 X & 0 \\ 0 & (1 - \sigma_2) I \end{bmatrix} \\ & \quad - \begin{bmatrix} W_j^T \\ 0 \end{bmatrix} \left( \frac{u_j^0}{r_j \cdot w_{r,max}} \right)^{-2} \begin{bmatrix} W_j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{-1} \tilde{x}(t) \\ w_r(t,d) \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (36)$$

이제 (36)에 대하여 Schur complement를 적용하면 LMI(26)을 얻을 수 있다. 다음으로  $w_{r,max}^2 \leq V(\tilde{x}_t)$  과  $w_r^T(t,d) w_r(t,d) \leq w_{r,max}^2$  및  $\frac{d}{dt} V(\tilde{x}_t) < 0$ 의 조건을 S-procedure를 적용하여 다음과 같은 결과를 유도한다.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} V(\tilde{x}_t) - \alpha [w_{r,max}^2 - V(\tilde{x}_t)] - \alpha [w_r^T(t,d) w_r(t,d) - w_{r,max}^2] < 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{d}{dt} V(\tilde{x}_t) + \alpha V(\tilde{x}_t) - \alpha w_r^T(t,d) w_r(t,d) < 0. \end{aligned} \quad (37)$$

여기서 LMI (26)의 성립조건에 의하여 convex hull을 이용한 시스템 방정식 (23)-(24)에 대하여 유도된 Lyapunov-Krasovskii 함수의 각 항에 대한 미분 결과를 적용하면 아래의 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} V_0(\tilde{x}(t)) + \frac{d}{dt} V_1(\tilde{x}_t) + \frac{d}{dt} V_2(\tilde{x}_t) + \alpha V(\tilde{x}_t) \\ & \quad - \alpha w_r^T(t,d) w_r(t,d) \\ & < \tilde{\xi}_t^T (\Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2 + \mu Y^T S^{-1} Y) \tilde{\xi}_t - \alpha V_2(\tilde{x}_t) \\ & \quad + \alpha [V_0(\tilde{x}(t)) + V_1(\tilde{x}_t) + V_2(\tilde{x}_t)] - \alpha w_r^T(t,d) w_r(t,d) \end{aligned} \quad (38)$$

이며 보조정리 3에 의하여 다음의 결과가 성립한다.

$$\begin{aligned} (37) & \Rightarrow V(\tilde{x}_t) \leq w_{r,max}^2 \\ & \Rightarrow \tilde{x}^T(t) X^{-1} \tilde{x}(t) \leq w_{r,max}^2 \end{aligned} \quad (39)$$

따라서 (23)-(24)로 정의된 구동기 용량제한을 갖는 선형시스템의 도달가능 집합은 (39)로 주어진 타원 영역 안에 포함되며  $\varepsilon(X^{-1})$ 임을 나타낸다. 마지막으로 주어진 구동기 용량제한 시간지연 선형시스템의 도달가능 집합이  $\varepsilon(X^{-1})$ 의 영역에 머물며 입력이  $|u_i(t)| \leq (1/r_i) \cdot u_i^0$ 의 범위에 존재할 때 기준입력  $w_r(t,d)$ 로부터 추종오차  $e(t)$ 까지의  $L_2$ 게인이 최소가 되는 조건을 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} V(\tilde{x}_i) + e^T(t)e(t) - \gamma^2 w_r^T(t,d)w_r(t,d) < 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{d}{dt} V(\tilde{x}_i) + \tilde{x}^T(t)\tilde{C}^T\tilde{C}\tilde{x}(t) - \gamma^2 w_r^T(t,d)w_r(t,d) < 0 \\ \Rightarrow & \tilde{\xi}_i^T(\psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \mu\lambda^T S^{-1}Y)\tilde{\xi}_i - \alpha V_2(\tilde{x}_i) \\ & + \tilde{x}^T(t)X^{-1}(\tilde{C}X)^T(\tilde{C}X)X^{-1}\tilde{x}(t) - \gamma^2 w_r^T(t,d)w_r(t,d) < 0 \end{aligned} \quad (40)$$

이제(33),(36)의 결과에 의하여 LMI(25),(26)은 명백하며, 다음으로 (38),(40)에 대하여  $\tilde{\xi}_i$ 를 LMI 외부변수 (outer factor)로 하여 정리한 후 Schur complement를 연속적으로 적용한다. 마지막으로  $\hat{A} = \sum_{i=1}^{2m} \zeta_i [\tilde{A} + \tilde{B}_1 \theta_i K]$ ,  $\hat{B}_2 = \sum_{i=1}^{2m} \zeta_i [\tilde{B}_2 + \tilde{B}_1 \theta_i K]$ 와의 관계식을 대입한 후 각 첨자에 대한 조건을 정리하면 LMI(27),(28)의 결과를 얻을 수 있다. 이것으로서 증명을 마친다.

