대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 18 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 18, No. 1, 25-50. Feb 2008

시뮬레이션을 활용한 확률 지식의 교수학적 변환[1)]

신 보 미* · 이 경 화**

확률 교육과 관련된 선행 연구들은 시뮬레이션을 통해 확률 오개념을 극복할 수 있으며 확률 모델링 능력을 향상시킬 수 있다고 밝힌 바 있다. 그러나 확률 오개념 극복과 확률 모델링 능력 향상을 목적으로 학교 교육과정에 시뮬레이션을 도입하고자 할 때, 확률 지식을 가르칠 지식으로 재구성하는 방식에 대한 구체적이고 종합적인 연구는 이루어지지 않았다. 이 연구에서는 확률 오개념 극복 교수학적 상황과 확률 모델링 교수학적 상황 구성에 필요한 교수학적 의도와 세부적인 설정 계획을 국소적 수업 이론과 가설 학습 경로의 형태로 구체화하였다.

Ⅰ. 서 론

확률 교육에서 시뮬레이션은 주요한 교수학적 도구로 논의되어 왔다. Shaughnessy, & Bergman(1993)은 확률 지도에 시뮬레이션을 활용함으로써 학생들의 확률 오개념을 교정할 수 있다고 지적하였다. Yate, Moore, & McCabe (1999)는 시뮬레이션을 통해 학생들의 확률 모델링 능력을 향상시킬 수 있다고 하였다. 그러나 오개념 극복과 모델링 능력 향상을 목적으로 학교 교육과정에 시뮬레이션을 도입하고자 할 때, 확률 지식을 가르칠 지식으로 재구성하는 방식에 대한 구체적이고 종합적인 연구는 이루어지지 않았다.

Zimmerman, & Jones(2002)는 고등학교 수준에서 시뮬레이션을 활용하여 확률을 지도하는 교수 프로그램을 개발하는 연구의 필요성을 지적한 바 있다. Greer(2001)는 효과적인 확률 교수 프로그램을 개발하는데 개발 연구(developmental research) 방법론이 쓰일 수 있다고 주장하였다. Pfannkuch(2005)는 Gravemeijer (1998)와 Skovsmose, & Borba(2000)의 개발 연구 방법론에 기초하여 확률과 통계적 추론을 연결 짓는 교수 과정을 개발하였다. Bakker(2004)는 개발 연구를 통해 통계 교육에 대한 교수 이론과 분포의 광범위한 개념 학습을 지원할 수 있는 교육적 수단을 개발하였다. 개발 연구에서는 새로운 교과 과정이 충족시켜야 할 사항인 교육과정 설계의 아이디어를 국소적 수업 이론(local instruction theory)의 형태로 설정하여 학습 목표, 수업 활동, 예견된 학습 경로의 3가지 요소로 구성된 가설 학습 경로(hypothetical learning trajectory)를 개발하고 정당화한다(Gravemeijer, 1998; Simon, 1995).

이 연구는 시뮬레이션이 지닌 교수학적 가치

* 광주시교육정보원, bomi0210@hanmail.net
** 한국교원대학교, khmath@knue.ac.kr
1) 이 논문은 신보미의 박사학위논문 중 일부를 요약하고 재구성한 것임

를 확률 교육과정에서 현실적으로 구현하는 방식으로 확률 오개념 극복 교수학적 상황과 확률 모델링 교수학적 상황을 설정하는데 목적이 있다. 이를 위해 각 교수학적 상황 구성을 위한 전반적인 아이디어인 교수학적 의도와 세부적인 설정 계획을 국소적 수업 이론과 가설 학습 경로의 형태로 구체화하고 종합하고자 한다.

II. 이론적 배경

1. 현행 교육과정에서의 확률 교육

확률은 학교 수학 교육과정의 주요 영역으로 확률에 대한 학습은 초등에서 시작하여 고등학교 시기까지 지속적으로 진행된다. 전통적으로 결정론적(deterministic) 맥락에서 지도되어 온 학교 수학의 특성은 확률 교육에도 영향을 끼쳐 현재 고등학교에서 확률은 조합론에 기초한 수학적 확률로 정의된다(Jones, 2005). 우리나라의 교육과정에서도 마찬가지 관점이 채택되어 있다.

현재 학교수학에서 주요 내용으로 채택된 수학적 확률은 근원사건의 출현 가능성이 동일하다는 전제아래 전체 경우의 수에 대한 해당 사건이 일어날 경우의 수의 비를 나타낸다. 오랫동안 학교 수학에서 경우의 수를 세는 문제(counting problem)는 주요 확률 문제로 간주되어 왔다. 그러나 실제로 세기 전략이나 조합론은 확률 분야 보다는 이산 수학 분야와 보다 관련된다(Scheaffer, Watkins, & Landwehr, 1998). NCTM(2000)의 경우, '세기 문제와 유한 확률 문제를 해결하는 것'은 확률 규준이 아닌 이산 수학 규준에 포함되어 있다. NCTM의 9-10단계 확률 규준에는 '지도의 초점이 옳은 세기 전략을 선택하는 것에서 문제 상황을 분석하고 적절한 시뮬레이션 과정을 설계하는 쪽으로 옮겨져야 한다'로 제시되어 있다. 시뮬레이션을 보다 적극적으로 도입한다면 우리나라 교육과정에서 확률 교육의 관점도 현재와는 달라질 수 있을 것으로 판단된다.

2. 시뮬레이션과 확률 교육

확률 지도에는 대부분의 학교 수학에서 다루는 결정론적 사고(deterministic thinking)와 구별되는 무작위성(randomness)에 대한 인지적 요구가 있다(Jones, 2005). Borovcnik, & Peard(1996)는 결정론적 직관에 의한 논리적, 인과적 추론과는 다른 결과가 확률 분야에는 많기 때문에 학생들의 사전 직관과 확률 구조 사이의 관계가 분명하게 지도될 필요가 있다고 지적하였다. 예전 지식은 새로운 지식과 공존하므로(Pratt, 2005), 좋은 확률 교수는 학생의 직관으로부터 출발해야 한다(Batanero, & Sanchez, 2005). 확률 교육에 시뮬레이션을 도입하는 맥락에는 확률에 대한 학습자 나름의 예전 지식과 새로운 지식의 관계를 파악하게 하려는 의도가 들어 있다.

Saenz(1998)는 학생들의 확률 오개념에 기초하여 수업한 결과, 논리적인 직관에 반하는 확률 문제에 바른 응답을 한 학생의 비율이 두드러지게 높아졌다고 하였다. Batanero, & Sanchez (2005)는 시뮬레이션을 활용하여 학생들의 사전 직관을 교정하였다. Shaughnessy(1992, 1997; Hawkins, Jollife, & Glickman, 1992) 또한 확률에 대한 빈도적 정보를 수집하고 분석함으로써 학생들이 자신의 사전 직관의 부적절성을 인식하여 확률에 대한 오개념을 극복할 수 있도록 하는 교수법으로 시뮬레이션 방법을 제안하였다. 결론적으로 시뮬레이션은 학생들의 사전 직관과 확률 구조를 연결하는 역할을 하여 학

생들이 확률 오개념을 극복하게 하는데 교수학적 도구가 될 수 있다.

Greer, & Mukhopadhyay(2005)는 확률 지식이 실제 현상에 대한 사회적인 활동과 해석에서 출발하였으며, 학문적 지식으로서 확률 지식의 또 다른 본질은 확률 모델링이라고 지적하였다. 확률 모델링은 비결정론적 관계로 구성된 실세계의 모델링이라는 측면에서 확률 지식을 다룬다. 모델링과 관련되는 현대적인 확률 개념을 고려함으로써 일어날 가능성이 높은 사건의 정도를 정량화한 수학적 대상으로서의 확률을 지도할 수 있다. 또한 확률을 통해 실세계와 수학적 구조 사이의 관계로서 모델링의 본질을 학생들이 이해하게 할 수 있다.

Batanero, & Sanchez(2005)와 Pfannkuch(2005)에 의하면 확률 모델링은 그것이 수학적 모델링 과정이기 때문일 뿐만 아니라 확률의 주요 관심사로서 확률 지식의 또 다른 본질이기 때문에 주요하다. Batanero et al. (2005)은 확률 지식의 발생적 본질에 비추어 볼 때 확률에 대한 학습은 모델링 학습과 통합되어야 한다고 주장하였다. Heitele(1975)는 확률에 시뮬레이션의 아이디어를 포함시킨 바 있다. 그는 시뮬레이션이 유사구체적(pseudoconcrete) 모델로서 실제 무작위 상황은 아니지만 무작위 상황을 분석할 때 수학적인 형식주의를 통하지 않고 작업할 수 있는 가능성을 제공한다고 주장하였다. 즉, 시뮬레이션은 실제적인 현상과 확률이라는 수학적 구조 사이를 잇는 중재자 역할을 하여 실세계 맥락에 포함된 확률 문제를 모델링하는 도구로 활용될 수 있다.

Girard(1997, Batanero, et al., 2005: 32에서 재인용)에 의하면 시뮬레이션은 실재와 모델 사이의 혼동에서 일어나는 패러독스를 해결하는데 도움이 된다. 때문에 시뮬레이션을 통해 확률 모델링을 다루는 것이 확률 교육과정의 중심이 되어야 한다. 그는 동전 1개를 2번 던져 뒷면이 적어도 1번 나올 확률을 구하는 문제 상황을 예로 들어 시뮬레이션의 역할을 설명하였다. TT, TH, HH과 같이 구성된 표본공간에 근거하여 구하는 확률을 $\frac{2}{3}$ 으로 계산한 경우와 TT, TH, HT, HH과 같은 표본공간에 기초하여 구하는 확률을 $\frac{3}{4}$ 으로 계산한 경우가 있다고 하자. 교사는 시뮬레이션을 활용하여 통계적 자료를 수집하게 함으로써 두 모델의 적절성을 평가하고 그 결과에 대한 수학적 설명을 시도할 수 있다. 학생들은 시뮬레이션을 통한 확률 모델링 활동에 참여함으로써 무작위 상황을 직접 해석해 보는 경험을 가질 수 있다. 이러한 경험을 통해 확률 지식의 고전적, 주관적, 빈도적 접근 사이에 존재하는 모순도 극복할 수 있다.

Shaughnessy, Canada, & Ciancetta(2003)는 주관적 확률과 확률의 이론적 구조 사이에 갈등이 발생하는 문제 상황이나 이론적인 해가 존재하지 않는 실세계 문제들에 대해서는 시뮬레이션을 통한 실험적 접근이 필요함을 주장하였다. 이들에 의하면 학교 수학에서 확률 지도가 한 번의 시행에서 어떤 사건이 출현할 정확한 확률 값을 이론적으로 구하는 것에만 치중하는 것은 학생들의 확률적 사고 능력의 성장에 기여할 수 없다. 여러 연구들은 확률 지식의 지도가 시뮬레이션을 활용한 반복 시행의 문제 상황을 통해 시행 결과의 변역을 고려해 보는 방식으로 진행되어야 한다고 지적하였다.

3. 교수학적 변환

교육적 의도를 가지고 학문적 지식을 가르칠 지식으로 변형하여 재구성하는 것을 교수학적 변환(didactic transposition)이라고 한다. Chevallard

(1988: 이경화, 1996에서 재인용)는 교수학적 변환의 과정이 '지식의 선언'과 '환경 재조성'의 두 부분으로 구성된다고 설명하였다. 여기서 '지식의 선언'은 가르칠 내용을 선택하고 구성하는 과정을 이르는 말로 교수학적 변환의 첫 단계에 해당한다고 볼 수 있다. 가르칠 내용을 선정하고 구성하는 동안 학문적 지식에 대한 분석과 논의가 이루어진다. 이 때 수학적 개념의 배경에 있는 수학적 사고를 밝히는 것은 무엇보다 중요하다. 교수학적 변환에서 지식의 선언은 교수학적 의도에 종속되므로 가르칠 지식을 포함하는 환경 역시 교수학적 의도에 따라 재조성된다. '환경 재조성'은 교수학적 변환의 세부적인 과정으로 교과서의 구성과 수업 상황의 설정 등에 관련된다.

