중학교에서의 무리수 지도에 관하여

부산대학교 김부윤
kimby@pusan.ac.kr
부산대학교 정영우
nahime1130@hanmail.net

본고에서는 무리수 개념 발생을 대수적인 측면과 기하적인 측면에서 고찰하고, 第7차 교육과정과 교과서에서 무리수를 어떻게 다루고 있는지를 살펴본다. 그 결과로 무리수 개념 발생의 본질적 요소인 통약불가능성이 드러나지 않고 있음은 물론, 유리수 개념과의 내적 연결성도 미약함을 알 수 있었다. 따라서 유리수의 본질적 개념과 연결 지어 중학교 단계에서 작도 등을 활용하여 무리수의 본질적인 개념을 관계적으로 이해시킬 수 있는 지도 방안을 제안한다.

주제어 : 유리수, 무리수, 공통척도, 통약가능, 통약불가능

0. 서론

第7차 수학과 교육과정에서는 중학교 <수와 연산> 영역의 지도의 의의를 다음과 같이 밝히고 있다.

수는 자연수, 정수, 유리수, 실수의 순서로 개념을 확장하여 이해하도록 하며, 수 개념의 정확한 이해를 통하여 수 사이의 연산을 할 수 있게 하여야 한다. 사칙계산을 능숙하게 함으로써 타 영역에서의 학습활동에 도움이 된다는 것을 인식하도록 하여야 한다([3]).

즉, 수의 확장과 수 개념에 대한 정확한 이해, 그리고 이를 바탕으로 한 연산의 숙달을 강조하고 있다. 그러나 수 개념의 이해와 관련하여 많은 선행 연구들이 무리수의 개념 지도에 있어 본질적 이해가 이루어지지 못하고 있다고 밝히고 있다. 이러한 연구들은 학교수학에서 무리수의 개념을 지도할 때 무리수 발생의 본질적 개념인 '통약불가능성(incommensurability)'을 강조할 것을 주장하고 있다([5], [10], [12], [13]). 아울러 이들은 통약불가능성의 도입이 개념의 이해와 연산의 이해에 도움을 줄 수는

있지만, 중학교 3학년생에게는 어려운 개념이므로 그 도입 시기와 정도에 관해서는 논의가 필요함도 밝히고 있다([10], [12], [13]).

통약불가능성은 무리수 개념의 발생 과정에서 나타난 개념으로, 유리수와의 관련성 및 무리수의 존재성이 자연스럽게 대두되는 개념이다. 따라서 학교수학에서 무리수를 지도할 때 이러한 통약불가능성을 강조하는 것은 역사적 맥락 속에서 무리수 개념의 발생 과정을 접할 수 있어 무리수에 대해 의미 충실하게 이해할 수 있게 한다.

본고에서는 첫째, 수학사적 맥락에서 무리수의 발견을 대수적인 측면과 기하적인 측면에서 고찰하고, 둘째, 현행 교육과정에서는 무리수의 개념을 어떻게 지도하도록 하고 있는지, 그리고 이것을 지침으로 교과서에서는 어떻게 무리수의 개념을 도입하고 있는지를 분석한다. 마지막으로 학생들이 무리수의 개념을 보다 정확하게 이해할 수 있도록 역사 발생적 원리를 고려한 단계적인 지도 방안을 제안한다.

1. 무리수의 이해

무리수는 고대 바빌로니아나 이집트에서 이미 다루어지고 있었다고 하지만 무리수 존재에 대한 인식이 있었다고는 볼 수 없으며, 무리수 개념을 발견한 것은 피타고라스학파라고 알려져 있다.

피타고라스학파는 '모든 수는 정수의 비로 표현 가능하다'고 믿었으며, '모든 크기들은 같은 표준으로 잴 수 있다'는 가정을 바탕으로 한 비례의 정의를 가지고 있었다([18]). 이들 둘은 전자는 대수적인 측면에서, 후자는 기하적인 측면에서의 '통약가능(commensurable)'의 의미를 내포하고 있다고 할 수 있다.

모든 수는 정수의 비로 표현 가능하다	⇔	통약가능	⇔	모든 크기들은 같은 표준으로 잴 수 있다

'모든 크기들은 같은 표준으로 잴 수 있다'는 것은 공통척도를 갖는다는 것을 뜻하며, 공통척도를 갖는다는 것은 어떤 선분 e가 존재하여 두 선분 a, b를 선분 e의 정수배, 즉 적당한 정수 p, q가 존재하여

$$a = pe, \ b = qe$$

로 나타낼 수 있음을 뜻한다. 바꿔 말하면, 이는 $\frac{a}{b} = \frac{pe}{qe} = \frac{p}{q}$로서 두 선분의 길이의 비가 $\frac{(\text{정수})}{(\text{정수})}$꼴로 표현될 수 있다는 뜻인데, 유리수의 비 개념인 이것이 통약가능성에 의한 유리수의 본질적 개념이다.

이처럼 모든 수는 통약가능하다고 믿었던 피타고라스학파는 유리수로 표현되지 않

는 수를 발견하게 되어 모순에 빠지게 된다.

(1) 무리수의 발견

가. 대수적인 측면에서의 무리수의 발견

이는 귀족사회의 상징이었던 기하평균 $a:b=b:c$에 관한 관심의 결과이다. 즉, 1과 2의 기하평균이 무엇일까? 라는 의문을 통해 정사각형의 변과 대각선의 비를 연구하게 되었고, 그 비는 '수' – 즉, 우리가 오늘날 유리수(정수 또는 분수)라고 부르는 수 – 로 표현될 수 없다는 것을 발견하였다. 아리스토텔레스는 정사각형의 한 변과 대각선의 비의 통약불가능성을 다음과 같이 나타내고 있다.

이 비를 서로 소인 두 수 p와 q에 대하여 $p:q$라 하자[1]. 그러면 $p^2=2q^2$이므로 p^2은 짝수이고, 따라서 p도 짝수이다. 이 때 $p=2r$이라 하자. 그러면 q는 홀수이어야 한다. 그러나 $q^2=2r^2$이므로 q는 짝수가 되기 때문에 모순이다([17]).

이처럼 그 존재성은 부인할 수 없지만 지금까지의 수로써는 나타낼 수 없는 수가 나타난 것이다.

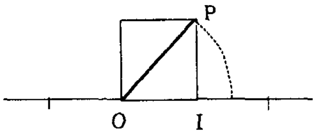
나. 기하적인 측면에서의 무리수의 발견

피타고라스학파는 대수적인 측면에서 해결하지 못한 수의 문제를 기하적인 측면에서 해결하려고 하였다. 그들은 유리수에 대하여 다음과 같은 기하적인 해석을 가지고 있었다.