### 5. 수치 예제

이번 절에서는 제시된 정리의 유용성을 보여주는 수치예제를 제시한다. 다음의 행렬값으로 주어지는 구동기 용량제한을 갖는 시간지연 선형시스템을 고려하자[6].

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ 0.3 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-d(t)) + \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix} \text{sat}(u(t))$$

$$y(t) = [1 \ 0]x(t)$$

단일 제어입력  $u_1$ 에 대한 용량제한 값은  $u_1^0 = 15.0$ 이며 기준입력에 대한 제한값은  $w_{r,max}^2 = 1.0$ 을 가정한다. 허용된 제어입력 값의 범위는 선형구간의 2배까지를 고려하므로  $r_1 = 1/2$ 로 주어지며 이에 해당되는 꼭지점 행렬은  $\theta_1 = 0.5, \theta_2 = 1$ 이 된다. 주어진 예제는  $C = [1 \ 0]$ 이므로  $US_p = I$ 인 경우에 해당되며 각 행렬값은 다음과 같다.

$$\tilde{A} = A, \tilde{A}_d = A_d, \tilde{B}_1 = B_1, \tilde{C} = C, \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0.3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

시스템의 최대 시간지연 값  $h=1$ 이고 시간변화율  $\mu=0$ 인 경우 다음의 세 가지 제어기 구조에 따른 제어게인 및 이에 따른 게인값은 표 1과 같다.

- i) Type 1 :  $u(t) = Kx(t)$
- ii) Type 2 :  $u(t) = Kx(t) + H_m y_r(t)$
- iii) Type 3 :  $u(t) = Kx(t) + H_m y_r(t) + H_d \dot{y}_r(t)$

표 1  $h=1, \mu=0$ 인 경우 제어게인과  $L_2$ 게인

Table 1 Control gain and  $L_2$  gain for  $h=1, \mu=0$

제어기구조	제어 게인	$L_2$ 게인
Type 1	$K = [-5.3187 \ -0.4199]$	0.0650
Type 2	$K = [-5.7111 \ -0.2792],$ $H_m = -0.1999$	0.0425
Type 3	$K = [-5.1315 \ -0.3683],$ $H_m = -0.1480, H_d = 0.1449$	0.0189

다음으로 (7)의 제한조건을 만족하는 다음과 같은 두 가지 기준입력을 고려한다.

i)  $y_{r1}(t) = 0.27[\sin t + \sin 2t]$

ii)  $y_{r2}(t) = \sum_{n=1}^4 \frac{2A \sin \frac{n\pi}{2}}{n\pi} \sin[2\pi(2n-1)ft], A=0.66, f=0.1$

여기서 기준입력  $y_{r2}(t)$ 는 구형파에 대한 푸리에 근사로서 급격한 크기 변화를 갖는 기준입력에 대한 예로써 사용되었다. 각 기준입력 파형을 그림 1,3에 나타내고 있으며 그림 2,4는 각 제어기 구조에 따른 기준입력에 대한 추종오차를 나타낸다.

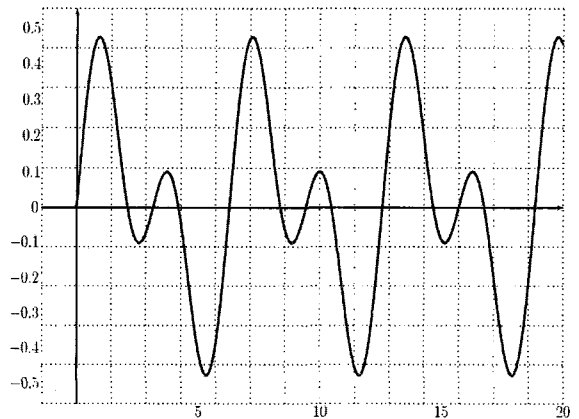


그림 1 기준입력  $y_{r1}(t)$

Fig. 1 Reference input  $y_{r1}(t)$

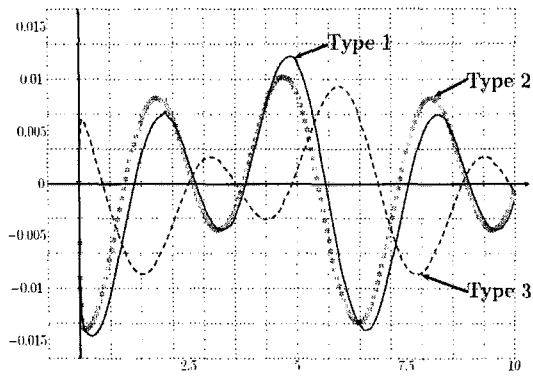


그림 2 기준입력  $y_{r1}(t)$ 에 대한 추종오차  
Fig. 2 Tracking errors for reference input  $y_{r1}(t)$