Kang(1990: 27)은 교과서에서 수학적 지식의 교수학적 변환이 가상의 학생, 교사, 교실 환경 모두를 고려하여 진행된다는 관점에서 의사배경화(pseudo-contextualization)/ 의사개인화(pseudo-personalization), 의사탈배경화(pseudo-decontextualization)/ 의사탈개인화(pseudo-decontextualization) 과정(process)을 거친 결과(consequence)라고 설명하였다.[2] 의사배경화는 교수학적 변환 과정에서 지식의 배경이 교수학적 의도에 의해 재조성되는 것을 의미한다. 교수학적 의도는 변환되기 전 지식의 배경과 변환된 후 지식의 배경을 비교함으로써 가장 잘 탐색될 수 있다. 의사개인화 방식은 교과서에 주어진 설명과 학생 활동 등의 세부적인 구성을 통해 분석될 수 있다. 교사의 활동은 가르칠 지식에 대한 설명과 학생 활동을 유도하는 것으로 특징지을 수 있으므로 교과서 저자는 학생을 주요 독자로 염두에 두면서 교사의 입장에서 교과서를 집필하기 때문이다.

이상에 따르면 교수학적 변환 방식에 대한 연구는 학문적 지식을 가르칠 지식으로 재구성하는 교수학적 의도와 이를 토대로 가르칠 지식의 세부적인 재조직 방식을 개발하는 것으로 구체화할 수 있다.

III. 연구 방법

이 연구는 시뮬레이션을 활용한 확률 지식의 교수학적 변환 방식을 개발 연구 방법론에 의해 국소적 수업 이론과 가설 학습 경로로 구체화하는 과정과 결과로 설명하기 위한 첫 번째 연구로서 개발연구의 예비 설계 단계에 해당한다고 볼 수 있다. 이 연구의 목적은 확률 오개념 극복 교수학적 상황과 확률 모델링 교수학적 상황을 구성하는데 필요한 교수학적 의도와 세부적인 재구성 방식을 국소적 수업 이론과 가설 학습 경로로 예견하여 개발함으로써 교수 실험과 회고 분석을 통해 실제 학습 과정에 비추어 이를 평가하는 후속 연구의 토대를 마련하는 것이다.

Gravemeijer(1998)에 의하면 개발연구[3]의 목표는 가르쳐야 할 주제에 대한 교과 과정을 개발하기 위해 국소적 수업 이론과 가설 학습 경로를 구체화하고 이를 정당화하는 것이다. 개

---

2) Kang(1990: 17-21)에 의하면 수학적인 앎의 과정은 배경화(contextualization)/개인화(personalization), 탈배경화(decontextualization)/탈개인화(depersonalization)로 설명할 수 있다. 교사가 해야 할 주된 일은 학생의 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화를 위한 환경을 제공하기 위해 지식을 재배경화(recontextualization)/재개인화(repersonalization)하는 것이다.

3) 개발연구는 개발과 연구의 순환 과정을 의식적으로 경험하여 자세히 기술함으로써 연구 결과를 정당화하고, 다른 연구자들이 이러한 연구 결과를 자신의 연구 경험으로 느끼게 하는 연구 방법론이다(Freudenthal, 1991).

발 연구는 예비 설계 단계, 교수 실험 단계, 회고 분석 단계의 순환 과정으로 이루어진다. 특히 개발연구의 첫 단계인 예비 설계 단계는 '현행 교과 과정의 문제점은 무엇인가?'에 기초하여 현재의 상황을 분석하는 것에서 시작한다. 이로부터 실제 교수 실험을 실행하기 전에 새로운 교과 과정에 대한 전반적인 밑그림을 그린 다음 이를 구체화한 수업 계열을 구성함으로써 교과 과정을 설계한다. 이 단계의 결과로 학습목표, 수업 활동 계획, 수업에서 학생들의 사고와 이해가 어떻게 전개될 것인지에 대해 연구자가 예상하는 학습 경로로 구성된 가설 학습 경로가 설정된다(우정호 외, 2006).

Bakker(2004)는 예비 설계 단계에서 분포의 간단한 수학적 현상학을 연구하였으며 통계적 개념과 그래프에 대한 역사적 연구에 의해 교수학적인 제재를 설계하였다. 그는 이러한 설계의 과정에서 부가적으로 학생들의 사전 지식을 알아보기 위한 예비 면담을 실시하였는데, 이를 통해 학생들의 사전 지식에 대해 보다 많이 알게 되면 가설적인 국소적 수업 이론의 출발점을 설정할 수 있을 것이기 때문이다. 결과적으로 그는 분포에 대한 수학적인 분석, 주요 통계적 개념에 대한 역사적 연구, 통계 교육과 관련된 선행 연구와 예비 면담 결과의 분석을 통해 자신의 가설적인 국소적 수업 이론을 위한 기초를 형성하였다. 이러한 예비 설계 단계를 거침으로써 교사나 교과서의 저자는 수학적 지식을 교수학적으로 변환하는 의사배경화/의사개인화 방식에 대한 실마리를 얻을 수 있다.

교수 실험 단계에서는 가설 학습 경로를 수정 보완하기 위해 실제 수업에서 학생들의 학습 과정에 대한 자료를 수집한다. 교수 실험을 통해 학생이 수학적 지식을 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화 하는 과정의 특징을 살펴봄으로써 미시적 수준에서 각 교수 실험의 의사배경화/의사개인화, 의사탈배경화/의사탈개인화 방식을 검증하고 조정할 수 있다. 회고 분석 단계에서는 예비 설계 단계에서 설정된 국소적 수업 이론과 가설 학습 경로를 교수 실험 과정에서 드러난 실제 학습 과정의 특징과 비교한다. 회고 분석 단계를 거친 후 국소적 수업 이론과 가설 학습 경로는 교수 실험 동안에서 보다 더욱 철저한 방식으로 재구성되며 정교화되어 체계적인 형태를 갖추게 된다.

개발 연구에서는 학습에 관한 이론과 학습을 지원할 수 있도록 고안된 수단의 개발을 목적으로 국소적 수업 이론을 체계화하기 위해 학습 과정을 가설적으로 예견한 다음 실제 학습 과정에 비추어 이를 평가한다. 교수학적 변환론에서는 교육적 의도를 가지고 학문적 지식을 가르칠 지식으로 변형하여 의사배경화/의사개인화, 의사탈배경화/의사탈개인화함으로써 수학적 지식의 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화 과정을 촉진할 수 있는 방안을 연구한다. 이러한 점에서 교수학적 변환론의 주요 연구 문제는 개발 연구에서 개발과 연구의 순환 과정에 의해 구체화 되는 국소적 수업 이론과 가설 학습 경로를 통해 조작적으로 다루어질 수 있을 것으로 보인다.

우선 각 교수학적 상황 구성을 위한 교수학적 의도인 국소적 수업 이론은 확률 교육과정에 시뮬레이션을 도입하는 목적을 확률 오개념 극복과 확률 모델링의 관점에서 설명하고 있는 선행 연구(Batanero, & Sanchez, 2005; Shaughnessy, 1992, 1997; Hawkins et al., 1992; Batanero et al., 2005; Heitele, 1975; Yate et al., 1999; Zimmerman, & Jones, 2002)와 빈도적 관점에 있는 확률 교육과정과 관련되는 선행 연구(Pratt, 2005; Lightner, 1991; Pfannkuch, 2005; Scheaffer et al., 1998)를 다음 세부 질문에 비추어 분석, 검토함으로써 설정한다.

1. 확률 오개념 극복 교수학적 상황과 확률 모델링 교수학적 상황 설정의 핵심 원리는 무엇인가?
2. 교수학적 상황의 진행 단계를 어떻게 구체화할 수 있는가?
3. 교수학적 상황 전반에 걸쳐 다루어질 수 있는 주요 내용 요소는 무엇인가?
4. 주요 내용 요소를 다룰 때 시뮬레이션을 어떻게 활용할 수 있는가?

확률 오개념 극복 교수학적 상황 설정의 핵심 원리와 진행 단계를 구체화함에 있어 시뮬레이션을 확률 모델링 능력 향상의 목적에서 도입하는 선행 연구 결과도 분석하고, 확률 모델링 교수학적 상황과 관련된 국소적 수업이론을 설정할 때도 마찬가지 방법으로 확률 오개념 극복과 관련된 연구도 검토하도록 한다. 이러한 연구 방법은 후속 연구에서 확률 오개념 극복 교수학적 상황에 따른 교수 실험에 참여한 학생들의 확률 모델링 능력에 대한 특징과 확률 모델링 교수학적 상황에서 참여한 학생들의 확률 오개념 정도 등을 분석하는데 기여할 수 있다.

선행 연구로부터 교수학적 상황 전반에 걸쳐 주요하게 다루어질 내용 요소를 추출하고 그 지도 원리를 설정함에 있어 가능한 한 현재 고등학교 확률 교육과정 내에 포함된 내용 요소와 관련된 연구 결과에 초점을 맞추어 분석하되 그 지도 원리는 해당되는 내용 요소가 지닌 학문적 지식으로서의 고유한 특징을 구체화하는 방법으로 연구를 진행한다. 이를 통해 확률 교육과정에 시뮬레이션을 도입하고자 할 때, '지식의 선언'과 '환경 재조성'이라는 확률 지식의 교수학적 변환 과정을 구체적이고 실제적인 방식으로 제시할 수 있을 것으로 기대된다.

다음으로는 각 교수학적 상황을 구현하기 위한 세부적인 재구성 방식인 가설 학습 경로의 출발점을 찾기 위해 주요 내용 요소와 확률 오개념 정도, 확률 모델링 수준 등에 대한 학생들의 사전 능력을 알아보는 설문을 실시한다. 설문 과제는 각 교수학적 상황을 위한 국소적 수업 이론을 토대로 선행 연구 결과를 참고[4]하여 연구자가 개발하며, 각 과제의 타당성은 전문가의 자문을 통해 평가한다[5]. 설문은 고등학교 정규 교육과정에서 확률을 학습한 경험이 없는 일반계 고등학교 2학년 중상위권 학생 21명을 대상으로 약 30여분에 걸쳐 진행한다. 설문 결과는 확률 오개념을 극복하는데 유추가 미친 영향을 밝힌 Fast(1997)의 평가 방법을 틀로 하여 '정답의 유무', '작성한 답에 대한 확신 정도', '정답 작성 이유의 타당성 정도'에 따라 분석한다. 설문 결과를 정답의 유무뿐만 아니라 작성한 답에 대한 확신 정도와 정답 작성 이유의 타당성 정도에 비추어 검토함으로써 학생들의 설문 과제 해결 수준을 보다 깊이 있게 분석할 수 있으며, 이를 통해 '각 교수학적 상황에서 다루어질 확률 문제 상황에는 구체적으로 어떤 것이 있는가?'와 같은 질문에 의미 있는 답을 얻을 수 있다고 생각된다.

각 교수학적 상황별 국소적 수업 이론과 설문 결과를 기반으로 구체적인 교수학적 상황 설정 계획인 가설 학습 경로를 학습목표, 수업 활동 과제 계획, 예견된 학습 경로의 형태로 개발한다. 가설 학습 경로의 학습목표는 각 교수학적 상황의 목적에 비추어 설문 결과에 따라 설정함으로써 실제 수업 상황에서 각 차시별 학습목표의 역할을 할 수 있도록 한다. 수업 활동 과제는 각 교수학적 상황의 국소적 수

4) 확률 오개념을 일으키는 대표적인 7가지 판단 전략을 기술한 Fischbein, & Schnarch(1997)의 연구와 실세계 맥락의 확률 과제를 기술하고 있는 Gnanadesikan, Scheaffer, & Swift(1987)의 연구를 참고한다.
5) 구체적인 설문 과제는 Ⅳ.의 2.와 4.를 참고하기 바란다.