직선 위에 서로 다른 두 점 O와 I가 있어 OI가 단위 길이가 되도록 각각 0과 1을 나타낸다면, 그 단위 길이의 이동으로 모든 정수는 이 직선 위의 한 점으로 나타내어진다. 원점 O의 오른쪽에 양의 정수를, 왼쪽에 음의 정수를 위치시킨다.

한편, 분모가 q인 분수는 단위 구간을 q등분할 때의 각 분점으로 표현되므로 모든 유리수 역시 이 직선 위의 한 점에 대응하게 된다. 초기 수학에서는 직선 위의 모든 점이 이런 식으로 완전히 덮일 수 있다고 생각하였다.

그런데 어떤 유리수에도 대응하지 않는 점이 존재한다는 사실을 알게 되었다. 즉, 한 변이 단위 길이인 정사각형의 대각선은 직선 위에 나타내어지지만, 이에 대응하는 유리수가 없음을 발견하게 되었다. 따라서 유리수와 구별되는 수로서 무리수의 정의가 필요하게 되었다([18]).



1) (정사각형의) 한 변 : 대각선 $=q:p$

이는 같은 표준으로 잴 수 없는 크기가 존재한다는 것 즉, 단위 구간의 등분[2)]으로 인한 분점이 되지 않는 수가 존재한다는 것을 뜻한다.

이상과 같이 무리수의 발견은 두 가지 측면에서 논해질 수 있지만, 공통적으로 내재되어 있는 개념이 존재하는데, 그것이 바로 '통약불가능성'이다. 그러므로 무리수는 공통척도를 가지지 않는, 다시 말해서 정수의 비로 나타낼 수 없는 수인 것이다.

(2) 통약불가능의 예

피타고라스학파는 이러한 통약불가능의 개념을 정사각형의 한 변과 대각선, 정오각형의 한 변과 대각선의 경우에서 다루었다. 여기서는 중학교의 교과 내용과 관련되는 정사각형의 경우만을 살펴보기로 한다.

정사각형의 한 변과 그 대각선은 통약불가능하다.

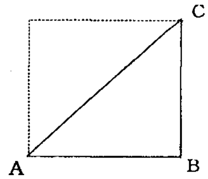
이 정리의 여러 가지 증명방법을 살펴보자.

가. 대수적인 측면에서의 증명

<그림 1>에서 $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{p}{q}$인 서로 소인 p와 q가 존재한다고 가정하자. 피타고라스의 정리에 의해

$$AB^2+BC^2=AC^2$$

이 성립하는데, $AB=BC$이므로 $2AB^2=AC^2$이 되고, 따라서



<그림 1>

$$\frac{AC^2}{AB^2}=2$$

가 된다. 그러므로

$$\frac{p^2}{q^2}=2$$

즉, $p^2=2q^2 \cdots\cdots$ ①

따라서 p^2은 짝수이고, p도 짝수이다. 여기서 $p=2r$이라 하자. 제곱하면

$$p^2=4r^2 \cdots\cdots \text{②}$$

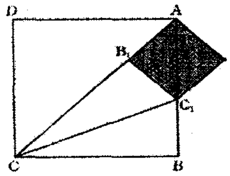
이 되고, ①, ②에서 $2q^2=4r^2$이 성립한다. 즉,

$$q^2=2r^2$$

따라서 q^2은 짝수이고, q도 짝수이다. 이것은 p와 q가 서로 소라는 가정에 모순이다. 그러므로 정사각형의 한 변과 대각선은 통약불가능이다([13]).

2) 등분으로 만들어진 선분의 길이가 공통척도(같은 표준)가 되며, 그 분점이 유리수와 대응된다.

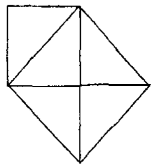
나. 기하적인 측면에서의 증명



<그림 2>

<그림 2>와 같이 선분 AP가 존재하여 정사각형 ABCD의 대각선 AC와 변 AB는 선분 AP의 정수배가 된다고 가정하자. 선분 AC 위에 $\overline{CB_1} = \overline{AB}$인 점 B_1을 표시하고, $\overline{AC}$에 수직인 $\overline{C_1B_1}$을 그린다. 따라서 $\angle C_1B_1C = \angle C_1BC = 90°$, $\overline{CC_1}$은 공통변, $\overline{CB_1} = \overline{CB}$이므로 $\triangle C_1B_1C \equiv \triangle C_1BC$이다. $\triangle AB_1C_1$이 이등변삼각형이므로 $\overline{C_1B} = \overline{C_1B_1} = \overline{AB_1}$이 된다. 그러면 $\overline{AC_1} = \overline{AB} - \overline{AB_1}$이 성립하고, $\overline{AB_1}$은 선분 AP로 측정할 수 있다. 이제 $\overline{AC_1}$과 $\overline{AB_1}$은 원래 일정한 비율로 줄어든 정사각형의 대각선과 변이 된다. 또한, $\overline{AC_1}$과 $\overline{AB_1}$은 $\overline{AP}$의 배수가 된다. 이 과정을 충분히 반복하면, 결국 대각선 $\overline{AC_n}$과 $\overline{AB_n}$이 $\overline{AP}$의 배수로 측정되며, $\overline{AC_n} < \overline{AP}$가 성립하는 정사각형을 얻게 되므로 모순이다. 그러므로 정사각형의 한 변과 대각선은 통약불가능하다([12]).

다. 수치적 접근 방법



<그림 3>

측정을 이용하여 공통척도가 없다는 것을 보이는 증명을 해보자. 이 방법은 무리수의 발견과정의 관점은 아니지만[3], 교과서에서 무리수의 도입 및 무리수성의 증명에 응용되는 방법으로 통약불가능성을 포함하고 있다.

우선 주어진 정사각형의 대각선을 이용하면 넓이가 2배가 되는 정사각형을 그릴 수 있다. 주어진 정사각형의 한 변을 100등분하면 그 넓이는 10000이고, 구하고자 하는 정사각형의 넓이는 20000이다. 그러나 이 값을 안다고 해서 도형을 그리는 것이 보장되지는 않는다. 이 둘은 별개의 문제이므로 제곱하여 20000이 되는 수를 찾아야 구하는 도형을 그릴 수 있다.