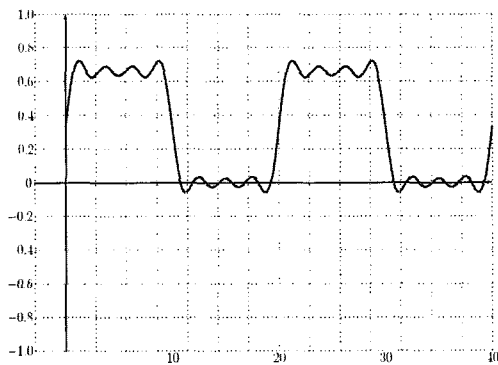


그림 3 기준입력  $y_{r2}(t)$   
Fig. 3 Reference input  $y_{r2}(t)$

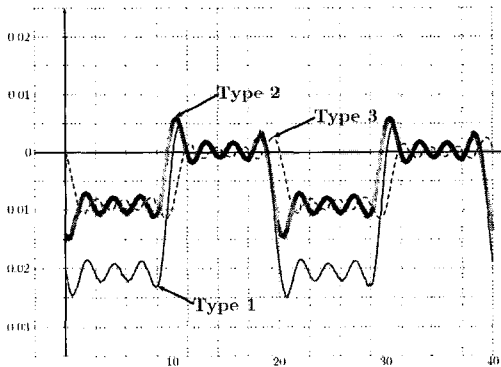


그림 4 기준입력  $y_{r2}(t)$ 에 대한 추종오차  
Fig. 4 Tracking errors for reference input  $y_{r2}(t)$

그림 2,4의 결과에 의하면 기준입력의 변화를 반영하고 있는 Type 2, Type 3 형태의 제어기가 Type 1에 비하여 훨씬 우수한 추종성능을 나타내고 있음을 확인할 수 있다. 다음으로 표 2는 각 기준입력과 제어기 구조에 따른 정상상태 추종오차를 나타내고 있다. 표 2에 의하면 정상상태의 추종오차  $|e_{ss}|_{max}$ 에 대하여도 Type 2, Type 3 구조의 제어기가 Type 1 추종 제어기에 비하여 더 좋은 성능을 보일뿐만 아니라 기준입력의 급격한 상승에도 빠르게 반응하고 있음을 확인할 수 있다.

표 2 각 기준입력과 제어기 구조에 따른 정상상태 추종오차  $|e_{ss}|_{max}$ 의 크기

Table 2 steady-state  $|e_{ss}|_{max}$  values for various reference input and controller structure

	Type 1	Type 2	Type 3
$y_{r1}(t)$	0.0125	0.0140	0.0093
$y_{r2}(t)$	0.0251	0.0153	0.0114

## 6. 결 론

이 논문에서는 Lyapunov-Krasovskii 방법에 기초하여 구동기 용량제한을 갖는 시간지연 선형시스템에 대한 고이득 상태궤환  $H_\infty$  추종 제어기의 설계 기법을 제안하였다. 제안된  $H_\infty$  추종 제어기 설계기법은 추종오차와 기준입력의 변화를 시스템의 동적인 방정식에 포함할 수 있는 새로운 시스템 등가변환과 주어진 시스템에 대한 도달가능집합을 효과적으로 유도할 수 있는 새로운 형태의 Lyapunov-Krasovskii 함수에 기초하고 있으며 최종 변환된 시스템은 기존의  $H_\infty$  제어기 설계의 결과를 그대로 적용할 수 있는 장점이 있음을 확인할 수 있었다. 구동기 용량제한과 시간지연을 갖는 선형시스템의 도달가능집합 및 제어 입력에 대한 제한조건 그리고  $L_2$  조건을 동시에 보장하는 추종 제어기 설계 조건은 비교적 적은 개수의 non-convex 변수를 포함하고 있는 LMI로서 주어졌으며 마지막으로 잘 알려진 수치예제를 통하여 제안된  $H_\infty$  추종 제어기의 추종성능이 우수함을 확인하였다.

## 감사의 글

이 논문은 2007학년도 충북대학교 학술연구지원사업의 연구비지원에 의하여 연구되었음.