업이론과 학습목표에 근거하여 현재 고등학교 교육과정, IMP(Integrated Mathematics Program) 교과서(Rubenstein, Craine, & Butts, 1998: 377)[6], 대학 수준의 확률 통계학 교재 등에서 다루어지는 문제 상황을 수정, 보완하여 구체화하여 수업 상황에서 현실적인 학습 과제로 활용될 수 있도록 한다. 예견된 학습 경로는 앞서 구체화된 수업 활동 과제를 연구자가 직접 시뮬레이션을 통해 탐구해봄으로써 실제 교수학적 상황에서 학생들이 따를 것으로 예상되는 학습 경로를 사고 실험한 결과로써 기술한다.

Ⅳ. 연구 결과

다음은 각 교수학적 상황 구성을 위한 교수학적 의도인 국소적 수업 이론을 각 교수학적 상황의 진행 단계와 각 단계별 특징, 주요 내용 요소의 지도 원리 등을 통해 기술한다. 또한 교수학적 상황의 세부적인 재조직 방식인 가설 학습 경로는 그 설정 방향과 차시별 특징을 통해 구체화한다.

1. 확률 오개념 극복 교수학적 상황을 위한 국소적 수업 이론

가. 확률 오개념 극복 교수학적 상황 진행 단계

교수학적 상황론(Brousseau, 1997; Sensevy, Schubauer, Mercier, Ligozat, & Perrot, 2005)의 관점에서 볼 때, 학생들은 환경에 적응함으로써 지식을 구성한다. 기존의 지식 체계는 새로운 상황의 적응에 도움이 될 수도 있지만 경우에 따라서는 부적응을 유발할 수도 있다. 오개념은 새로운 문제 상황에의 적응을 어렵게 하는 기존의 지식 체계 중의 일부이다. 오개념 역시 일반 지식과 마찬가지로 그 기각에 저항하며 최소한으로 수정되려는 특성을 지닌다. 여러 선행 연구들(Borovcnik, & Peard, 1996; Batanero, & Sanchez, 2005; Fischbein, & Schnarch, 1997; Shaughnessy, 1992, 1997)에 의하면 확률 지식의 배경화/개인화 과정에서 형성된 오개념을 탈배경화/탈개인화하는 것은 쉽지 않다. 학생들이 지닌 확률 오개념의 대부분은 특정한 배경을 지닌 문제 상황에는 적합하게 작용하지만 그러한 배경 밖에 존재하는 새로운 문제 상황에의 적응은 방해하는 지식들이다(Fischbein, & Schnarch, 1997). 확률 오개념의 이러한 특성 때문에 학생들은 때때로 문제 상황과의 사이에 드러나는 모순을 무시하고 더 나은 지식으로의 성장에 저항하게 된다. 따라서 보다 나은 지식을 단순히 전달함으로써 확률 오개념을 사라지게 하려는 시도는 확률 오개념 극복에 효과적이지 않다(Batanero, & Sanchez, 2005; Pratt, 2005; Saenz, 1998).

확률 오개념을 극복하기 위해서는 교수학적 의도가 충분히 포함된 새로운 교수학적 상황의 설정이 필요하다. 학생은 보다 적극적으로 배경화/개인화 과정의 오류를 확인함으로써 이를 거부하는 이유를 새로운 지식에 합체시켜 탈배경화/탈개인화 과정을 진행할 수 있어야 한다. 학생들은 자신들의 인지 구조에 존재하는 확률 개념이 특정한 배경에서는 유용하였지만 새로운 문제 상황이나 더 넓어진 배경에서는 부적

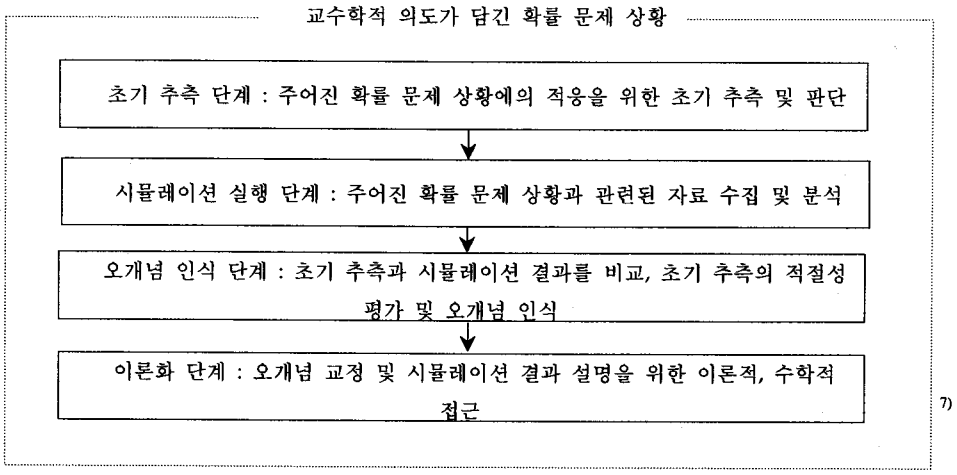
6) 이는 미국 NCTM 규준집의 아이디어를 구현하고자 한 Core-Plus, UCSMP, IMP, STEM 등의 대형 프로젝트 결과 출시된 교과서이다. 이 교과서는 수학적 개념을 풍부한 맥락과 더불어 실생활과의 관련 속에서 제시하는데 주안점을 두면서 주제 중심 전개 방식을 따르고 있으며, 이러한 유형의 교과서가 점차 미국 교과서들의 주류를 이루는 추세이다(박경미, 임재훈, 2002: 320, 323). .

합하다는 것을 구체적으로 인식하여야 한다. 이로써 학생들은 확률 지식에 대한 자신의 사고 과정을 재검토하고 이를 개선하고자 노력할 것이기 때문이다.

확률 오개념 극복 교수학적 상황에서 교사는 학생들을 기존의 지식 체계로는 부적응이 드러나는 새로운 문제 상황에 참여하게 한다. 이로부터 교사는 학생이 지닌 확률 오개념을 끌어낼 계기를 마련할 수 있다. 문제 상황에 대한 초기 추측과 이후 진행되는 시뮬레이션 활동을 통해 학생들은 자신의 지식 체계가 부적절함을 인식한다. 학생들은 확률 오개념을 직접 확인하게 됨으로써 스스로 기존의 인지구조를 재구성하려는 교수학적 책임을 갖게 된다. 교수학적 책임은 학생들로 하여금 새로운 확률 문제 상황의 제한 조건을 만족시키기 위해 필요한 것을 적극적으로 찾아내고 적절한 전략을 만들어 수행하도록 한다. 확률 오개념 극복의 교수학적 책임이 교사에서 학생으로 자연스럽게 양도(devolution; Brousseau, 1997)되게 함으로써 교수학적 상황이 비교수학적 상황으로 이행되도록 한다. 이를 위해 확률 오개념 극복 교수학적 상황의 진행은 [그림 Ⅳ-1]의 절차에 따른다.

나. 확률 오개념 극복 교수학적 상황 진행 단계의 특징

이 연구의 확률 오개념 극복 교수학적 상황은 초기 추측 단계, 시뮬레이션 실행 단계, 오개념 인식 단계, 이론화 단계를 거쳐 진행된다. 초기 추측 단계에서 학생들은 주어진 문제 상황에 대해 초기 추측 및 판단을 내린다. 여기에 활용될 문제 상황은 확률 오개념 여부를 알아보기 위해 선행 연구에서 사용한 과제들에 기반하여 구성한다. 교사는 학생들이 내릴 초기 추측을 가상해 보는 사고 실험을 통해 예견되는 오개념을 극복하는데 필요한 주요 내용



7)

[그림 Ⅳ-1] 확률 오개념 극복 교수학적 상황 진행 단계

7) 이는 Shaughnessy(1997, 1993)가 대학 신입생들로 이루어진 소그룹을 대상으로 확률 개념을 소개하는 10주간의 집중 교육 과정에서 실험적인 활동에 근거한 과정(experimental activity-based course)으로 진행한 지도의 4단계를 구체화한 것이다.

요소를 추출하여 그 수학적 사고의 배경을 사전에 분석한다. 이는 수업 상황 설정을 위해 미시적 수준에서 행해지는 '지식의 선언' 과정으로 볼 수 있다.

학습자는 시뮬레이션을 통해 확률 지식의 배경화/개인화 과정을 적극적으로 반성하고 자신의 확률 오개념을 탈배경화/탈개인화 하려고 노력한다. 즉, 확률 오개념 극복 교수학적 상황에서 시뮬레이션은 무작위 상황을 구체화하기 위한 교수학적 수단이다. 시뮬레이션을 실행함으로써 학생들은 자신의 확률 오개념을 확인할 수 있으며 이를 극복하려는 동기를 갖게 된다. 학생들은 초기 추측을 평가하기 위한 자료 수집의 목적에서 구체물이나 웹문서를 통한 시뮬레이션을 실행한다. 시뮬레이션을 수월하게 실행하기 위하여 학생들은 웹 문서의 간단한 조작을 배울 필요가 있다. 이 때, 교사는 학생들의 교수학적 관심이 웹문서의 조작으로 이동하지 않도록 주의한다. 교수의 목적이 교수학적 발견 수단인 시뮬레이션으로 이동하는 메타인지적 이동(meta-cognitive shift; Kang, 1990)이 일어날 수 있음을 염두에 둔다.

오개념 인식과 이론화 단계는 의도된 비교수학적 상황(adidactical situation; Brousseau, 1997)이다. 이 단계에서 교사는 교수학적 의도를 가능한 숨기고 학생 스스로 문제 상황에 적응하여 초기 추측의 적절성을 평가함으로써 시뮬레이션 결과를 이론화할 수 있도록 한다. 학생들은 오개념 인식 단계에서 자신의 확률 지식에 대한 배경화/개인화 과정을 반성하고 이론화 단계에서 이에 대한 탈배경화/탈개인화를 진행한다. 이론화 단계에서 학생들은 초기 추측이 부적절하게 된 이유를 살피고 시뮬레이션 결과를 설명하기 위한 이론적, 수학적 방법을 모색한다. 시뮬레이션 결과를 수학화하는 과정을 통해 학생들은 주요 내용 요소에 대해 자연스럽게 학습할 수 있다. 최종적으로 학생들은 주어진 확률 문제 상황에 대한 자신들의 새로운 적응 과정을 평가하고 그 결과를 반성할 수 있다.

이상으로부터 확률 오개념 극복 교수학적 상황 설정을 위한 국소적 수업 이론은 다음과 같이 요약할 수 있다.

1) 확률 오개념은 보다 나은 지식을 단순히 전달함으로써는 사라지지 않는다. 학생이 적극적으로 배경화/개인화 과정의 오류를 확인함으로써 이를 거부해야 하는 이유를 새로운 지식에 합체시켜 탈배경화/탈개인화 과정을 진행할 수 있도록 한다.
2) 기존의 인지 구조로는 부적응이 드러나는 문제 상황을 설정하여 시뮬레이션을 통해 학생 스스로 자신의 오개념을 확인하고 시뮬레이션 결과를 이론화하도록 한다.
3) 확률 오개념 극복 교수학적 상황은 초기 추측, 시뮬레이션 실행, 오개념 인식, 이론화의 단계를 거쳐 진행되도록 한다.
4) 교수의 목적이 교수학적 발견 수단인 시뮬레이션으로 이동하는 메타인지적 이동이 일어나지 않도록 주의한다.

다. 주요 내용 요소의 지도 원리

이 연구에서 설정한 확률 지식의 교수학적 변환 방향은 확률 개념에 있어 빈도적 관점의 의미를 보다 살리고 주관적 측면을 다소간 고려할 것을 주장하는 선행 연구(이경화, 1996; Greer, 2001; Pratt, 2000; Shaughnessy et al., 2003)의 연장선에 있다. 이에 빈도적 관점의 확률 교육과정과 관련된 선행 연구를 분석함으로써 확률 오개념 극복 교수학적 상황과 확률 모델링 교수학적 상황 전반을 통해 다루어질 주요 내용 요소를 다음 3가지로 추출하였다: 통계적 확률, 큰 수의 법칙, 통계적 추론.