그러면 제곱하여 20000이 되는 수는 무엇인가? $141^2 = 19881$, $142^2 = 20164$이고 20000은 둘 사이에 있으므로, 제곱하여 20000이 되는 수는 주어진 변의 $\frac{1}{100}$ 척도로는 표시될 수 없다. 여기서 한 변을 더 잘게 등분해 보기 위해 1000등분 해보자. 주어진 정사각형의 넓이는 1000000, 구하는 정사각형의 넓이는 2000000이므로 제곱하여 2000000이 되는 수를 찾아야 한다. 그런데 $1414^2 = 1999396$, $1415^2 = 2002225$이므로 역시 $\frac{1}{1000}$ 척도로도 부족하다. 몇 번의 시행을 통해 더 잘게 등분하더라도 그 길이를 찾을 수 없음을 알게 된다. 따라서 어떤 정사각형의 한 변을 아무리 잘게 등분하여도

3) 이것이 바로 정사각형의 한 변과 대각선의 공통척도를 찾기 위해 한 변을 잘게 나누어 보는 역사상의 시도였을 것이다([13])고 보는 견해도 있다.

넓이가 2배인 정사각형의 한 변 – 즉, 원래 정사각형의 대각선 – 은 변의 나뉜 부분을 정확한 개수만큼 가질 수 없다. 이와 같이 정사각형의 한 변과 대각선은 공통척도로 측정할 수 없으므로 통약불가능하다([13]).

(3) 증명 예의 비교

위의 세 방법 중 앞의 두 방법은 '정사각형의 한 변과 대각선의 관계'에 대한 논의이지만, 뒤의 것은 '정사각형의 한 변과 넓이가 두 배인 정사각형의 한 변의 관계'에 대한 논의이기도 하다([5]).

이제 이 증명법들을 학교수학에의 적용을 고려하여 살펴보자.

첫째, 대수적인 측면의 방법은 비교적 명확하고 자연스러워 비약이 없이 증명이 가능하지만, '피타고라스의 정리'와 'p^2이 짝수이면 p가 짝수이다'는 명제가 사전에 학습되어 있어야 한다. 또 이 방법은 통약불가능성이 드러나지 않은 채 정수비로 나타내는 것에서 출발하므로(이는 유리수의 표현일 뿐이다) 본질적 개념이 간과되어 있다. 따라서 '정수비'의 개념을 이용한 통약가능성의 지도를 통해 유리수의 본질적인 개념으로부터 무리수의 본질을 설명하도록 하여야 할 것이다.

둘째, 기하적인 측면의 방법은 통약가능성에 대한 개념이 증명과정 전반에 걸쳐 사용되고 있으나 이에 대한 이해가 없으면 '선분 AP가 존재하여 정사각형 ABCD의 대각선 AC와 변 AB는 선분 AP의 정수배가 된다고 가정하자'라는 문장에서 왜 그런 선분 AP가 존재해야 하는지 알 수가 없다. 따라서 이 경우는 통약가능성을 선분의 공통척도와 관련하여 지도하는 사전 학습이 필요하게 된다. 그리고 '몇 번의 시도 후 공통척도보다 작아지는 변이 존재함'은 직관에 의존하여 이해하게 되므로 명확한 개념 이해보다는 도구적으로 이해하게 되는 단점이 있다.

셋째, 수치적 접근 방법은 100등분, 1000등분 하는 몇 번의 시행으로 공통척도가 존재하지 않는다고 하는 비약을 하고 있다. 이 방법은 측정과 관련된 것으로 이를 엄밀히 지도하기 위해서는 결국 급수의 개념이 필요하게 된다. 따라서 해석적인 측면의 증명이라고도 할 수 있다. 그러나 이 예에서는 급수의 개념이 두드러지지 않으므로 여기에서는 수치적 접근 방법이라 부르기로 한다.[4] 이 방법은 중학교에서는 무리수의 소수 표현을 알아보는 도입 단계에서 소개되고 있는데, 무리수성을 보이기 위해서는 급수의 개념이, 불가능성을 보이기 위해서는 간접증명법에 대한 이해가 필요하므로 중학교 수준에서는 직관이 더욱 강조될 수밖에 없다. 따라서 이 방법을 이용하여 무리수성을 보이는 것은 고등학교 수준에서 가능하므로 무리수의 지도시기가 고려되어야 할 것이다.

---

4) 여기서는 단순히 변의 길이를 보다 작은 길이로 등분하는 것에만 초점을 두고 있어 소수 표현과 무관하게 증명이 전개되고 있으므로 이 증명법을 해석적인 측면의 방법으로 보기는 어렵다. 그러나 교과서에서와 같이 소수 표현에서 이와 같은 증명법을 이용한다면 급수 개념이 필요해지며, 따라서 해석적인 측면의 증명으로 보아야 한다.

2. 무리수 지도의 실제

무리수는 <9-가> 단계에서 처음으로 다루는 개념이다. 제7차 교육과정의 <학습 지도상의 유의점>에서 무리수를 도입할 때에는 무한소수를 소재로 한다고 밝히고 있는데([3]), 이는 유리수와 소수의 관계에 대한 지도 내용과 관련되어 있다. 따라서 유리수의 지도 내용을 먼저 살펴보고, 교육과정에서 밝히고 있는 무리수의 지도와 이를 구체화한 교과서에서 어떻게 무리수를 도입하고 있는지 고찰하기로 한다.

(1) 교육과정에서의 유리수

중학교에서는 초등학교에서 학습한 분수 개념과 그 사칙계산을 바탕으로 <7-가 > 단계에서 유리수의 뜻과 그 사칙계산을, <8-가> 단계에서 유리수와 소수를, <9-가 > 단계에서는 제곱근, 무리수의 개념을 학습하게 된다.

현재 유리수의 정의는 <7-가> 단계에서 다음과 같이 다루고 있다.

유리수는 분자와 분모가 모두 정수(분모$\neq$0)인 분수로 나타낼 수 있는 수이다.

교육과정에서는 선분의 통약가능성을 기준으로 한 대수적인 측면에서, 초등학교에서 학습해 온 분수 개념을 이용하여 유리수를 정의하고 있다.

이후 <8-가> 단계에서 유리수와 소수와의 관계를 다음과 같이 지도하도록 하고 있다.

유리수를 소수로 나타내면 유한소수 또는 순환소수가 되고, 거꾸로 유한소수와 순환소수는 모두 분수꼴로 나타낼 수 있으므로 유리수이다.

이와 같이, 교육과정에서는 'a, b가 정수이고 $b \neq 0$일 때, 분수 $\frac{a}{b}$를 유리수라고 정의하였음을 확인시키고, $\frac{a}{b} = a \div b$ 라는 사실을 통하여 모든 유리수는 분자를 분모로 나눔으로써 소수로 나타낼 수 있음을 이해하게 한다'([3])라 하여 소수와의 관계가 유리수의 정의가 아님을 분명히 하고 있다.