## 참 고 문 헌

- [1] P. O. Gutman and P. Hagander, "A new design of constrained controllers for linear systems," IEEE Trans. Autom. Control, vol. 30, pp. 22-33, 1985.
- [2] J. -H. Kim and Z. Bien, "Robust stability of uncertain linear systems with saturating actuators," IEEE Trans. Autom. Control, vol. 39, pp. 202-207, 1994.
- [3] D. S. Bernstein and A. N. Michel(Eds), "Special issue:saturating actuator," Int. J. Robust and Nonlinear Control, vol. 5, pp. 375-540, 1995.
- [4] Z. Lin and A. Saberi, "A semi-global low-and-high gain design technique for linear systems with input saturation-stabilization and disturbance rejection," Int. J. Robust and Nonlinear Control, vol. 5, pp. 381-398, 1995.
- [5] Y. xia and Y. Jia, "Robust control of state delayed



systems with polytopic type uncertainties via parameter-dependent Lyapunov functionals," Syst. Control Lett., vol. 50, pp. 183-193, 2003.

[6] E. Fridman, A. Pila and U. Shaked, "Regional stabilization and control of time-delay systems with saturating actuators," Int. J. Robust and Nonlinear Control, vol. 13, pp. 885-907, 2003.

[7] Niculescu, S. -I., neto, A. T., Dion, J. -M., and Dugard, L., 1995 "Delay-Dependent Stability of Linear Systems with Delayed State: An LMI Approach," Proc. 34th IEEE Conf. on Decision and Control, pp. 1495-1497.

[8] M. Wu, Y. He, J. H. She and G. P. Liu "Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems," Automatica, vol. 40, pp. 1435-1439, Mar, 2004.

[9] E. Fridman and U. Shaked, "An improved stabilization method for linear time-delay systems," IEEE Trans. Autom. Control, vol. 47, no. 11, pp. 1931-1937, Nov. 2002.

[10] X. Li and C. E. de Souza, "Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems: A linear matrix inequality approach," IEEE Trans. Autom. Control, vol. 42, no. 8, pp. 1144-1148, Aug. 1997.

[11] S. Oucheriah, "Robust tracking and model following of uncertain dynamic systems by memoless linear controllers," IEEE Trans. Autom. Control, vol. 44, no. 7, pp. 1473-1577, July. 1999.

[12] H. Wu, "Adaptive robust tracking and model following of uncertain dynamical systems with multiple time delays," IEEE Trans. Autom. Control, vol. 49, no. 4, pp. 611-616, Apr. 2004.

[13] P. Park, "A delay-dependent stability criterion for system with uncertain time-invariant delays," IEEE Trans. Autom. Control, vol. 44, no. 4, pp. 876-877, Apr. 1999.

[14] S.-I. Niculescu, "Memoryless control with an -stability constraint for time-delay systems: An LMI approach," IEEE Trans. Autom. Control, vol. 43, no. 5, pp. 739-743, May, 1998.

[15] S. Tarbouriech and J. M. Gomes da Silva Jr, "Synthesis of controllers for continuous-time delay systems with saturating controls via LMI's," IEEE Trans. Autom. Control, vol. 45, pp. 105-111, 2000..

[16] J. H. Kim, "Delay and its time-derivative dependent robust stability of time-delayed linear systems with uncertainty," IEEE Trans. Autom. Control, vol. 46, no. 5, pp. 789-792, May, 2001.

[17] L. Zaccarian and A. R. Teel, "A common framework for anti-windup, bumpless transfer and reliable design," Automatica, vol. 38, pp. 1735-1744, 2002.

[18] H. Gao and C. Wang, "Delay-dependent robust and filtering for a class of uncertain nonlinear time-delay systems," IEEE Trans. Autom. Control, vol. 48, no. 9, pp. 1661-1666, Sep, 2003.

[19] 이연규, 김진훈, "제한된 구동기 용량을 갖는 시간지연 선형시스템의 제어," 전기학회 논문지, 56권, 9호, pp.1648-1654, 2007. 9.

[20] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.

[21] T. Hu and Z. Lin, Control Systems with Actuator Saturation, Birkhauser, 2001.

[22] W. J. Rogh, Linear System Theory. Upper Saddle River, New Jersey:Prentice Hall, 1996.

저 자 소 개



**이 연 규 (李淵圭)**

1970년 6월 28일생. 1998년 충북대학교 전자공학과 졸업. 2000년 동 컴퓨터과학과 졸업(석사). 2000년~2003년 한국전자통신연구원 연구원. 2004~현재 충북대학교원제어계측공학과 박사과정.  
Tel : 043-286-7329  
E-Mail : hobii@nate.com



**김진훈 (金鎭勳)**

1961년 10월 8일생. 1985년 서울대 전기공학과 졸업. 1985년~1987년 신영전기(주)연구원. 1989년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(석사). 1993년 동 전기 및 전자공학과 졸업(공학박사). 1993년~1994년 경상대 공대 제어계측공학과 전임 강사. 1998년~1999년 미국 UCI 방문교수. 1995년~현재 충북대학교 전기전자 및 컴퓨터공학부 교수.  
Tel : 043-261-2387  
Fax : 043-268-2386  
E-Mail : jinhkim@chungbuk.ac.kr