통계적 확률은 구체적인 사건의 확률을 도수적으로 추정함으로써 실제 사건에서 확률을 결정하는 방법이다. Shafer(1996)와 Shaughnessy

(1992)에 의하면 실제 상황에서는 등확률(equipossibility)의 전제가 거의 성립하지 않기 때문에 등확률의 전제를 조건으로 정의된 수학적 확률보다는 통계적 확률이 유용하다. 따라서 이론적인 해가 존재하지 않는 문제 상황이나 고전적 이론과 주관적인 직관 사이에 갈등이 발생하는 문제 상황은 시뮬레이션을 활용한 통계적 확률에 의해 다루어지는 것이 바람직하다(Shaughnessy et al., 2003). Shaughnessy et al. 와 Batanero & Sanchez(2005)는 통계적 확률은 반복 시행의 문제 상황을 통해 그 시행 결과의 변역을 고려하는 방식으로 지도되어야 한다고 하면서 이 때 큰 수의 법칙에 대한 이해가 중요하다고 지적하였다.

큰 수의 법칙은 통계적 확률이 무작위 사건의 객관적 특성이라는 사실을 설명해 준다(Batanero et al., 2005). Pratt(2005)는 무작위성에 대한 전문적인 이해와 초등적인 이해를 구별하는 주요 원리인 큰 수의 법칙이 중고등학교 확률 교육과정의 핵심 아이디어라고 지적하였다. 이러한 맥락에서 학생들은 큰 수의 법칙 이면에 존재하는 확률에 대한 아이디어를 인식할 수 있어야 한다. 여러 선행 연구(Freudenthal, 1972; Shin, & Lee, 2006)에 의하면 큰 수의 법칙은 반복 시행에 의한 실험적 접근을 통해 상대도수가 수학적 확률 주변에서 변화하는 현상을 실제 경험하게 함으로써 적절하게 지도될 수 있다. Biehler(1991)는 큰 수의 법칙 이면에 존재하는 아이디어를 학생들이 이해할 수 있도록 하는데 테크놀로지가 중요한 역할을 한다고 설명하였다.

실제 자료를 관찰함으로써 통계적 특성을 추론하기 위해서는 이론적인 확률 모델을 고려해야 한다. 따라서 통계적 추론과 확률은 분리될 수 없다(Lightner, 1991). Pfannkuch(2005)에 의하면 통계적 추론은 자료 탐색을 통한 실제적인 경험으로부터 얻어지는 비형식적 추론을 기반으로 중심에 의한 추론(reasoning with measures of center), 변이성에 대한 추론(distributional reasoning), 표본 추론(sampling reasoning)을 거쳐 지도될 수 있다. 중심에 의한 추론과 변이성에 대한 추론은, 개별 사건은 예측 불가능할 수 있지만 그룹의 전체 모습은 안정되어 가는 경향이 있다는 것을 인식하는 것으로 큰 수의 법칙 이면에 존재하는 아이디어와 관련된다. 학생들은 자료 집합에 존재하는 변이성을 중심에 의한 추론에 기초하여 범위(range)를 통해 살필 수 있어야 한다. 표본 추론은 표본의 크기에 따라 자료의 변화 양상을 인식할 수 있는 것이다. Konold(1994)은 표본 추론을 재추출(resampling) 방법에 의해 지도할 것을 주장하였다. 컴퓨터 시뮬레이션을 통한 재추출 방법에 의해 통계적 확률과 수학적 확률 사이의 관계를 설명해 주는 큰 수의 법칙에 대한 이해를 보다 깊게 할 수 있다(Scheaffer, 1992; Stohl, & Tarr, 2002).

이상으로부터 통계적 확률, 큰 수의 법칙, 통계적 추론은 빈도적 관점에서 확률 지식의 이해를 위해 하나의 연결 고리로서 지도되어야 함을 알 수 있다. 세 가지 내용 요소 중 어떤 한 가지 내용 요소에 대한 이해는 나머지 두 내용 요소의 이해 정도에 기초한다고 볼 수 있다. 이 연구의 교수학적 상황 전반에 걸쳐 다루어질 주요 내용 요소인 통계적 확률, 큰 수의 법칙, 통계적 추론은 다음 사항에 유의하여 접근하도록 한다[8].

5) 통계적 확률을 다룰 때는 전체적인 경향으로서 중심 집중도와 함께 자료의 개별 특성으

8) 주요 내용 요소에 대한 국소적 수업 이론은 확률 모델링 교수학적 상황에도 공통으로 적용된다.

로서 변이성이 고려되도록 한다.

6) 개별 자료의 변이성을 고려할 때는 전체적인 중심 집중 경향을 생각하여 통계적 자료가 존재하는 범위를 추론할 수 있도록 한다.
7) 통계적 확률은 표본의 크기가 커질수록 그 변이성이 작아지고 중심 집중 경향이 커진다는 큰 수의 법칙과 함께 지도한다.
8) 큰 수의 법칙 이면에 있는 확률적 사고는 재추출 전략과 반복 시행을 통한 실제 경험에 의해 확인하도록 한다.

2. 확률 오개념 극복 교수학적 상황을 위한 가설 학습 경로

가. 가설 학습 경로 설정 방향

앞서 구체화된 국소적 수업 이론을 기반으로 학습 목표, 수업 활동 과제 계획, 예견된 학습 경로로 구성되는 가설 학습 경로 설정 방향을 정하였다. 국소적 수업 이론 1)을 교수학적 상황 전반에 구현하기 위하여 국소적 수업 이론 2)에 따라 학생 스스로 자신의 부적합한 인지 구조를 확인할 수 있도록 하는 새로운 문제 상황을 구성하였다. 기존의 인지 구조로는 부적응이 드러나는 문제 상황을 설정하기 위한 아이디어는 설문 결과로부터 얻었다. 설문에서 학생들은 등확률(문항1, 문항8), 변이성(variability)(문항2), 연결사와 조건사, 인과적 효과(effect of the time axis)(문항5)에 대한 오개념을 나타내었다. 반면에 이용가능성(availability)에 의한 오개념(문항6)은 드러나지 않았으며, 사건의 독립성

<표 Ⅳ-1> 확률 오개념에 대한 설문 결과 요약

설문 문항	답지	응답자수	확신 정도			오개념
			전혀	약간	절대적	
1. 6개의 눈이 나올 가능성이 같은 주사위 2개를 던졌을 때 다음 중 더 잘 일어날 것 같은 경우는?	**① 5와 6의 눈**	3		1	2	
	② 5와 5의 눈					
	③ 어떤 것이든 같다	18	2	8	8	등확률
8. 압정 3개를 한꺼번에 던졌을 때, 침이 있는 부분이 3번 나올 확률은 등 부분이 3번 나올 확률보다	**① 크다.**	7	2	2	3	
	② 작다.	6		2	4	
	③ 같다.	8	2	4	2	등확률
2. 빨간 사탕이 50개, 파란 사탕이 30개, 노란 사탕이 20개 들어 있는 상자에서 한 번에 10개씩의 사탕을 꺼내 빨간 사탕의 개수를 확인한 다음 다시 집어넣어 잘 섞은 다음 다시 10개의 사탕을 꺼내 빨간 사탕의 개수를 세는 시행을 5번 반복하였을 때, 각 시행에서 얻어진 빨간 사탕의 개수로 가장 적절한 것은?	① 8, 9, 7, 10, 9	2	2			
	② 3, 7, 5, 8, 5	3		1	2	
	③ 5, 5, 5, 5, 5	13	5	6	2	변이성
	④ 2, 4, 3, 4, 3	1	1			
	⑤ 1, 3, 5, 7, 9	2	1	1		결과적 접근
6. 10명 중에서 8명의 대표를 고르는 경우수가 10명 중에서 2명의 대표를 고르는 경우의 수보다 더	① 많다.	2	1		1	
	② 적다.					이용가능성(availability)
	③ 같다.	19		8	13	
7. 6개의 눈이 나올 가능성이 같은 주사위 1개를 3번 던져 5의 눈이 3번 나올 확률을 p, 6개의 눈이 나올 가능성이 같은 주사위 3개를 1번 던져 5의 눈이 3번 나올 확률을 q라 하면 p가 q보다	① 크다.	3		2	1	독립성
	② 작다.	4		4		
	③ 같다.	14	5	5	4	
10. 앞면과 뒷면이 나올 가능성이 같은 동전 1개를 5번 던졌더니 TTTTT라는 결과를 얻었다. 이 동전을 6번째 던졌을 때 나올 가능성이 가장 높은 결과는?	① T	2	1	1		
	② H	2		2		부적최근효과 (gambler's fallacy)
	③ T든 H든 같다.	17	1	6	10	

(문항7, 문항10)에 대해서도 비교적 적절하게 이해하고 있었다.

수업 활동 과제는 등확률, 연결사와 조건사, 인과적 효과, 변이성 등의 오개념과 관련되는 과제들로서 선행 연구(Batanero, & Sanchez, 2005; Shaughnessy, 2003; Fischbein, Nello, & Marino, 1991)에서 추출하여 수정, 보완하였다. 과제 복잡성의 이유로 설문에서 다루어지지는 않았지만 선행 연구 등에서 고등학생들의 확률 오개념과 관련하여 자주 논의되는 'Monty dilemma' 문제(Shaughnessy, & Dick, 1991)와 '생일' 문제(Shaughnessy, 1977)를 교수학적 상황의 활동 과제에 포함하였다. 차시별 학습 목표는 일차적으로 수업 활동 과제를 통해 드러나는 배경화/개인화 과정의 오류를 탈배경화/탈개인화 하는 것으로 설정하였다. 이러한 일련의 과정을 통해 학습될 수 있는 확률 교육 과정의 내용 요소 역시 차시별 학습 목표에 기술하였다. 국소적 수업 이론 2)에 따라 수업 활동 과제로부터 드러나는 오개념을 시뮬레이션 활동에 의해 학생 스스로 확인할 수 있도록 하였다. 이를 위해 연구자는 시뮬레이션을 진행하는데 필요한 웹문서와 구체물을 선정하였다. 예견된 학습 경로는 연구자가 직접 시뮬레이션 활동을 진행해 봄으로써 기술하였다. 이러한 일련의 사고 실험을 거쳐 개발된 <표 Ⅳ-2>와 <표 Ⅳ-3>의 가설 학습 경로는 국소적 수업 이론 3)에 의해 초기 추측, 시뮬레이션 실행, 오개념 인식, 이론화 단계를 따라 실제 수업 상황으로 구체화 된다. 교사는 실제 수업을 진행함에 있어 국소적 수업 이론 4)에서 지적하고 있는 바와 같이 교수의 목적이 교수학적 발견 수단인 시뮬레이션으로 이동하는 메타인지적 이동이 일어나지 않도록 주의한다.