(2) 교육과정에서의 무리수

제7차 교육과정에서는 다음과 같이 최초로 발견된 무리수 $\sqrt{2}$를 예로 들어 유리수의 대조 성질[5]을 이용하여 무리수를 정의하고 있다.

---

5) 많은 수학적 개념들은 대조(contrast) 성질에 따라서 정의되고 있다. 소수는 1도 아니고 합성수도 아닌 수로 정의되고, 무리수는 유리수가 아닌 수로 정의되고 있다([11]).

$\sqrt{2}$가 유리수가 아님을 직관적으로 보여줌으로써 유리수가 아닌 수가 존재함을 알게 하고, 또 이러한 수를 무리수라고 함을 알게 한다. ……(중략) 무리수를 소수로 나타내면 순환하지 않는 무한소수가 됨을 알게 하고, 제곱근을 소수로 나타내는 과정을 통하여 제곱근의 근사값을 구할 수 있게 한다([3]).

다시 말해, '유리수가 아닌 수'로 무리수를 정의하고 난 뒤에, 소수 표현을 다루도록 하고 있어 <8-가> 단계의 내용과 일관성이 있다. 그러나 $\sqrt{2}$를 소재로 '직관적'으로 유리수가 아님을 보이라는 내용과 무리수 도입은 무한소수를 소재로 한다는 내용이 교과서마다 다르게 해석되어 무리수 도입은 교과서별로 차이를 보이고 있다.

(3) 교과서에서의 무리수

가. 무리수의 도입

교육과정을 구체화한 교과서[6]에 나타난 무리수의 정의를 조사해보자.

교과서	무리수의 정의	기타
가	어떤 수를 소수로 나타낼 때, 순환하지 않는 무한소수가 되는 수를 무리수라 한다.	부가적으로 '무리수는 분수 $\frac{a}{b}(a,\ b:$ 정수, $b \neq 0)$의 꼴로 나타낼 수 없는 수이다' 라고 제시.
나	유리수가 아닌 수를 무리수라고 한다. 즉 무리수는 순환하지 않는 무한소수로 나타내어지는 수이다.	
다	유리수가 아닌 수를 무리수라 하는데, 무리수는 순환하지 않는 무한소수로 나타내어진다.	
라	순환하지 않는 무한소수로 나타내어지는 수를 무리수라 한다.	
마	순환하지 않는 무한소수를 무리수라 한다.	
바	순환하지 않는 무한소수를 무리수라 한다. 따라서 무리수는 유리수가 아닌 수이다.	
사	소수로 나타낼 때, 순환하지 않는 무한소수가 되는 수를 무리수라고 한다. 즉, 무리수는 유리수가 아닌 수이다.	
아	유리수가 아닌 수를 무리수라고 한다. 따라서 무리수는 순환하지 않는 무한소수로 나타내어진다.	

6) 중학교 검정교과서 중 임의로 선정된 8개의 교과서를 대상으로 하였다.

위의 정의들은 세 유형으로 나누어 생각해 볼 수 있다.

① 유리수가 아닌 수를 무리수라고 한다. 즉, 무리수는 순환하지 않는 무한소수로 나타내어지는 수이다.

이 정의는 3개의 교과서(나, 다, 아)가 채택하고 있는데, 대조 성질을 이용하여 무리수를 정의하고, '무리수를 소수로 나타내면 순환하지 않는 무한소수'로 나타난다는 교육과정의 지침을 그대로 반영하고 있다.

② 순환하지 않는 무한소수를 무리수라고 한다.

이 정의는 2개의 교과서(마, 바)가 채택하고 있는데, 무리수의 본질적인 정의가 아닌 '순환하지 않는 무한소수'를 무리수의 정의로 사용하고 있다. 그러므로 교육과정에서 제시하고 있는 유리수와의 대조 성질에 의한 무리수의 정의[7]를 사용하지 않고 있다.

③ 어떤 수를 소수로 나타낼 때, 순환하지 않는 무한소수가 되는 수를 무리수라 한다.

이 정의는 3개의 교과서(가, 라, 사)가 채택하고 있는데, 무한소수를 소재로 도입하라는 교육과정의 지침에 따른 직관적 수준의 표현이라 할 수 있다. 이 경우도 교육과정에서 제시하고 있는 유리수와의 대조 성질에 의한 무리수의 정의는 아니며, 형식적인 무리수의 정의를 제시하고 있지 않다고 볼 수 있다.

결론적으로, 무리수 도입은 대다수의 교과서가 무리수와 소수와의 관계를 소재로 하고 있거나 순환하지 않는 무한소수를 무리수로 정의하고 있음을 알 수 있다.

나. 무리수의 도입과 무리수성의 증명

무리수의 도입과정과 무리수성의 증명에 대하여 좀 더 구체적으로 살펴보자.[8]

교과서	무리수의 도입	무리수성의 증명
가	$\sqrt{2}$의 소수 표현으로 도입.	$\sqrt{2}$가 무리수임은 증명하지 않음.
나	생활 속의 소재, 유리수와 소수와의 관계로부터 도입	$\sqrt{2}$가 유리수가 아님을 정수와 기약분수의 성질을 이용하여 보임. 그 후 $\sqrt{2}$의 소수 표현으로 무리수임을 증명.
다	$\sqrt{2}$의 소수 표현 그리고 $\sqrt{2}$가 유리수가 아님을 정수와 기약분수의 성질을 이용하여 보인 후 도입.	$\sqrt{2}$가 무리수임은 증명하지 않음.
라	$\sqrt{2}$의 소수 표현을 다룬 후, 유리수의 정의와 유리수와 소수와의 관계로부터 도입.	$\sqrt{2}$가 무리수임은 증명하지 않음.

7) 유리수의 대조성질로서 무리수를 도입하는 것은 무리수의 존재성과 개념 발생의 필연성이 자연스럽게 받아들여질 수 있다.

8) 여기서는 무리수를 정의하기 전의 내용을 도입, 그 후의 내용을 무리수성의 증명으로 보았다.

마	유리수와 소수와의 관계 그리고 $\sqrt{2}$ 의 소수 표현으로 도입.	$\sqrt{2}$가 무리수임은 증명하지 않음.
바	유리수와 소수와의 관계 그리고 $\sqrt{2}$ 의 소수 표현으로 도입.	$\sqrt{2}$가 유리수가 아님을 정수와 기약분수의 성질을 이용하여 보임.
사	$\sqrt{2}$의 소수 표현, 유리수와 소수와의 관계 그리고 $\sqrt{2}$가 유리수가 아님을 정수와 기약분수의 성질을 이용하여 보인 후 도입.	$\sqrt{2}$가 무리수임은 증명하지 않음.
아	유리수와 소수와의 관계로부터 도입.	$\sqrt{2}$가 유리수가 아님을 정수와 기약분수의 성질을 이용하여 보임. 그 후 $\sqrt{2}$ 의 소수 표현으로 무리수임을 증명.

