

# 다수의 짧은 주기를 가진 LDPC 부호를 위한 향상된 신뢰 전파 복호

정회원 정 규 혁\*

## Improved Performance Decoding for LDPC Codes with a Large Number of Short Cycles

Kyuhyuk Chung\* *Regular Member*

### 요 약

본 논문에서, 우리는 다수의 짧은 주기들을 추가함으로써 LDPC 부호의 성능을 향상 시킨다. 짧은 주기, 특히 길이가 4인 주기는 만약 표준 BP 복호가 쓰인다면 LDPC 부호의 성능을 저하시킨다. 그래서 현재의 연구들은 성능 높은 LDPC 부호를 설계하기 위하여 길이가 4인 주기들을 없애는데 초점을 맞추고 있다. 우리는 만약 수정된 BP 복호를 사용하면 다수의 길이가 4인 주기들은 LDPC 부호의 성능을 향상 시키는 것을 발견했다. 본 논문에서는 다수의 짧은 주기들을 가진 LDPC 부호를 위한 수정된 BP 복호 알고리즘이 소개되고 또한 다수의 짧은 주기들을 가지는 LDPC 부호의 수정된 BP 복호성능이 짧은 주기를 가지지 않는 LDPC 부호의 표준 BP 복호 성능보다 우수함을 보였다.

**Key Words :** LDPC 부호, 신뢰 전파 복호, 짧은 주기, 이분 그래프, 패리티 검사

### ABSTRACT

In this paper, we improve performance of Low Density Parity Check (LDPC) codes with adding a large number of short cycles. Short cycles, especially cycles of length 4, degrade performance of LDPC codes if the standard BP (Belief Propagation) decoding is used. Therefore current researches have focused on removing cycles of length 4 for designing good performance LDPC codes. We found that a large number of cycles of length 4 improve performance of LDPC codes if a modified BP decoding is used. We present the modified BP decoding algorithm for LDPC codes with a large number of short cycles. We show that the modified BP decoding performance of LDPC codes with a large number of short cycles is better than the standard BP decoding performance of LDPC codes designed by avoiding short cycles.

### 1. 서 론

LDPC 부호들은 처음 Gallager가<sup>[1]</sup> 발견하고, Mackay와 공동연구자들에<sup>[2]</sup> 의해 재발견됐다. LDPC 부호는 터보코드와 비교할 수 있는 좋은 성능을 가

지다<sup>[3]</sup>. LDPC 부호의 이분 그래프는<sup>[4]</sup> 주기들을 포함한다. 표준 BP 복호를 사용한다면 주기들이 있을 때 LDPC 부호 그래프의 성능은 주목할 만한 성능 저하를 보여준다. LDPC 부호의 표준 BP(Belief Propagation (신뢰 전파)) 복호의 성능을

\* 이 연구는 2006학년도 단국대학교 대학연구비의 지원으로 연구되었음.

\* 단국대학교 정보컴퓨터학부 컴퓨터과학전공 (khchung@dankook.ac.kr)

논문번호 : KICS2007-10-462, 접수일자 : 2007년 10월 10일, 최종논문접수일자 : 2008년 1월 14일

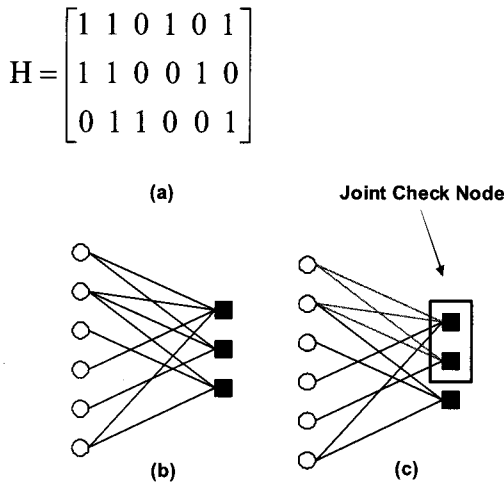


그림 1. 연결 검사 이분 그래프의 한 예 (a) 패리티 검사 행렬 H (b) 이분 그래프 (c) 연결 검사(JC) 이분 그래프

향상시키기 위해 짧은 주기는 패리티 체크 행렬 H를 설계할 때 보통 제거한다. 그러나, 우리는 다수의 짧은 주기를 추가함으로써 LDPC 부호의 성능을 향상시켰다. 그런 성능 향상은 수정된 BP 복호 알고리즘을 사용함으로써 달성된다. 수정된 BP 알고리즘은 길이가 4인 주기의 두 개의 체크 노드를 하나의 연결 체크노드로 결합하는 이분 그래프를 기반으로 한다. 우리는 이 이분 그래프를 연결 체크 이분 그래프라 부른다.