설문	확률	이유	응답자수
5. 흰 공이 2개, 빨간 공이 2개들어 있는 주머니에서 공 2개를 **비복원 추출**할 때, (1) 첫 번째 공이 빨간 공일 때, 두 번째 공이 빨간 공일 확률을 구하여라.	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}$ (연결사와 조건사)	10
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2+1}$	8
	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}$	1
	$\frac{1}{4}$	이유 없음	1
	$\frac{2}{3}$	공 3개 중 빨간 공이 2개 남았으므로	1
5. (2) 두 번째 공이 빨간 공일 때, 첫 번째 공이 빨간 공일 일 확률을 구하여라.	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$, $\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}$, 처음엔 공이 4개이고 그 중 빨간 공이 2개 있으므로(인과성 무시)	6
	$\frac{1}{3}$	$\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}$	8
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{12}$, $\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}$	5
	$\frac{1}{4}$	이유 없음	2

<표 Ⅳ-2> 확률 오개념 극복 교수학적 상황의 가설 학습 경로

차시	제목	학습 목표	수업 활동 과제(제목)	예견된 학습 경로	'모델링' 과의 관계
1	표본공간	*등확률에 의한 오개념을 극복한다. *결과적 접근(outcome approach)에 의한 오개념을 극복한다. *변이성(variability)를 고려할 수 있다.	주사위 2개	*주사위 2개를 던지는 실험을 실시한다. *오개념을 인식하여 바람직한 수학적 방법을 찾는다.	1차시
			빨간 공	*공을 10개 꺼내는 실험을 실시한다. *변이성을 인식한다.	1차시
2	표본공간	*등확률에 의한 오개념을 극복한다. *근원사건의 확률을 정할 수 있다.	압정	*압정을 실제로 던져보는 실험을 한다. *압정의 U가 나올 확률을 합의한다.	5차시
3	표본공간	*타당한 표본공간을 구성한다.	Monty Dilemma	*웹문서를 활용하여 시뮬레이션을 진행한다. *수학화를 위한 모델을 개발한다.	3차시
4	복합사건의 확률	*50-50의 오개념을 극복한다. *곱사건의 확률에 의한 오개념을 극복한다.	카인과 아벨	*동전 1개를 던지는 실험을 진행한다. *초기 추측의 오류를 인식하고 그 오류의 원인을 찾는다.	2차시
5	복합사건의 확률	*조건사건과 연결사에 의한 오개념을 극복한다. *인과적 효과에 의한 오개념을 극복한다.	1개가 H일 때 2개가 H	*연결사와 조건사를 구별한다.	3차시
			파란 공 2개, 녹색 공 2개	*시간의 전후는 확률에 영향을 주지 않음을 안다.	3차시
6	통계적 추론	*모집단의 대표로 $\frac{1}{2}$ 를 사용하는 오개념을 극복한다. *표본의 크기에 따른 중심 집중 경향의 정도를 안다.	생일	*시뮬레이션을 통해 집중 경향이 급격히 커짐을 안다. *수학화를 위한 모델을 개발한다.	·
7	통계적 추론	*표본의 크기 효과에 의한 오개념을 극복한다. *중심 집중 경향을 고려할 수 있다.	10명 중 8명이상이 남자	*중심에 의한 통계적 추론이 일어난다. *표본의 크기를 고려한다.	4차시
			정상 동전	*정상동전의 기준을 합의한다.	4차시

<표 Ⅳ-3> 확률 오개념 극복 교수학적 상황의 수업 활동 과제

수업 활동 과제 제목	수업 활동 과제 내용	시뮬레이션을 위한 구체물 또는 웹문서
주사위 2개	6개의 눈이 나올 가능성이 같은 주사위 2개를 던졌을 때 다음 중 나타날 가능성이 가장 높은 경우는? ①5와 6의 눈 ②5와 5의 눈 ③①과 ②가 나타날 가능성은 같다	http://academic.evergreen.edu/curricular/doingscience/flash/dice.html
빨간 공	빨간 공이 50개, 파란 공이 30개, 노란 공이 20개 들어 있는 상자에서 한 번에 10개의 공을 꺼내 공의 색깔을 확인한 다음 다시 집어넣어 잘 섞은 다음 다시 10개의 공의 꺼내는 시행을 10번 반복하였을 때, 각 시행에서 실제로 얻어진 빨간 공의 개수는 몇 개씩일까?	http://www.ds.unifi.it/VL/VL_EN/urn/urn1.html
압정	압정 1개를 던졌을 때, 침이 있는 부분(U)이 나올 확률은 얼마인가? 또, 압정 3개를 한꺼번에 던졌을 때, U가 3번 나올 확률과 U가 2번, D가 1번 나올 확률은 각각 얼마인가?	압정
Monty Dilemma	세 개의 문이 있는데, 그 가운데 한 개의 문 뒤에 상품이 숨겨져 있다. 도전자가 한 개의 문을 선택하면 상품이 숨겨져 있는 문의 위치를 아는 주인은 나머지 두 개의 문 가운데 상품이 없는 문을 열어서 보여준다. 처음 선택한 문을 고수할 것인가, 열리지 않은 나머지 문을 선택할 것인가?	http://www.mste.uiuc.edu/reese/monty/MontyGame5.html
카인과 아벨	앞면과 뒷면이 나올 가능성이 같은 동전 1개를 HHHH 또는 TTHH가 나올 때까지 던진다. HHHH이면 카인이 이기고 TTHH이면 아벨이 이긴다. 이 경기는 공평한가?	http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_305_g_3_t_5.html
1개가 H일 때 2개가 H	앞면과 뒷면이 나올 가능성이 같은 동전 2개를 던져서 두 개 모두 H가 나올 확률과 한 개가 H일 때 다른 하나가 H일 확률은 같은가?	http://www.mathsonline.co.uk/nonmembers/resource/prob/coins.html
파란 공 2개 녹색 공 2개	파란 공이 2개, 녹색 공이 2개인 주머니에서 공을 다시 집어넣지 않고 두 번 꺼낸다고 하자. (1) 첫 번째 공이 파란 공일 때, 두 번째 공이 파란 공일 가능성은? (2) 두 번째 공이 파란 공일 때, 첫 번째 공이 파란 공일 가능성은?	http://www.explorelearning.com/index.cfm?method=cResource.dspView&ResourceID=249
생일	어떤 그룹에 있는 적어도 두 명의 생일이 같을 확률이 $\frac{1}{2}$ 이 되기 위해서는 그 그룹에 몇 사람이 있어야 하나?	http://www.ds.unifi.it/VL/VL_EN/urn/urn1.html
10명중 8명 이상이 남자	다음 중 일어날 가능성이 보다 높은 경우는? ① 10명의 아이 중 8명 이상이 남자아이일 경우 ② 100명의 아이 중 80명 이상이 남자아이일 경우 ③ 두 경우가 발생할 가능성은 같다.	http://www.mathsonline.co.uk/nonmembers/resource/prob/coins.html
정상동전	동전 1개를 100번 던졌을 때 앞면이 65번 나왔다면 이는 정상적인 동전인가?	http://www.mathsonline.co.uk/nonmembers/resource/prob/coins.html

나. 가설 학습 경로의 차시별 특징

1차시에서 다루는 등확률 오개념은 표본공간과 근원사건을 잘못 구성하여 그 발생가능성이 같다고 생각하는 오개념이다. 등확률 오개념을 가진 학생은 '주사위 2개' 문제에 대하여 '③ 어떤 것이든 같다'를 택하는 경향이 있다(Batanero, & Sanchez, 2005). 결과적 접근(outcome approach) 판단 전략은 확률을 일어날 사건의 전반적인 경향으로 구체화하지 못하고 한 번 시행의 결과를 예측하는데 사용하는 오개념이다. 이 오개념을 지닌 학생들은 어떤 사건의 확률을 생각할 때, 한 번 시행한 결과를 근거로 시행에서는 어떤 것이든지 일어날 수 있다고 생각한다. 이는 가능성의 전체 횟수를 고려하지 않기 때문에 일어나는 오개념으로 표본공간의 형태를 무시하는 경향에 기초한다(Zawojewski, & Shaughnessy, 2000). 결과적 접근 판단 전략에 따르는 학생은 '빨간 공' 문제에 대하여 빨간 공은 1부터 10까지 골고루[9] 나올 것이라고 답한다(Shaughnessy, 2003). 등확률 오개념과 결과적 접근에 의한 오개념은 국소적 수업 이론 5)에서 지적하고 있는 바와 같이 시뮬레이션 결과 얻어진 자료의 변이성을 관찰하여 표본공간을 적절하게 구성함으로써 극복될 수 있도록 한다. 빈도적 자료의 변이성을 다룰 때는 국소적 수업 이론 6)에 따라 자료의 존재 범위를 추론할 수 있도록 한다.

2차시에서는 수학적 확률의 전제가 보장되지 않는 상황인 '압정' 문제를 다룬다. 학생들이 물리적 시뮬레이션[10]을 통해 압정 문제를 빈도적 관점에서 해결하도록 한다(Shaughnessy, 1992). 이러한 활동의 목표는 압정 1개를 던졌을 때 일어나는 근원사건의 확률을 학생들이 적절히 합의할 수 있도록 하는데 있다. 3차시의 'Monty dilemma' 문제 상황에서 학생 대부분은 확률 계산에 필요한 표본공간의 개수를 도전자가 선택해야 하는 문의 개수로 생각하는 오개념을 가지고 있다(Shaughnessy, & Dick, 1991). 학생들은 두 문 가운데 한 쪽에 경품이 놓여 있는 사실에는 변함이 없으므로 구하는 확률을 $\frac{1}{2}$ 로 보는 경향이 있다. 'Monty dilemma' 문제는 표본공간을 정보의 양에 따라 변하는 값으로 설정함으로써 해결할 수 있다. 시뮬레이션 활동을 통해 표본공간을 문제 상황에서 고정된 값으로서가 아니라 변하는 값으로 인식할 수 있도록 한다(Shaughnessy, 1997). 1차시, 2차시, 3차시에서 다루는 등확률과 결과적 접근에 의한 오개념, Monty dilemma 문제 상황에 대한 오개념을 극복하는 과정에서 학생들은 표본공간과 관련된 지식을 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화 할 수 있다.

4차시의 '카인과 아벨' 문제에 대해 학생들은 카인과 아벨 둘 중 한 명이 이길 것이므로 각각이 이길 확률은 5대 5라고 생각하거나 곱사건의 확률을 고려하여 이길 확률이 $\frac{1}{16}$ 로 같다고 생각한다(Biehler, 1991). 5차시의 '파란 공, 녹색 공' 문제에서 학생들은 시간적인 순서 때문에 나중에 일어나는 사건을 조건사건으로 보지 않는다. 학생들은 조건부 확률 $P(A|B)$ 에 대하여 사건 B가 사건 A보다 앞서야 한다거나 사건 B가 사건 A의 원인이어야 한다고 생각한다(Batanero, & Sanchez, 2005). 시뮬레이션 활동을 통해 학생들이 '카인과 아벨' 문제, '파란 공, 녹색 공' 문제와 같은 복합 사건의 확률 문제 상황에도 적응할 수 있

9) 주요 내용 요소에 대한 국소적 수업 이론은 확률 모델링 교수학적 상황에도 공통으로 적용된다.
10) Pratt(2005)에 의하면 시뮬레이션 방법에는 동전이나 주사위 등을 직접 이용하는 물리적 시뮬레이션과 컴퓨터로 부터 모든 자료를 얻는 컴퓨터 시뮬레이션이 있다.

도록 한다. 초기 추측과 시뮬레이션 결과 사이에 현저한 차이를 보일 것으로 예견되는 이러한 문제 상황의 적응에는 국소적 수업 이론 2)의 교수학적 의도가 효과적으로 작용할 것으로 기대된다.

6차시의 '생일' 문제는 중심 집중 경향과 변이성을 측정하는데 표본의 크기가 미치는 효과를 학생들이 얼마나 잘 인식하는지 알아보기 위해 선행연구에서 자주 활용되는 과제이다. 학생들은 모집단의 대표 격으로 $\frac{1}{2}$을 사용하는 오개념 때문에 이 문제의 답을 $\frac{365}{2} \fallingdotseq 183$명이라고 생각한다[11]. 시뮬레이션을 활용한 실제적 경험을 통해 표본의 크기에 따른 중심 집중 정도를 적절히 추론할 수 있도록 한다. 7차시의 '10명중 8명 이상이 남자' 문제에 대하여 표본 크기 효과에 의한 오개념을 가지고 있는 학생은 ③번을 답으로 택한다(Batanero, & Sanchez, 2005). 시뮬레이션을 진행해 봄으로써 표본의 크기가 작을 때는 자료 하나 하나의 변동이 표본 전체의 분포 경향에 미치는 영향이 크다는 것을 확인할 수 있도록 한다. 즉, 작은 표본 집단에서는 상대적인 변이성이 커지기 때문에 통계적 추론에서 표본의 크기가 주요하게 고려되어야 함을 인식하도록 한다. '생일' 문제와 '10명중 8명 이상이 남자' 문제에서는 국소적 수업 이론 7)에서 지적하고 있는 통계적 자료의 중심 집중 경향과 변이성, 표본 크기와 큰 수의 법칙 사이의 관계 등을 학생들이 충분히 이해하도록 한다. '정상 동전' 문제(Scheaffer et al., 1998)는 국소적 수업 이론 8)에서 지적하고 있는 바에 따라 큰 수의 법칙 이면에 존재하는 확률적 아이디어를 토대로 재추출 전략을 통해 해결할 수 있도록 한다.