이와 같이 $\sqrt{2}$를 예로 하여 무리수의 개념을 직관적으로 보이고 있는 교과서가 많으며, 소수 표현과 관련해서 집중적인 도입이 이루어지고 있음을 알 수 있다. 또한 무리수 단원에서는 $\sqrt{2}$의 소수 표현을 특정한 값으로 일방적으로 제시하고 있어 무리수의 개념 안에 유리수의 본질적인 개념인 공통척도의 문제가 들어있다는 것을 드러내기가 어렵게 되어 있다는 것을 알 수 있다.

결론적으로, 중학교 단계에서 무리수의 개념 지도는 소수와의 관계를 이용하여 직관적으로 정의되고 있으며, 무리수성의 증명도 대다수의 교과서에서 다루고 있지 않음을 알 수 있다.

(4) 결과 및 논의

현행 교육과정에서는 유리수를 '정수비'로 정의하고 소수와의 관계를 다루고 난 후 무리수를 '순환하지 않는 무한소수'로 도입하고 있다. 그러므로 학생들은 유리수는 '분수로 나타낼 수 있는 수'이고, 무리수는 '순환하지 않는 무한소수'로 알게 된다. 즉, 유리수와 무리수가 개념적으로 바로 연결되지 못하고 소수 표현이라는 중간단계가 들어옴으로써, 그 존재성과 관련성을 연결하지 못하고 있다. 유리수와 무리수는 수 개념이며, 분수와 소수는 수의 표현 방법이다. 수 개념의 형성에는 수의 표현 방식이 중요한 역할을 한다([19]). 유리수와 무리수처럼 발생적 측면에서 대조되는 성질을 갖고 있는 개념은 정의를 도입할 때에 일관성을 고려해야 한다[9]. 따라서 수에 대한 명확한 이해와 수 사이의 관계를 이해하기 위해 유리수를 '분수 표현'으로 정의한 후 무리수의 정

9) 무리수를 학습한 중학교 3학년(175명), 고등학교 1학년(96명), 수학 교직 이수자(25명)를 대상으로 2007년 10월 중 실시한 유리수와 무리수의 정의를 묻는 설문에서 (유리수 정의, 무리수 정의)를 (분수, 유리수가 아닌 수)라 답한 학생은 12%, 16%, 20%, (분수, 순환하지 않는 무한소수)라 한 학생은 8%, 3%, 20%였다. 반면, 두 수를 일관성 있게 이해(분수를 이용한 대조 개념)하고 있는 경우는 30%, 21%, 8%로 나타났다. 그리고 복수답안은 7%, 1%, 4 %였다. 교과서의 정의와는 달리 학생 스스로 일관성을 구축하려는 경향이 있음을 알 수 있다.

의를 도입하는 경우는 역시 '분수 표현'으로 도입하여야 하며, 유리수를 '소수 표현'으로 정의한 경우는 무리수 역시 '소수 표현'으로 도입하여야 할 것이다[10].

한편 유리수와 무리수의 도입 방법에는 분수, 소수, 방정식의 해의 존재 범위와 관련한 방법과 엄밀한 수학적 정의를 내리는 방법이 있다. 현재 중학교에서는 분수와 소수를 이용하여 정의를 하고 있다. 소수를 이용한 방법은 후속 학습인 대소 관계의 비교와 연산의 학습에서 다시 분수 표현에 의존하거나 연산 오류를 유발시키고 있다. 이는 무한소수가 명확한 수가 아니기 때문이다. 다시 말해, 무한소수는 완결되어진 형태가 아니므로 어떤 일정한 길이를 나타내는 수로 생각하기 어려워 연산을 이해하는데 어려움이 있다. 학생들은 무리수가 분수 또는 유한소수와 순환소수에 가까워질 뿐이라는 것을 이해해야 한다([19]). 또한 '유리수와 순환소수의 관계'와는 달리 '순환하지 않는 무한소수가 무리수'가 됨을 직접 증명해 보일 수 있는 방법은 없으며, 그 역도 분명하지는 않다. 그리고 변희현 외([10])는 소수 표현을 통한 무리수 개념 도입에 대해 교과서 설명만으로는 학생들이 $\sqrt{2}$의 소수 표현과정을 이해하기 어렵고, 또 위와 같은 방법의 제시만으로 $\sqrt{2}$의 소수 표현을 학생들이 직접 구성하기를 기대하기는 더욱 어려운듯하다고 지적하고 있다. 엄현정([12])도 이와 같은 학습과정으로 인해 학생들이 중요하다고 생각하는 것은 제곱근을 포함한 식을 다루는데 필요한 몇 가지 계산 기술인 제곱근의 곱셈의 성질, 무리수인 분모의 유리화 과정, 수식에서 동류항의 덧셈·뺄셈을 한다는 등의 조작적 절차에 관한 사실들이 대부분이라고 지적하고 있다. 또한, 분수를 이용한 방법에 대해서도 박인과 신보미([9])는 분수로 표현될 수 없는 수라는 무리수의 정의는 무리수가 유리수가 아니라는 것을 말해줄 뿐 구체적으로 그것이 어떤 수인지를 설명해 주지는 못하는 것 같다고 하고, 순환하지 않는 무한소수로 어떤 수가 무리수임을 보이는 과정이 필요하다고 하였다. 그러므로 형식적 정의나 수 표현보다도 그 발생에 대한 의미 있는 이해가 요구된다고 하겠다. 유리수와 무리수의 관련성에 대한 이해, 후속 학습 내용에 대한 이해, 그리고 무엇보다도 무리수 개념의 존재성에 대한 이해를 위해 역사적 발생 맥락에서 나타난 통약가능성이라는 개념은 수 표현 이전에 수 개념을 이해하는데 있어 유용한 지도 소재라 할 수 있다.

10) 정의는 용어의 뜻을 규정하기 위해 논의할 때 이용하는 개념 또는 술어의 정확한 의미를 명백히 하여 개념의 내용을 한정하는 문장 또는 식이다. 정의는 엄격하게 말하면 한 논의 중에서 약속되는 것이므로 그 논의 속에서만 적용된다. 따라서 논의를 진행시키는 방법에 따라서 같은 명제가 정의가 될 수도, 정리가 될 수도 있다. 한편, 하나의 수학적 개념과 다른 수학적 개념이 밀접한 관련성을 가지고 있어 하나로부터 다른 하나를 대조 성질로서 정의한다면 두 개념의 정의 또한 하나의 논의 속에서 진행되어야 할 것이다. 즉, 하나의 개념에 대해 하나의 명제가 정의되었고, 그에 대한 대조 성질로 다른 개념을 정의한다면 이때의 정의는 앞의 개념의 정의와 연결되어야 할 것이다.