본 논문에서, 우리는 다수의 짧은 주기와 연결 검사 이분 그래프를 기반으로 하는 수정된 BP 알고리즘을 쓰는 복호로 LDPC 부호의 성능을 향상시킨다. 수정된 BP 복호를 사용했을 경우 길이가 4인 다수의 주기가 LDPC 부호의 효율을 향상시키는 것을 발견했다. 우리는 다수의 짧은 주기를 갖는 LDPC 부호를 수정된 BP 알고리즘으로 복호한 성능이 짧은 주기를 피해 설계한 LDPC 부호의 표준 BP 복호 성능보다 낫다는 것을 발견했다.

## II. 연결 검사 BP 복호 알고리즘

LDPC 부호를 위한 표준 BP 복호와 같은 차선의 반복 복호는 특히 길이가 4인 짧은 주기 때문에 크게 성능이 저하되는 것이 잘 알려진 사실이다. 이분 그래프에서<sup>[4]</sup> 길이가 4인 주기는 체크 노드와 변수 노드 사이의 최단 거리를 나타낸다. 다시 말하면, 패리티 체크 행렬 H 안의 두 행은 두 개의 같은 열 위치에 1을 가진다. 그래서 우리는 다수의

짧은 주기를 가진 LDPC 부호를 위한 수정된 BP 알고리즘을 제안한다. 수정된 BP 알고리즘은 길이가 4인 주기의 두 개의 검사 방정식을 함께 복호화 한다. 이 복호 알고리즘을 연결 검사 복호라 부른다. 왜냐하면 이 알고리즘은 연결 검사 이분 그래프를 기반으로 하기 때문이다. 그림 1-(a)는 패리티 검사 행렬 H 이고, 행렬 H에 대한 이분 그래프는 그림 1-(b)에서 나타내었다. 길이가 4인 두 개의 검사 노드가 하나의 연결 검사로 함께 결합될 때, 연결 검사 이분 그래프는 Fig. 1-(c)에서 보였다. 이분 그래프 안의 길이가 4인 주기들은 연결 검사 이분 그래프 안에서 효과적으로 제거된다. 표준 BP 복호를 사용하면 이분 그래프 안의 길이가 4인 짧은 주기들은 LDPC 부호의 성능을 저하시킨다는 것은 잘 알려져 있다. 그러나 연결 검사 BP 복호를 사용하면 이분 그래프 안의 길이가 4인 짧은 주기들은 성능 향상에 도움이 됨을 발견했다. 그래서 짧은 주기를 회피하는 것 대신에 고의로 길이가 4인 많은 짧은 주기를 포함하는 LDPC 부호를 설계 하였다. 연결 검사 BP 복호는 연결 검사 이분 그래프를 기반으로 하고 있다. 다음 내용은 JC-BP 복호알고리즘을 설명한다.

원소  $z_m$ 은 행렬 H의 각각의 행  $m=1,2,\dots,M$ 에 대응해 검사로 정의하고, 원소  $x_l$ 은 행렬 H의 각각의 열  $l=1,2,\dots,N$ 에 대응해 변수로 정의한다.  $L(m)$ 에 의한 검사 m에 관계하는 지정된 변수 l을 표시한다. 마찬가지로, 우리는 변수 l에 관계하는 지정된 검사  $M(l)$ 을 정의한다. 알고리즘은 교대해서 반복적으로 갱신되는 두 부분을 가진다. 그 두 부분에서  $q_{ml}$ 과  $r_{ml}$ 은 패리티 검사 행렬 H의 0이 아닌 원소들과 관련된다. 이 때  $q_{ml}^x$ 은 변수 l이 x값을 가질 확률의 의미를 가지고  $r_{ml}^x$ 은 변수 l이 x값을 가질 때 검사 m을 만족시키는 확률을 의미한다.