3. 확률 모델링 교수학적 상황을 위한 국소적 수업 이론

가. 확률 모델링 교수학적 상황 진행 단계

Batanero, & Sanchez(2005)와 Pfannkuch(2005)는 확률 지식의 대부분이 모델링을 위한 것이라고 지적하면서 확률 지도가 모델링 과정으로 통합되어야 한다고 주장하였다. 학생들은 모델링을 설계하여 진행하는 과정을 통해 확률 지식을 배경화/개인화할 수 있어야 한다. 또한 모델링 결과를 해석하는 경험을 통해서는 확률 지식을 탈배경화/탈개인화할 수 있어야 한다.

'환경 재조성'의 관점에서 확률에 대한 학생의 사고 활동은 과거 확률 지식을 연구하였던 수학자의 사고 활동과 본질적으로 다르지 않아야 한다. 교사는 확률을 다루는 수학자의 소사회를 흉내 내어 불확실한 무작위 상황 속에서 학생들이 확률 지식을 재발견할 수 있도록 문제 상황을 구성할 필요가 있다. 이러한 관점에서 확률 모델링 교수학적 상황의 최종 목적은 실제 현상을 시뮬레이션을 통한 빈도적 관점의 모델링에 의해 해결하는 것이다. 그러나 현재 학교 수학에서는 모델링과 관련된 교수학적 문제 상황이 거의 다루어지지 않는다(김선희, 김기연, 2004). 이와 같은 현실적인 측면을 감안하여 학생의 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화 과정이 쉽게 진행될 수 있도록 확률 모델링 교수학적 상황에서는 확률 모델링의 적용 범위를 간단한 확률 문제와 확률 모델링 전략으로 국소화하였다. 바람직한 교수학적 상황의 구성을 위해 지식의 본질과 함께 고려되어야 할 사항은 학생의 배경화/개인화와 탈배경화/탈개인화 과정의 용이성이기 때문이다.

Kang(1990)은 교과서에서 교수학적 변환의

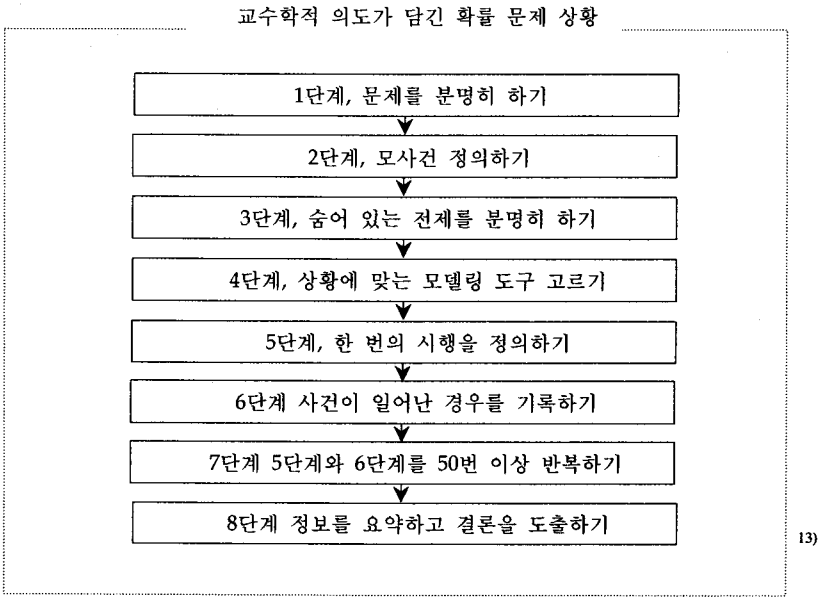
---

11) Shaughnessy(1977)에 따르면 이 과제에 대하여 대학생 80명중에서 62명이 183명이상이라고 응답하였다.

특징 중 하나로 국소화(localization)를 지적한 바 있다. 국소화는 수학적 지식의 적용 범위를 일반적인 맥락에서 구체적인 맥락으로 축소하는 것을 의미한다[12]. 국소화는 교수학적 변환의 어느 순간에는 필수적이지만 가까운 미래에는 제거될 이원적 본성을 지닌다. 일반적으로 학문적 지식으로서 수학적 지식은 그 적용 범위가 확장되는 경향이 있다. 때문에 의사배경화/의사개인화, 의사탈배경화/의사탈개인화는 이러한 수학적 지식의 확장과 가르칠 지식으로의 국소화에 균형을 잡는 것으로 볼 수 있다. 이러한 맥락에서 확률 모델링 교수학적 상황은 간단한 확률 문제를 확률 모델링 전략에 따라 해결하는 방식으로 구성하였다. 교수학적 상황을 간단한 확률 문제에서 시작하도록 구성한 것은 [그림 Ⅳ-2]의 확률 모델링 전략에 학생들이 쉽게 적응하도록 돕기 위함이다. 확률 모델링 전략으로의 국소화는 확률 모델링을 위한 초기 교수학적 상황에서는 필수적이지만 학문적 지식으로서 확률 모델링이 대상으로 하는 실생활 맥락에서는 생략되거나 사라질지도 모른다. 교사는 교수학적 지식으로서 확률 모델링 전략이 대상으로 하는 간단한 확률 문제와 학문적 지식으로서 확률 모델링이 대상으로 하는 비결정론적 실생활 문제 상황사이에 균형점을 찾을 필요가 있다.

나. 확률 모델링 교수학적 상황 진행 단계의 특징

확률 모델링 전략의 '1단계 문제를 분명히



[그림 Ⅳ-2] 확률 모델링 교수학적 상황 진행 단계

12) 예를 들어, 일반적인 체(field) 위에서 삼차식의 인수분해는 학교 수학에서 계수가 정수인 경우로 제한되어 다루어지는데 이를 국소화라고 볼 수 있다(Kang, 1990).

13) 이는 Yate et al.(1999)의 확률 모델링 5단계와 IMP(Integrated Mathematics Project) 교과서(Rubenstein, Craine, & Butts, 1998: 377)의 확률 모델링 8단계를 종합하여 구체화한 것이다.

하기'에서는 주어진 확률 문제 상황에서 구하고자 하는 것을 명시적으로 구체화하도록 한다. '2단계 모사건을 정의하기'에서는 문제 상황을 구성하는 가장 최소 단위인 모사건을 정의할 수 있도록 한다. 예를 들어 5명의 아이 중 2명이 여자 아이일 확률을 구하는 문제 상황에서 아이 1명이 여자인가 아닌가 하는 것이 모사건이 된다. '3단계 숨겨진 전제를 분명히 하기'에서는 다루는 확률 문제 상황에서 독립성과 같은 숨겨진 전제를 추출할 수 있도록 한다. '4단계 상황에 맞는 모델링 도구 고르기'에서는 모델링 도구를 설정할 때 구체물로서 주사위, 동전, 스피너, 주머니에 들어 있는 색깔 공과 여러 가지 난수표 등을 염두에 두도록 지도한다. '5단계 한 번의 시행을 정의하기'에서는 모델링 도구를 통해 문제 상황에 맞는 한 번의 시행을 정의한다. 5명의 아이 중 2명이 여자 아이일 확률을 구하는 문제 상황에서는 동전 1개를 5번 던지는 것이 한 번의 시행이다. '6단계 사건이 일어난 경우를 기록하기'에서는 고려 대상이 되는 사건이 발생하는지를 관찰하여 그 횟수를 세는 단계이다. 동전 1개를 5번 던졌을 때, 앞면(H)이 나오는 경우를 여자 아이로 간주하기로 하였다면 HHHTT는 고려 대상이 되는 사건의 횟수에 포함되지 않는다. '7단계 5단계와 6단계를 50번 이상 반복하기'에서는 설계된 모델링 방법에 따라 구체물 또는 구체물을 소재로 고안된 웹 문서를 활용한 시뮬레이션을 통해 실제 모델링을 진행한다. 이 단계에서 학생들은 반복 시행의 필요성을 인식할 수 있으며 재추출의 경험을 가질 수 있다. 이로부터 표본의 크기가 증가할수록 통계적 확률이 안정되어 가는 범위를 비형식적으로 추정할 수 있다. '8단계 정보를 요약하고 결론을 도출하기'에서는 시뮬레이션 결과를 바탕으로 문제의 해를 구한다. 이 단계에서는 시뮬레이션을 통해 얻은 무작위 결과의 개별 자료로서 변이성뿐만 아니라 전체적인 경향으로서 중심 집중도를 살필 수 있도록 한다. 자료의 변이성과 중심 집중 경향, 표본의 크기에 따른 추론을 진행함으로써 통계적 확률을 추정하도록 한다.

확률 모델링 전략은 학문적 지식으로서 확률 모델링에 대한 학생들의 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화를 활성화시키려는 교수학적 의도에서 도입되었다. 교사는 이러한 교수학적 의도가 확률 모델링 전략의 각 단계를 단순히 지도하는 것으로 변형되는 메타인지적 이동이 일어나지 않도록 주의한다. 또한 교수학적 상황에서 모델링 전략 자체를 단순히 반복 해설함으로써 학생들이 이를 피상적으로 수용하여 확률 모델링 전략 이면에 있는 확률적 사고를 인식하지 못하게 되는 형식적 고착(formal abidance; Kang, 1990)에 빠지지 않도록 유념한다. 이상으로부터 확률 모델링 교수학적 상황을 위한 국소적 수업 이론은 다음과 같이 요약할 수 있다.

9) 확률 지도는 모델링 과정으로 통합되어야 한다. 학생들은 모델링을 설계하여 진행하는 과정을 통해 확률 지식을 배경화/개인화할 수 있어야 한다. 또한 모델링 결과를 해석하는 경험을 통해서는 확률 지식을 탈배경화/탈개인화할 수 있어야 한다.
10) 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화의 용이성을 감안하여 확률 모델링 교수학적 상황에서는 확률 모델링의 적용 범위를 시뮬레이션을 활용하는 간단한 확률 문제와 확률 모델링 전략으로 국소화(localization)한다.
11) 확률 모델링 교수학적 상황은 확률 모델링 전략 8단계를 거쳐 진행되도록 한다.
12) 확률 모델링 전략 자체를 단순히 반복 해설하여 확률 모델링 전략 이면에 있는 확률적 사고를 인식하지 못하고 이를 피상적으로 수용하는 형식적 고착이 일어나지 않도록 유념한다.

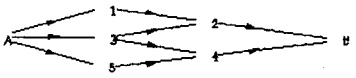
4. 확률 모델링 교수학적 상황을 위한 가설 학습 경로

가. 가설 학습 경로 설정 방향

앞서 구체화된 확률 모델링 교수학적 상황을 위한 국소적 수업 이론 9)에 따라 학생들이 확률 모델링을 통해 확률 지식을 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화할 수 있도록 가설 학습 경로를 설정하였다. 가설 학습 경로의 출발점을 찾기 위해 진행된 설문 결과에 따르면 학생들의 확률 문제 상황에 대한 모델링 능력이 매우 낮은 것을 알 수 있다(문항12, 문항13).