3. 무리수 개념의 단계적 지도 방안

무리수 개념 발생의 본질인 통약불가능성을 공통 척도와 관련하여 엄밀하게 증명하려면 고등학교 이후로 미루어야 하다는 입장도 있지만([10]), 학교수학에서 무리수를 도입하는 것은 실제로 중학교 시기이므로 도입할 때 개념의 본질을 놓치게 되는 문제점이 발생된다([13]). 특히, 2007년 2월 고시된 개정 교육과정에서는 '무리수를 도입할 때에는 무한소수를 소재로 한다'는 항목을 삭제하였기에, 학습자의 수준에 따라 직관적 수준의 정의뿐만 아니라 좀 더 정확한 정의도 학습할 수 있는 기회를 제공할 수도 있으며([8]), 통약불가능성을 강조한 무리수 도입도 기대할 수 있을 것이라 생각된다.

본 연구에서는 통약불가능성을 중학교 단계에서 엄밀하게 정의하고 강조하는 것은 이해에 어려움이 있다고 보고, 작도를 이용하여 유리수와의 관계성을 강조하면서 자연스럽게 통약가능성을 접하게 하는, 그래서 무리수 개념의 본질적인 이해를 도울 수 있는 단계적 지도 방안을 제안하고자 한다. 이 내용은 제곱근을 학습한 후 무리수를 도입하는 현행 교육과정의 학습순서를 따른다.

단계 1 : 유리수의 작도11)

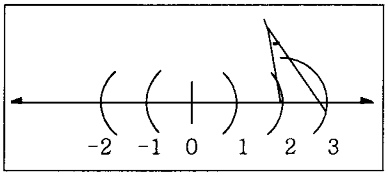
다음의 내용은 앞에서 설명한 피타고라스학파의 유리수에 대한 기하적인 해석을 예를 통하여 구현한 것이다.

활동 1 : 직선 위에 정수를 다음과 같이 작도를 통해 나타내어보자.

① 직선 위에 한 점을 잡아 0으로 두고 컴퍼스로 원하는 길이를 정하게 하여 0에서 오른쪽으로 직선 위에 나타내게 한다. 이 점을 1이라 한다.

② 이 길이를 그대로 유지하면서 새로 생긴 점에서 ①을 반복한다.

③ 왼쪽으로도 반복한다.



활동 2 : 직선 위에 $\frac{2}{3}$와 $\frac{4}{3}$, 그리고 $\frac{5}{6}$를 다음과 같이 작도하여 보자.

① 직선 위에 선분을 잡고 양 끝을 0과 1로 나타낸다. 0에서 시작하는 임의의 직선을 그린다.

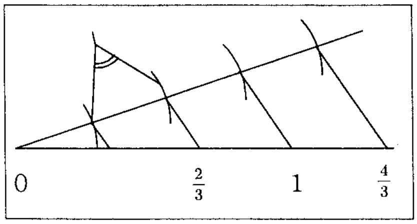
② 컴퍼스로 원하는 길이를 정하게 하여 새로 그린 직선에 필요한 만큼 활동 1의 ①을 반복한다. 예를 들어, $\frac{a}{b}(b \neq 0)$를 작도할 경우 b번 표시를 한다.

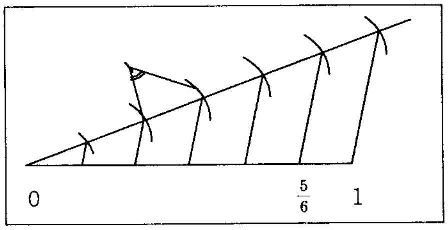
③ b번째 표시된 점과 1을 연결하고 이 직선과 평행하면서 각 표시된 점을 지나는

11) 이 내용은 작도를 이용하여 학생 스스로 구성하는 활동을 함으로써 무리수의 발견과 통약성의 개념을 보다 잘 이해하게 함을 목적으로 하며, 분점을 만드는 선분의 유일성은 '평행선 공준'에 의해 보장된다.

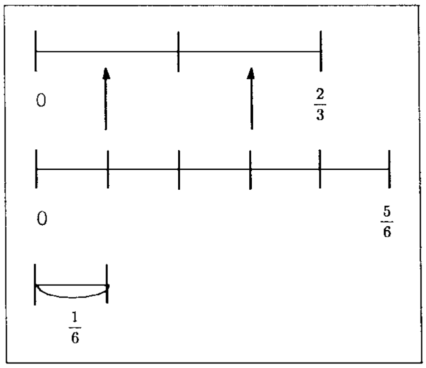
직선을 긋는다.

④ 이 직선들과 처음 주어진 직선과 만나는 점들을 표시한다.





활동 3 : 앞에서 작도한 $\frac{2}{3}$와 $\frac{5}{6}$를 그림과 같이 두고 $\frac{2}{3}$의 그림에서 각각의 작은 길이를 이등분하면 새로 생긴 작은 길이는 $\frac{1}{6}$임을 관찰하자.



각 활동은 다음과 같은 학습 내용을 담고 있다.

활동 1 : 모든 정수는 직선 위에 나타낼 수 있으며, 처음 잡은 길이의 정수배로 다른 정수들이 나타내어진다. 이때 처음 길이를 단위라 명명한다.

활동 2 : 활동 1의 단위의 분할을 통해 각 분점이 유리수가 되며, 방향을 반대로 하여 각 분점들을 표시하면 모든 유리수는 직선 위에 나타낼 수 있다. 그리고 이 직선을 수직선이라 부르기로 한다.12) 따라서 모든 정수비는 수직선 위에 나타낼 수 있다. 그리고 역시 분할된 작은 길이의 정수배로 다른 유리수들이 나타내어진다. 이때 분할된 작은 길이를 단위 또는 척도로 부르기로 한다.

활동 3 : 두 선분의 공통단위가 존재함을 알게 되고 이를 공통척도라 명명한다. 이처럼 두 선분이 공통척도를 가질 때 '통약가능하다'라고 한다. 즉, 공통척도를 e라 하면 두 선분의 비는 정수비로 표현된다.

예를 들어, $\frac{2}{3}$는 $\frac{1}{3}$이 단위이며 $\frac{1}{3}\times 2$로 나타낼 수 있다. $\frac{5}{6}$는 $\frac{1}{6}$이 단위이며

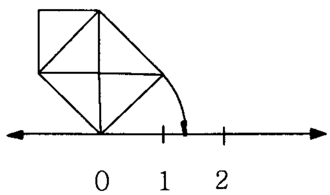
12) 이는 임시적 표현으로 실수를 정의한 후 수직선을 재정의할 필요가 있다.