1. 초기화: 변수  $x_l$ 은  $a \in \{0,1\}$  일 확률을  $p_l^a = P(x_l=a)$ 라 하자. 변수  $q_{ml}^a$ 은  $p_l^a$  값으로 초기화된다.
2. 수평 과정: 검사 m은  $M_{free}$ 와  $M_{cycle}$  두 개로 나뉜다.  $M_{free}$  안에 검사 m은 길이가 4인 주기를 가지지 않고  $M_{cycle}$  안에 두 개의 검사  $m_1$ 과  $m_2$ 은 길이가 4인 주기를 가진다. 길이가 4인 주기가 있는 두 개의 검사  $m_1$ 과  $m_2$ 는 4-주기 검사 한 쌍으로 불린다. 우리는  $M_{cycle}$ 내에 있는 모든 검사를 4-주기 검사 쌍으로 가정한다. 만약 홀수개이면 하나의 검사를  $M_{free}$ 에 추가시킨다. 하나의 검

사가 전체 성능에 미치는 영향은 미미하다고 볼 수있다. 초기에  $M_{free}$ 를 위해,  $r_{m_l}^a$ 를 계산하면 다음과 같다.

$$r_{m_l}^a = \prod_{\{x_i; i \in (m_j) \setminus \{l, j' = 1, 2\}\}} \prod_{\{l, j' = 1, 2\}} \{z_{m_l}, z_{m_2}\} \\ \times \prod_{l \in L(m) \setminus \{l\}} q_{m_l}^{x_l}$$

$$r_{m_l}^a = \prod_{\{x_i; i \in (m_j) \setminus \{l, j' = 1, 2\}\}} \{z_{m_l}\}$$

이들의 합속의 조건부 확률은  $x_l$ 과  $\{x_{l'}\}$ 가 검사  $m$ 을 만족시킬 때 1이고 다른 경우에 0이다. 계산은 검사  $m$ 을 초기상태와 마지막 상태를 0으로 가정하는 두개의 상태의 격자로 생각하면 효과적으로 계산할 수 있고 FBA(forward-backward algorithm)을 이용해 확률 계산을 할 수 있다. 다음으로,  $M_{cycle}$ 에 대해 4주기 검사 쌍 안의 두 개의 검사  $m_1$ 과  $m_2$ 는 동시에  $r_{m_1}^a$ 과  $r_{m_2}^a$  모두 계산하기 위해 사용된다.

$$x \{x_i; i \in L(m_j) \setminus \{l, j' = 1, 2\}\} \\ \times \prod_{l \in L(m) \setminus \{l\}} q_{m_l}^{x_l}$$

여기에서  $j=1,2$ .

위에서 합속의 조건부 확률은  $x_l$ 과  $\{x_{l'}\}$ 이 동시에 두 검사  $m_1$ 과  $m_2$ 를 만족할 때 1이고 다른 경우에는 0이다.  $r_{m_l}^a$ 의 계산은 연결 검사 BP 복호 알고리즘의 중요 부분이다. 계산은 체크  $m_1$ 과  $m_2$ 를 하나의 융합 격자로 생각하여 효과적으로 계산된다. 체크  $m_1$ 과  $m_2$ 의 두 격자는 길이가 4인 주기를 가지므로 공통 격자 부분을 갖는다. 두 공통 격자 부분은 융합 격자 안에서 일 부분이 된다. 열 인덱스  $l_1$ 과  $l_2$ 를 체크  $m_1$ 과  $m_2$ 안에서 길이가 4인 주기의 열 위치가 되게 한다. 이 때 만약 체크  $m_1$ 과  $m_2$ 가 두개 이상의 길이가 4인 주기를 가질 경우는 그 중 하나만을 선택한다. 다시 말해서,  $r_{m_{1l_1}}^a$ ,  $r_{m_{1l_2}}^a$ ,  $r_{m_{2l_1}}^a$ 과  $r_{m_{2l_2}}^a$ 는 두개의 공통 격자 섹션에 대응된다. 그래서 우리는 오직  $r_{m_{1l_1}}^a$ 과  $r_{m_{1l_2}}^a$ 를 계산하고 그 다음에  $r_{m_{2l_1}}^a$ 과  $r_{m_{2l_2}}^a$ 는 효과적인 변수 노드 갱신을 위해  $a=0$ 과  $a=1$  둘 다를 위

해 1를 정한다.