설문 결과와 국소적 수업 이론 10)에 기반하여 확률 모델링 교수학적 상황은 간단한 확률 문제를 시뮬레이션을 활용하여 확률 모델링 전략에 의해 해결하는 것으로 구성하였다. 확률 모델링 교수학적 상황의 학습목표는 확률 모델링 전략의 각 단계에 적응하는 것으로 설정하였다. 각 차시별로 모델링 8단계 중 구체적인 한 단계씩을 학습할 수 있도록 하였으며 해당되는 그 단계가 지닌 확률적 의미를 이해하도록 하였다. 시뮬레이션을 활용한 확률 모델링을 진행하는 과정에서 학습할 수 있는 내용 요소를 추출하여 차시별 학습목표에 포함되도록 하였다. 수업 활동 과제는 국소적 수업 이론 10)의 교수학적 의도에 따라 학교 확률 교육과정에서 다루는 간단한 문제로, Gnanadesikan, Scheaffer, & Swift(1987)와 Rubenstein, Craine, & Butts(1998)에서 추출하여 재구성하였다. 여기에는 과제 자체에 적응하는데 드는 학생들의 인지적 부담을 덜어 주어 학생들이 확률 모델링 전략에 보다 쉽고 빠르게 익숙해지도록 하기 위한 교수학적 의도가 있다. 실제 모델링 전략에 참여하는 학생들이 따르게 될 학습 경

<표 Ⅳ-4> 확률 모델링에 대한 설문 결과 요약

설문	확률	이유	응답자수
12. 다음 그림은 오래된 펌프 5개가 있는 어떤 도시의 수도 체계이다. 각 펌프가 제대로 작동하지 않을 확률은 0.5이고, A에서 B로 물이 흐르려면 적어도 한 개의 수로에서는 펌프 2개가 모두 작동하여야 한다고 한다. 이를 테면, A에서 B로 물이 흐르는 경우는 펌프 1과 2가 동시에 작동하거나 펌프 3과 2가 동시에 작동할 때 등등이 있다. 하지만 펌프 2와 4가 모두 작동하지 않는다면 A에서 B로 물이 흐를 수 없다. A에서 B로 물이 흐를 확률을 추정하여라. 필요하다면 표 1을 활용하여라. 정답 : $\frac{10}{32}$ 	0.625	$1-(0.5\times0.5+0.5\times0.5\times0.5)$	1
	$\frac{1}{4}$	이유 없음	2
	$\frac{1}{2}$	모든 펌프가 작동할 확률이 $\frac{1}{2}$	6
	$\frac{15}{25}$	이유 없음	4
	기타	$1(\frac{1}{4}\times4)$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$ $(0.5^5\times4)$, $\frac{1}{2^5}$, $\frac{1}{9}$	5
	무응답		8
13. 어떤 과자 회사에서는 과자 1봉지마다 6종류의 쿠폰 중 1장씩을 넣어 두었다. 6종류의 쿠폰을 모두 모으면 경품으로 교환이 가능하다고 할 때, 6종류의 쿠폰을 모두 모으기 위해서 사야하는 과자 봉지는 어느 정도인가? 필요하다면 표 2을 활용하여라. 정답 : 15개	11	이유 없음	6
	720	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1$	2
	15	경험	2
	무응답		11

14) 표 1은 앞면과 뒷면이 나올 가능성이 같은 동전 1개를 2000번 던진 결과이다. 표 2는 6개의 눈이 나올 가능성이 같은 주사위 1개를 2000번 던진 결과이다.

로는 연구자가 직접 시뮬레이션을 진행해 봄으로써 예견하였다. 다음 <표 Ⅳ-5>와 <표 Ⅳ-6>의 형태로 개발된 가설 학습 경로는 국소적 수업 이론 11)에 의해 [그림 Ⅳ-2]을 통해 제시한 확률 모델링 전략 8단계에 따라 실제 수업 상황으로 구체화 된다. 교사는 실제 수업을 진행함에 있어 국소적 수업 이론 12)에 서 지적하고 있는 바와 같이 확률 모델링 전략 자체를 단순히 반복 해설하여 이를 피상적으로 수용하는 형식적 고착이 일어나지 않도록 유념한다.

나. 가설 학습 경로의 차시별 특징

1차시에서는 모델링 7단계 '시행을 충분히 반복하기'의 의미를 이해하게 한다. 여기서는 국소적 수업이론 5)에서 지적한 바에 따라 시행을 충분히 반복함으로써 변이성을 추론할 수 있게 한다.

2차시에서는 사건의 독립성을 바탕으로 주어진 문제 상황을 모델링 하는 도구로 동전을 택할 수 있도록 한다. 이러한 경험을 통해 모델링 4단계에서 상황에 맞는 모델을 고를 때 '상황'을 분석하는 전략을 발견하도록 한다. '7개의

<표 Ⅳ-5> 확률 모델링 교수학적 상황의 가설 학습 경로

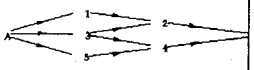
차시	제목	학습 목표	수업 활동 과제(제목)	예견된 학습 경로	오개념 극복' 과의 관계
1	모델링 방법에 대한 소개	*통계적 확률과 확률 모델링의 필요성을 인식한다. *모델링 8단계를 교사와 함께 유도한다. *모델링 8단계 중 7단계의 의미를 이해한다.	5명중 2명의 여자아이	*통계적 확률의 필요성을 인식한다. *모델링 도구로 동전을 생각한다. *모델링 8단계를 따른다. *시행을 충분히 반복해야함을 안다.	1차시
2	모델링 8단계 적용 Ⅰ	*모델링 8단계 중 4단계를 설정할 수 있다. *사건의 독립성을 이용할 수 있다.	7개의 ○/×	*모델링 도구로 동전을 생각한다. *7개를 1번 던지는 것과 1개를 7번 던지는 것이 같음을 안다.	4차시
3	모델링 8단계 적용 Ⅱ	*모델링 8단계 중 5단계를 설정할 수 있다. *표본공간을 변수로서 파악할 수 있다.	적어도	*TT를 표본공간에서 제외한다. *한 번의 시행을 정의한다.	3차시, 5차시
4	모델링 8단계 적용 Ⅲ	*시뮬레이션을 통한 모델링에 의해 문제 상황을 단순화 할 수 있다. *큰 수의 법칙의 의미를 이해할 수 있다.	펌프	*물이 흐르는 경우는 연속되는 2개 이상의 펌프가 작동할 때임을 발견한다. *동전 5개를 던질 때 언제 물이 흐르는지를 안다.	7차시
5	난수표를 활용한 모델링	*모델링 8단계 중 3단계를 설정하기 위해 새로운 모델링 도구를 사용할 수 있다.	세일즈맨	*독립성의 전제를 인식한다. *새로운 모델링 도구를 발견한다. *난수표로 모델링한다.	2차시
6	난수표를 활용한 모델링의 적용	*모델링 8단계 중 8단계를 음미할 수 있다. *확률변수의 평균을 이해한다.	마을버스	*모델링 결과로 문제 상황을 재음미한다. *평균과 기댓값의 관계를 안다.	·
7	모델링을 통한 확률 문제 해결	*모델링 8단계 중 6단계를 설정할 수 있다. *확률 문제 상황을 시뮬레이션을 활용한 모델링 방법을 통해 해결할 수 있다.	쿠폰	*구하고자 하는 것이 무엇인지를 안다. *문제 상황을 모델링한다.	·

모델링 단계 : 1) 문제를 분명히 하기, 2) 모사건 정의하기, 3) 숨겨져 있는 전제를 분명히 하기, 4) 상황에 맞는 모델링 도구 고르기, 5) 한 번의 시행을 정의하기, 6) 사건이 일어난 횟수를 기록하기, 7) 5)와 6)을 적어도 50번 이상 여러 번 반복하기, 8) 정보를 요약하고 결론을 도출하기

o/x문제' 는 동전 1개를 7번 던져서 H가 4번 이상 나올 가능성을 추정하는 문제 상황이다. 여기서는 국소적 수업이론 6)에 따라 반복시행을 통해 H가 나오는 개수의 범위를 추론해 보도록 한다. 학생들은 오개념 극복 교수학적 상황의 4차시에서 다루는 '카인과 아벨' 문제를 모델링 교수학적 상황의 2차시에서 다루는 문제와 동형이라고 생각하여 카인과 아벨이 이길 확률을 각각 동전 1개를 4번 던져 HHHH와 TTHH가 나올 가능성을 고려하는 것으로 생각하는 경향이 있기 때문에 교사는 이를 염두에 두어 지도한다.

3차시의 '적어도' 문제 상황에서 TT를 제외시킴으로써 모델링 5단계인 한 번의 시행을 정의하는 경험을 가질 수 있도록 한다. 이를 통해 주어진 정보의 양에 의해 표본공간을 줄여가는 전략을 발견하도록 한다. 정보의 양이 늘어날수록 표본공간의 크기를 줄일 수 있기 때문에 전체적으로는 구하고자 하는 확률이 커짐을 이해하게 한다. 학생들은 '적어도' 문제 상황을 통해 표본공간을 변수로서 파악하는 아이디어를 가질 수 있다[15]. 적절한 표본공간 구성을 주요 학습 목표로 하는 확률 모델링 교수학

<표 Ⅳ-6> 확률 모델링 교수학적 상황의 수업 활동 과제

수업 활동 과제 제목	수업 활동 과제 내용	시뮬레이션을 위한 구체물 또는 웹문서
5명중 2명의 여자아이	5명의 자녀가 있는 가정에 2명의 여자아이가 있을 확률을 구하여라.	동전을 2000번 던진 결과표
7개의 ○/×	보미는 시험 준비를 충분히 하지 않아서 시험에 출제된 7개의 ○/× 문제를 모두 찍어서 답하였다. 보미가 7개의 문제 중에 4개 이상 맞추었을 확률을 구하여라.	http://www.mathsonline.co.uk/nonmembers/resource/prob/coins.html
적어도	옆집에는 아이가 2명 있다. 2명 중 적어도 1명은 여자아이인 것을 알고 있을 때, 2명 모두 여자아이일 확률을 구하여라.	동전을 2000번 던진 결과표
펌프	그림은 오래된 펌프 5개가 있는 어떤 도시의 수도 체계이다. 각 펌프가 제대로 작동하지 않을 확률은 0.5이고, A에서 B로 물이 흐르려면 적어도 한 개의 수로에서는 펌프 2개가 모두 작동하여야 한다. 이를 테면 A에서 B로 물이 흐르는 경우는 펌프 1과 2가 동시에 작동하거나 펌프 3과 2가 동시에 작동할 때이다. 하지만 펌프 2와 4가 모두 작동하지 않는다면 A에서 B로 물이 흐를 수 없다. A에서 B로 물이 흐를 확률을 구하여라. 	동전을 2000번 던진 결과표
세일즈맨	어떤 세일즈맨은 고객 중 35%에게 자신의 물건을 판매한다. 이 세일즈맨이 5명의 고객을 만나 적어도 1명 이상에게 물건을 팔 확률을 구하여라.	0부터 9까지의 정수로 구성된 난수표
마을버스	A씨가 운전하는 마을버스에는 8개의 좌석이 있다. 마을버스를 타는 사람들은 차표를 미리 사두지만 평균적으로 10%는 차표를 구입하고도 버스를 타지 않는다. 때문에 A씨는 매 운행 때마다 10개의 차표를 판매한다. 하지만 때에 따라서는 차표를 구입한 사람이 모두 나타나 좌석에 앉지 못하는 사람이 생기기도 한다. 좌석에 앉지 못하는 사람이 생길 확률을 구하여라.	0부터 9까지의 정수로 구성된 난수표
쿠폰	어떤 과자 회사에서는 과자 1봉지마다 6종류의 쿠폰 중 1장씩을 넣어 두었다. 6종류의 쿠폰을 모두 모으면 경품으로 교환이 가능하다고 할 때, 6종류의 쿠폰을 모두 모으기 위해서 사야하는 과자 봉지의 평균값을 구하여라.	http://academic.evergreen.edu/curricular/doingscience/flash/dice.html

15) 여러 연구들(Shaughnessy, 1997; Shaughnessy, 2003; Zawojewski, & Shaughnessy, 2000)이 확률 교육에서 표본공간 형성을 위한 더 많은 경험이 필요하다고 지적하였다. Shaughnessy(1997)는 확률에서 표본공간의 개념을 통계에서 변량 개념과 연결지어야 한다고 주장하기도 하였다.

적 상황의 3차시는 확률 오개념 극복 교수학적 상황의 2차시, 5차시와 관련된다.

4차시에서는 복잡한 문제 상황을 시뮬레이션을 활용한 모델링 전략을 통해 단순화함으로써 수학적 해결의 실마리를 찾도록 한다. 여기서는 시뮬레이션을 통한 모델링 결과와 수학적인 접근 결과를 비교함으로써 국소적 수업 이론 7)에서 지적하고 있는 큰 수의 법칙에 대한 간접적인 이해가 형성되도록 한다. 큰 수의 법칙 이면에 있는 통계적 추론은 표본의 크기에 따른 중심 집중 경향을 고려하는 것으로 해석될 수 있으므로 확률 모델링 교수학적 상황의 4차시는 확률 오개념 극복 교수학적 상황의 7차시와 관련된다.