$\frac{1}{6}\times 5$로 나타낼 수 있다. 그리고 $\frac{2}{3}$와 $\frac{5}{6}$는 $\frac{2}{3}=\frac{1}{6}\times 4$, $\frac{5}{6}=\frac{1}{6}\times 5$로 $\frac{1}{6}$의 배수로 나타낼 수 있으므로 $\frac{2}{3}$와 $\frac{5}{6}$의 공통척도는 $\frac{1}{6}$이다. 그리고 $\frac{1}{6}=e$라 하면 두 선분의 비는 $\frac{4e}{5e}=\frac{4}{5}$이다. 이처럼 유리수는 정수비로 나타낼 수 있는 수 – 바꾸어 말해, 공통척도로 잴 수 있는 크기 – 이다.

단계 2 : 무리수의 존재성과 그 증명

활동 4 : 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선을 이용하여 넓이가 2배가 되는 정사각형을 그려보자.

활동 5 : 넓이가 2배인 정사각형의 한 변을 컴퍼스를 이용해 수직선 위에 나타내어 보자.



활동 4와 5를 통해 수직선 위에 표시된 수에 주목할 필요가 있다. 이 수는 수직선 위에 표시되었으므로 지금까지의 사실로부터 유리수일 것이라 생각할 수 있다. 그렇다면 이 수는 정수의 비로 나타낼 수 있을 것이다. 그리고 제곱근을 학습하였으므로 이 수는 $\sqrt{2}$임을 알고 있다. 이를 바탕으로 다음을 보일 수 있다.

> 한 변의 길이가 1인 정사각형에서 대각선의 길이는 $\sqrt{2}$이다. 만일 이 두 변의 공통척도가 있다고 하면, $\frac{\sqrt{2}}{1}(=\sqrt{2})$는 정수의 비로 나타낼 수 있다(이때, 만일 공약수가 있다면 약분을 하도록 하자). 즉,
>
> $$\sqrt{2}=\frac{a}{b}(b\neq 0,\ a,\ b\text{는 서로 소인 정수})$$
>
> 로 나타낼 수 있다. 그러면 $a=\sqrt{2}b \Rightarrow a^2=2b^2 \Rightarrow a^2$은 짝수이고 a는 짝수이다. 따라서 $a=2r$라 두자. $4r^2=2b^2 \Rightarrow 2r^2=b^2 \Rightarrow b^2$은 짝수이고 b는 짝수이다. 이는 a, b가 서로 소라는 사실에 모순이다. 즉, 이 둘을 공통으로 재는 단위인 공통척도가 존재하지 않는다. 그러므로 $\sqrt{2}$는 정수비로 나타낼 수 없으며, 따라서 유리수가 아니다.

이 방법은 고등학교에서 지도되고 있는 아리스토텔레스의 증명법에 유리수의 통약가능성의 개념을 포함시킨 것이다. 이로서 그림 상으로 분명히 존재하며 수직선 위에

나타낼 수도 있지만, 유리수가 아닌 수가 존재함을 확인하게 된다. 그래서 새로운 수를 정의해야 할 필요성과 그것을 유리수와의 관계로부터 생각할 수 있다는 것을 인지하게 된다.

단계 3 : 무리수의 정의

이와 같이 유리수로 표현되지 않는 수의 존재를 인식한 후에는 이 수를 정의할 새로운 개념이 필요해진다. 사전에서는 '두 정수의 비(比)로 표현할 수 없는 모든 실수'[13] 또는 '실수 중에서 유리수가 아닌 수. 즉, 두 정수 a, b의 비(比)인 꼴 $\frac{a}{b}(b \neq 0)$로 나타낼 수 없는 수'[14]를 무리수로 정의하고 있다. 이는 통약불가능성 및 유리수와의 관계를 연결시킨 정의이다. 한편, 학교수학에서는 교육과정 전반에서 유리수와 무리수를 소수와의 관계에서 직관적으로 다루고 있기 때문에, 무리수를 '유리수가 아닌 수' 또는 '순환하지 않는 무한소수'로 정의하고 있다. 그러나 '유리수가 아닌 수'란 통약불가능성의 개념을 잘 드러내고 있지 못할 뿐만 아니라, 전체집합이 실수일 때 무리수의 집합을 유리수 집합의 여집합이라 할 수 있기 때문에, 실수 개념을 도입하기 이전에 무리수를 정의하기 위해서는 이런 표현보다는 사전적 정의가 도입될 필요가 있다고 생각된다. 소수와 관련해서도 모든 실수가 소수로 표현가능하다는 전제가 필요하며, 이 역시 위와 같은 이유에서 사전적 정의 도입이 필요하다. 또한 이러한 정의는 전체적으로 유리수와의 일관성이 유지되는 정의 방법이라고도 할 수 있다.

따라서 무리수의 정의는 '두 정수의 비로 나타낼 수 없는 수' 또는 'a, b가 정수일 때, 분수 $\frac{a}{b}(b \neq 0)$의 꼴로 나타낼 수 없는 수'[15]라 할 것을 제안한다. 이후 필요에 따라 '유리수로 나타낼 수 없는 수' 또는 '유리수가 아닌 수'라 부연 정의할 수 있을 것이다.[16]

---

13) "무리수" 한국 브리태니커 온라인
<http://preview.britannica.co.kr/bol/topic.asp?article_id=b08m0192a>[2007. 11. 14자 기사]

14) 두산백과사전 EnCyber & EnCyber.com<http://100.naver.com/100.nhn?docid=64529>[2007. 11. 14자 기사]

15) 실수란 용어는 무리수 다음의 지도 내용이므로 여기서는 실수가 아니라 수로 정의하였다.

16) 무리수의 엄밀한 정의는 극한·연속 등의 개념이 발달함에 따라 칸토어와 데데킨트에 의해서 확고하게 되었다. 그러나 중학교에서 이러한 정의를 도입하는 것은 이해에 어려움이 있다. 그러므로 역사적 사실에 기초하여 유리수의 대조 성질로서 무리수의 정의를 도입하는 것이 바람직하다고 하겠다. 이러한 도입은 자연스러운 사고의 흐름에 의한 수학적 아이디어의 창조 과정을 경험할 수 있게 하여 이해 및 긍정적 수학관 형성에 도움을 줄 것으로 기대된다.