3. 수직 과정: 수직 과정은  $r_{m_l}^a$ 의 계산 값을 가지고 확률  $q_{m_l}^a$ 의 값을 갱신한다. 각각의  $l$  대해 다음을 계산한다.

$$q_{m_l}^a = \alpha_{m_l} \beta_{m_l}^a \prod_{m \in M(l)} r_{m_l}^a$$

$\alpha_{m_l}$ 의 값은  $q_{m_l}^0 + q_{m_l}^1 = 1$ 로 정해진다. 또한 중간 결정을 위해 이 반복에서 다음 식에 의해  $q_1^0$ 과  $q_1^1$ 의 확률을 계산한다.

$$q_1^0 = \alpha_{m_1} \beta_{m_1}^0 \prod_{m \in M(1)} r_{m_1}^0$$

이 값들은 임시의 복호 결정을 위해 사용된다.

이상의 제안된 알고리즘에서 보통이 복잡도는  $M_{cycle}$  안의 두 개의 검사  $m_1$ 과  $m_2$ 의 길이가 4인 주기가 열방향 두 비트가 한번만 계산되는 것을 알 수 있다. 반면 표준 BP 복호를 사용한다면 따로 따로 두번 계산을 하게 된다. 그러므로 제안된 알고리즘의 복잡도 감소는  $M_{cycle}$  안의 길이가 4인 주기의 개수에 비례한다고 볼 수 있다.

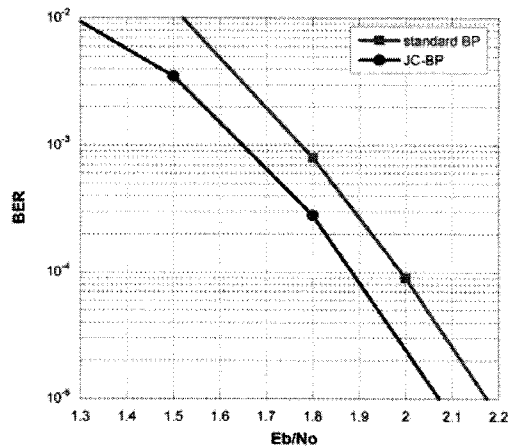


그림 2. 정규 LDPC 부호: 부호 A의 연결 검사(JC) BP 복호 성능과 부호 B에 대한 표준 BP 복호 성능의 비교

### III. JC-BP 복호의 성능 결과

처음에 우리는 무작위로 생성한 정규 (3,6)

LDPC 부호를 고려했다. 이 모의 실험에서,  $(N,K)=(2000,1000)$  LDPC 부호와 부호 비율 1/2이고  $N$ 이 부호 길이이고  $K$ 는 정보 길이로 사용된다. 최대 복호 반복수는 50이다. 연결 검사 BP 복호를 위해 LDPC 부호 A는 길이가 4인 짧은 주기의 다수를 갖는다.  $M_{cycle}$ 에 속한 부호 A 안의 길이가 4인 주기의 수는 500이다. 이 경우에 모든 체크  $m$ 은  $M_{cycle}$ 에 속한다. 표준 BP 복호를 위해 LDPC 부호 B는 길이가 4인 짧은 주기를 가지지 않는다. 그림 2.에서 A 부호의 JC-BP 복호 성능과 부호 B의 표준 BP 복호 성능이 함께 비교되었다. 모의실험 결과는  $10^{-5}$  BER(Bit-Error-Rate)에 B부호의 표준 BP 복호 보다 A부호의 연결 검사 BP 복호의 수행이 0.1dB이 낮다는 것을 보여준다. 다음 모의 실험은 이진 입력 가산 가우시안 노이즈 채널의 샤논 한계에 0.0045 dB 안쪽의 성능을 가지는 무게 분포를 가지는 비정규 LDPC 부호를 고려했다. 논문에서는<sup>[5]</sup> 최대 변수 정도  $d_v$ 이 200이고 길이  $N=10^7$ 인 LDPC 부호로 샤논 한계의 0.04dB 내의 성능을 달성하였다. 우리의 모의실험을 위해 실질적인 길이인  $N=10^4$ 의 부호 길이와 부호율 1/2을 사용하였다. 연결 검사 BP 복호를 위해  $M_{cycle}$ 에 속하는 LDPC 부호 C 안에 길이가 4인 주기의 숫자는 2500이다. 표준 BP 복호를 위해 LDPC 부호 D를 구성할 때 길이가 4인 짧은 주기는 최대한 피하였다. 그림 3.에서 C 부호의 연결 검사 BP 복호 성능과 D 부호의 표준 BP 복호 성능을 비교하였다. 모의실험 결

과는  $10^{-5}$ 의 BEP에 연결 검사 BP 복호를 사용한 D 부호의 성능이 표준 BP 복호를 사용한 C 부호의 성능보다  $10^{-5}$  BER에서 0.5dB 낮다는 것을 보여준다.