5차시에서는 모델링 3단계에 의해 숨겨져 있는 전제를 분명히 함으로써 모델링 도구를 문제 상황의 전제에 기초하여 고안하는 경험을 갖도록 한다. '세일즈맨' 문제 상황을 통해 모델링 도구로서 난수표의 가치를 인식할 수 있도록 한다. 6차시에서 다루어질 모델링 8단계에서는 모델링 결과를 문제 상황의 재해석에 활용하거나 확률변수의 평균과 기댓값을 구하는 공식을 음미하는데 이용할 수 있도록 한다. 7차시에서는 시뮬레이션을 활용한 빈도적 관점의 모델링에 의해 실생활 확률 문제를 해결할 수 있도록 한다. 7차시에서는 특히 모델링 6단계를 지도하는데 중점을 두어 모델링을 통해 구하고자 하는 것이 무엇인지를 분명하게 인식할 수 있도록 한다.

V. 결 론

확률 교육과 관련된 선행 연구들은 시뮬레이션을 통해 확률 오개념을 극복할 수 있으며 확률 모델링 능력을 향상시킬 수 있다고 밝힌 바 있다. 그러나 확률 오개념 극복과 확률 모델링 능력 향상을 목적으로 학교 교육과정에 시뮬레이션을 도입하고자 할 때, 확률 지식을 가르치기 위한 지식으로 재구성하는 방식에 대해서는 구체적으로 기술하지 않았다. 이 연구에서는 확률 오개념 극복 교수학적 상황과 확률 모델링 교수학적 상황을 구성하기 위한 교수학적 의도와 세부적인 설정 계획을 국소적 수업 이론과 가설 학습 경로로 종합하고 구체화하였다. 이는 시뮬레이션 도입 목적에 따라 확률 지식을 교수학적으로 변환하는 방식에 대한 이론적 지식을 개발한 것으로, 이후 교수 실험과 회고분석을 통한 실제적 지식 추출의 후속 연구에 기초가 될 수 있다.

이 연구에서는 시뮬레이션이 확률 교육에서 지닌 교수학적 가치와 빈도적 관점에 있는 확률 교육과정의 특징을 기술한 선행연구, 학생들의 확률 오개념 정도와 모델링 능력 수준을 알아보는 설문 결과 등에 비추어 국소적 수업 이론과 가설 학습 경로를 객관적이고 보편적인 맥락에서 개발하려고 노력하였다. 그러나 이 역시 시뮬레이션을 활용하는 여러 교수학적 상황 구성의 국소적 수업 이론과 가설 학습 경로 가운데 하나로서 연구자와 현장 교사에 의해 평가되고 검토될 필요가 있다. 이 연구에서 개발된 국소적 수업이론과 가설 학습 경로를 실제 수업 상황에 적용하여 선정된 학습 목표에 학생들이 실제로 도달 가능한지, 수업 활동 과제의 수준과 난이도는 적절한지, 예견된 학습 경로는 학생들의 실제 학습 경로에 비추어 타당한지가 평가되어야 한다. 이는 후속 연구를 통해 이 연구에서 구체화된 확률 오개념 극복 교수학적 상황과 확률 모델링 교수학적 상황에 참여한 학생들의 내용 탐구 요소 학습 과정, 오개념 극복 전략, 모델링 전략의 특징 등을 분석함으로써 검토될 것이다.

참고문헌

김선희 · 김기연(2004). 수학적 모델링 과정에 포함된 추론의 유형 및 역할 분석. **학교수학, 6**(3), 283-299.

박경미 · 임재훈(2002). 한국, 일본과 미국, 영국의 수학 교과서 비교. **학교수학, 4**(2), 317-331.

신보미 · 이경화(2006). 컴퓨터 시뮬레이션을 통한 통계적 확률 지도에 대한 연구. **수학교육학연구, 16**(2), 139-156.

우정호 · 정영옥 · 박경미 · 이경화 · 김남희 · 나귀수 · 임재훈(2006). **수학교육학 연구 방법론**. 서울: 경문사.

이경화(1996). **확률 개념의 교수학적 변환에 관한 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools.* Utrecht: CD-β Press, Center for Science and Mathematics Education, Freudenthal Institute, Research Group On Mathematics Education, Utrecht University.

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. In G. A. Jones (Eds.), *Exploring probability in school : Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). USA: Springer.

Batanero, C., & Sanchez, E. (2005). What is the nature of high school students' conceptions and misconceptions about probability. In G. A. Jones (Eds.), *Exploring probability in school : Challenges for teaching and learning* (pp. 241-266). USA: Springer.

Biehler, R. (1991). Computers in probability education. In R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters : Probability in education* (pp. 169-211). Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Borovcnik, M., & Peard, R. (1996). Probability. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook in mathematics education* (Part 1, pp. 239-288). Dordrecht : Kluwer.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* London: Kluwer Academic Publishers.

Fast, G. R. (1997). Using Analogies to Overcome student Teacher's Probability Misconceptions. *Journal of Mathematics Behavior, 16*(4), 325-344.

Fischbein, E., Nello, M., & Marino, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 523-549.

Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*, 96-105.

Freudenthal, H. (1972). The "Empirical law of large numbers" or "The stability of frequencies". *Educational Studies in Mathematics 4*, 4, 484-490.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gnanadesikan, M., Scheaffer, L. R., & Swift, J. (1987). *The art and techniques of simulation.* USA: Dale Seymour Publications Mathematics.

Gravemeijer, K. P. E. (1998). Developmental research as a research method. In A. Sierpinska, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 277-295). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Greer, B. (2001). Understanding probabilistic thinking: The legacy of Efraim Fischbein. *Educational Studies in Mathematics, 45*, 15-33.

Greer, B., & Mukhopadhyay, S. (2005). Teaching and learning the mathematization of uncertainty : Historical, cultural, social and political contexts. In G. A. Jones (Eds.), *Exploring probability in school : Challenges for teaching and learning* (pp. 297-324). USA: Springer.

Hawkins, A., Jollife, F., & Glickman, L. (1992). *Teaching statistical concept.* Longman Publishing.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics, 6*, 187-205.

Jones, G. A. (2005). Introduction. In G. A. Jones (Eds.), *Exploring probability in school : Challenges for teaching and learning* (pp. 1-12). USA: Springer.

Kang, W. (1990). Didactic transposition of mathematical knowledge in textbook. doctoral dissertation, University of Georgia.

Konold, C. (1994). Understanding probability and statistics through resampling. In L. Brunelli & G. Cicchitelli (Eds.), *Proceedings of the 1st Scientific Meeting of the International Association for Statistical Education* (pp. 255-263). Perugia, Italy: University of Perugia.

Lightner, J. (1991). A brief look at the history of probability and statistics. *Mathematics Teacher, 84*(8), 623-630.

NCTM (2000). *Curriculum and evaluation standard for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Pfannkuch, M. (2005). Probability and statistical inference: How can teachers enable learners to make the connection? In G. A. Jones (Eds.), *Exploring probability in school : Challenges for teaching and learning* (pp. 267-294). USA: Springer.

Pratt, D. (2000). Making sense of the total of two dice. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*, 602-625.

Pratt, D. (2005). How do teachers foster students' understanding of probability? In G. A. Jones (Eds.), *Exploring probability in school : Challenges for teaching and learning* (pp. 171-189). USA: Springer.

Rubenstein, N. R., Craine, V. T., & Butts, R. T. (1998). *Integrated Mathematics 3.* USA: McDougal Littell.

Saenz, C. (1998). Teaching probability for conceptual change. *Educational Studies in Mathematics, 35*, 233-254.

Scheaffer, L. R. (1992). Data, discernment and decisions: An empirical approach to introductory statistics. In F. S. Gordon

(Eds.), *Statistics for the twenty-first century.* (MAA Notes, Number 26, pp.69-81). Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Scheaffer, L. R., Watkins, E. A., & Landwehr, M. J. (1998). What every high-school graduate should know about statistics. In S. P. Lajoie (Eds.), *Reflections on statistics : Learning, teaching, and assessment in grades K-12* (pp. 3-31). London: Lawrence Erlbaum Associates.

Sensevy, G., Schubauer, M., Mercier, A., Ligozat, F., & Perrot, G. (2005). An attempt to model the teacher's action in the mathematics class. *Educational Studies in Mathematics, 59*, 153-181.

Shafer, G. (1996). The significance of Jacob Bernoulli's Ars Conjectandi for the philosophy of probability today. *Journal of Econometrics, 75*, 15-32.

Shaughnessy, J. M. (1977). Misconceptions of probability: An experiment with a small-group, activity-based, model building approach to introductory probability at the college level. *Educational Studies in Mathematics, 8*, 285-316.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics : Reflections and Directions. In D. A. Grouws (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). New York: Macmillan Publishing company.

Shaughnessy, J. M. (1997). Missed opportunities in research on the teaching and learning of data and chance. In F. Biddulph, & K. Carr (Eds.), *Proceedings of the Twentieth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, 1*, 6-22. Rotorua, NZ: University of Waikato.

Shaughnessy, J. M. (2003). Research on students' understandings of probability. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 216-226). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Shaughnessy, J. M., & Dick, T. (1991). Monty's Dilemma: Should you stick or switch? *The Mathematics Teacher, 84*, 252-256.

Shaughnessy, J. M. & Bergman, Barry. (1993). Thinking about uncertainty : Probability and statistics. In P. S. Wilson (Eds.), *Research ideas for the classroom : High school mathematics* (pp.177-197). New York: Macmillan Publishing Company.

Shaughnessy, J. M., Canada, D., & Ciancetta, M. (2003). Middle school students' thinking about variability in repeated trials: A cross-task comparison. In A. D. Pateman, N. A., Dougherty, B. J., & Zilliox, J.(Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*, 159-165.

Shin, B. M., & Lee, K. H. (2006). A study on the law of large numbers instruction through computer simulation. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlisova (Eds.), *Proceedings of the 30th International Conference for the*

Psychology of Mathematics Education Vol. 1 (pp. 330). Prague, CR: Charles University.

Skovsmose, O., & Borba, M. (2000). *Research methodology and critical mathematics education* (Publication No. 17). Roskilde, Denmark: Centre for Research in Learning Mathematics, Poskilde University.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructive perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 114-145.

Stohl, H., & Tarr, J. E. (2002). Developing notions of inference using probability simulation tools. *Journal of Mathematical Behavior, 21*, 319-337.

Yate, D., Moore, D., & McCabe, G. (1999). *The practice of statistics*. NewYork: W. H. Freeman and Company.

Zimmerman, G. M., & Jones, G. A. (2002). Probability simulation: What meaning does it have for high school students? *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology, 2*, 221-236.

Using Simulation for a Didactic Transposition of Probability

Shin, Bo Mi (Gwangju Educational Research Information Service)
Lee, Kyung Hwa (Korea National University of Education)

Several previous studies suggested that simulation could be a main didactic instrument in overcoming misconception and probability modeling. However, they have not described enough how to reorganize probability knowledge as knowledge to be taught in a curriculum using simulation.

The purpose of this study is to identify the theoretical knowledge needed in developing a didactic transposition method of probability knowledge using simulation.

The theoretical knowledge needed to develop this method was specified as follows : pseudo-contextualization/pseudo-personalization, and pseudo-decontextualization/pseudo-deper-sonalization according to the introductory purposes of simulation. As a result, this study developed a local instruction theory and an hypothetical learning trajectory for overcoming misconceptions and modeling situations respectively.

This study summed up educational intention, which was designed to transform probability knowledge into didactic according to the introductory purposes of simulation, into curriculum, lesson plans, and experimental teaching materials to present didactic ideas for new probability education programs in the high school probability curriculum.

* **Key word** : didactic transposition(교수학적 변환), probability education(확률 교육), simulation(시뮬레이션).

논문접수: 2007. 12. 28
심사완료: 2008. 2. 12