4. 결론 및 제언

중학교 단계에서 무리수의 도입은 실수로의 수의 확장과정에서 다루어진다. 무리수는 유리수의 대조 개념으로 정의되며, 이 때 순환하지 않는 무한소수를 소재로 하고 있다. 이 과정에서 유리수의 정의보다 유리수와 소수와의 관계가 강조되고, 무리수의 개념도 소수와 관련지어 제시하게 된다. 이러한 무리수의 도입은 역사적으로 무리수 발견의 본질인 통약가능성을 배제한 것일 뿐 아니라, 유리수의 본질적인 개념과도 그 연결성을 갖지 못하는 결과를 가져왔다. 물론 중학교 수준에서는 추상성을 가진 무리수의 개념 발생을 엄밀히 도입하는 것에는 어려움이 있으며, 이로 인해 직관적인 이해에 의존할 수밖에 없음도 사실이다.

그러나 새로운 개념을 처음 학습할 때 지나치게 직관적으로 다루게 되면 그 개념에 대한 명확한 이해가 형성될 수 없을 뿐만 아니라, 이와 관련된 상위 수준의 학습에 있어서도 형식적인 학습이 이루어질 수밖에 없다. 그러므로 중학교 단계에서 무리수 개념 발생의 본질적인 요소인 통약가능성을 유리수의 정의와 관련지어 지도하고, 무리수의 정의도 유리수와의 일관성이 유지되는 '두 정수의 비로 나타낼 수 없는 수'로 정의할 것을 제안하였다.

또한 무리수의 존재성 강조와 무리수성의 증명은 무리수의 개념 형성에 중요하므로 이를 고려하여 중학교 수준에서 이해할 수 있는 지도법을 제시하였다. 물론 중학교 단계에서 엄밀한 증명을 지도할 것인가는 이견이 있을 수 있다. 그러나 형식적 조작기에 접어든 단계이므로 기하적인 측면 또는 급수를 이용한 해석적인 측면에서 통약불가능성을 보이는 것은 어렵지만, 대조 개념인 유리수의 통약가능성과 대수적인 측면의 방법을 이용하여 통약불가능성을 경험시키는 것은 가능하다고 생각된다. 이 외에도 피타고라스의 정리를 역사적 소재인 넓이 개념으로 먼저 지도한 후 무리수성을 증명하는 대수적인 측면의 증명법도 활용할 수 있을 것이다.

본 연구에서는 중학교에서의 무리수 개념에 초점을 두었으나 무리수는 고등학교 수학 전반에 사용되는 개념이므로, 중학교에서 직관적으로 개념을 지도하더라도 고등학교에서는 무리수의 본질적 개념을 강조한 보다 정확한 정의와 무리수성의 증명이 반드시 지도되어야 한다고 생각한다. 따라서 고등학교에서 무리수를 어떻게 지도하여야 할 것인지에 대한 후속 연구가 필요하다.

한편, 본 연구에서 제시한 지도방안은 하나의 단계적 지도의 예이므로 이를 기초로 한 실제 수업 구성과 학교현장에서의 적용·평가가 필요하다고 하겠다.

참고 문헌

1. 강행고, 이화영, 박진석, 이용완, 한경연, 이준홍, 이혜련, 송미현, 박정숙, 중학교 수학 9-가, (주)중앙교육진흥연구소, 2002.
2. 고성은, 박복현, 김준희, 최수일, 강운중, 소순영, 중학교 수학 9-가, (주)블랙박스, 2003.
3. 교육부, 중학교 교육과정 해설-수학-. 대한교과서주식회사, 1999.
4. 금종해, 이만근, 이미라, 김영주, 중학교 수학 9-가, (주)고려출판, 2002.
5. 도종훈, 정수론적 방법에 의한 $\sqrt{2}$의 무리수성 증명에 내재된 실수의 완비성 공리, 한국수학사학회지 제17권 제1호, 53-60(2004).
6. 박규홍, 한옥동, 고성군, 임창우, 김성국, 박재용, 중학교 수학 9-가, 두레교육(주), 2002.
7. 박두일, 신동선, 강영환, 윤재성, 김인종, 중학교 수학 9-가, (주)교학사, 2002.
8. 박선화, 최승현, 수학과 교육과정 개정안의 기본 방향과 주요 내용, 대한수학교육학회 수학교육학논총 제30집, 1-26(2007).
9. 박 인, 신보미, 실수로의 수체계 확장을 위한 유리수의 재해석에 대하여, 대한수학교육학회 추계 수학교육학 연구발표대회 논문집, 557-571(2000).
10. 변희현, 박선용, 무리수의 개념적 측면을 강조한 교육방안: '통약불가능성'을 통한 무리수 고찰, 대한수학교육학회지 <학교수학> 제4권 제4호, 643-655(2002).
11. 신현성, 새수학-학습이론에 의한 수학교육론, 경문사, 2007.
12. 엄현정, 무리수 개념 지도에 관한 연구-공통측도를 중심으로-, 중앙대학교 교육대학원 석사학위논문(2006).
13. 장혜원, 무리수 개념의 역사적 발생과 역사발생적 원리에 따른 무리수 지도, 한국수학학회지 제16권 4호, 79-90(2003).
14. 전평국, 신동윤, 방승진, 황현모, 정석규, 중학교 수학 9-가, 교학연구사, 2002.
15. 조태근, 임성모, 정상권, 이재학, 이성재, 중학교 수학 9-가, (주)금성출판사, 2002.
16. 황석근, 이재돈, 중학교 수학 9-가, 한서출판사, 2002.
17. Struik, Dirk J., *A Concise History of Mathematics, Dover Publications*, Inc. (역) 장경윤, 강문봉, 박경미(2002), 간추린 수학사, 경문사, 1948.
18. Eves, H., *An Introduction to the History of Mathematics*, Saunder College Publishing. (역) 이우영 · 신항균(1995), 수학사, 경문사, 1953.
19. NCTM, *Principles and Standards for School Mathematics*. (역) 류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙(2007), 학교수학을 위한 원리와 규준, 경문사, 2000.

Inducing Irrational Numbers in Junior High School

Pusan National University **Boo Yoon Kim**
Pusan National University **Young Woo Chung**

We investigate the inducing method of irrational numbers in junior high school, under algebraic as well as geometric point of view. Also we study the treatment of irrational numbers in the 7th national curriculum. In fact, we discover that i) incommensurability as essential factor of concept of irrational numbers is not treated , and ii) the concept of irrational numbers is not smoothly interconnected to that of rational numbers. In order to understand relationally the incommensurability, we suggest the method for inducing irrational numbers using construction in junior high school.

Key words: rational numbers, irrational numbers, common measure, commensurable, incommensurable

2000 Mathematics Subject Classification : 97-03, 97D40

ZDM Subject Classfication : A33, D43

논문 접수 : 2007 년 12월 심사 완료 : 2008 년 2월