#### IV. 결론

우리는 다수의 짧은 주기를 추가시켜 LDPC부호의 성능을 향상시켰다. 표준 BP 복호를 사용할 때, 짧은 주기, 특별히 길이가 4인 주기는 LDPC 부호의 성능을 저하시킨다. 따라서 현재 연구는 LDPC 부호의 좋은 성능을 얻기 위해 길이가 4인 주기를 없애는데 초점을 맞추고 있다. 우리는 수정된 BP 복호를 사용할 때, 길이가 4인 다수의 주기가 LDPC 부호의 성능을 향상시킴을 발견했다. 우리는 다수의 짧은 주기와 가진 LDPC 부호를 위해 수정된 BP 복호 알고리즘을 제시했다. 우리는 정규 LDPC 부호뿐만 아니라 비정규 LDPC 부호에 대해서도 짧은 주기를 제거하도록 설계된 LDPC 부호의 표준 BP 복호 성능보다 다수의 짧은 주기를 추가한 LDPC 부호의 수정된 BP 복호 성능이 우수하다는 것을 모의 실험을 통해 입증하였다.

#### 참고 문헌

- [1] R. Gallager, "Low density parity check codes," MIT press, 1963.
- [2] D. J. C. MacKay, "Good error-correcting codes based on very sparse matrices," *Electronic Letters*, vol. 33, pp. 457 - 458, March 1997.
- [3] C. Berrou and A. Glavieux, "Near optimum error correcting coding and decoding: turbo-codes," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 44, pp. 1261 - 1271, October 1996.
- [4] M. Tanner, "A recursive approach to low complexity codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-27, pp. 533-547. September 1981.
- [5] S. Y. Chung, G. D. Forney, T. J. Richardson, and R. L. Urbanke, "On the design of low-density parity-check codes within 0.0045 db of the shannon limit," *Communication letters*, vol. 5, pp. 58 - 60, February 2001.

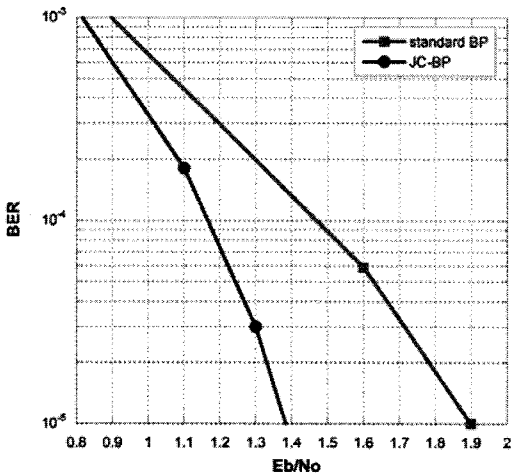
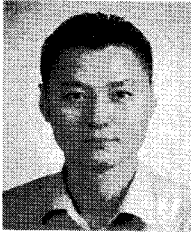


그림 3. 비정규 LDPC 부호: 부호 C의 연결 검사(JC) BP 복호 성능과 부호 D의 표준 BP 복호 성능 비교

정 규 혁 (Kyuhuk Chung)

정회원



1997년 2월 성균관대학교 전자  
공학과 졸업

1998년 12월 University of Southern  
California 전기공학 석사

2003년 12월 University of Southern  
California 전기공학 박사

1999년 8월~2000년 5월 미국

Integrated Device Technology, Inc., Member of  
Technical Staff

2001년 5월~2002년 5월 미국 TrellisWare Technology,  
Inc., Senior Engineer

2004년 2월~2005년 8월 LG전자 이동통신기술연구소  
표준화그룹 선임연구원

2005년 9월~현재 단국대학교 정보컴퓨터학부 조교수  
<관심분야> Channel Coding, Iterative Detection,  
LDPC codes, Turbo codes, Near-channel capacity  
approaching codes