한국수학사학회지 제21권 제1호(2008년 2월), 109 - 120

선형대수학의 두 가지 기원적 개념

대구한의대학교 인터넷정보학과 **박홍경**
hkpak@dhu.ac.kr

오늘날 선형대수학은 이론의 기초적 성격과 응용의 풍부성으로 인해 대학수학에 있어서 필수적인 분야로서 자리하고 있다. 하지만 선형대수학의 기계적인 계산위주나 딱딱한 형식적 개념위주의 학습으로 인해 학생들은 종종 큰 벽에 부딪치게 되고 심한 경우에는 수학자체에 흥미를 잃기도 한다. 따라서 선형대수학을 성공적으로 가르치는 것은 매우 중요한 문제이다. 이 문제를 해결하기 위한 방안으로 본 논문에서는 학생의 입장에서 선형대수학에 기원적 개념의 도입을 제안한다. 기원적 개념이란 역사적 순서나 이론적 체계에 있어서 실제 출발점이 되면서 선형대수학의 중요한 개념들을 이끌어낼 수 있는 씨앗역할을 하는 개념을 의미한다. 여기서는 선형대수학의 두 가지 기원적 개념을 제시한다. 하나는 평면과 공간의 기하학이며, 다른 하나는 1차(선형대수)방정식이다. 전자가 기원적 개념이 되는 것은 [2]에 의거하며 여기서는 1차방정식이 또 다른 기원적 개념임을 보인다.

주제어 : 개념학습, 선형대수학, 기원적 개념, 1차방정식, 평면과 공간의 기하학

1. 기원적 개념

선형대수학은 미적분학과 더불어 대학에서 교양과정의 중요한 수학과목으로서, 역사적으로 1차(선형대수)방정식의 문제해결에서 시작하여 벡터이론과 행렬이론을 중심으로 체계화되고 추상화된 대수학의 한 분야이다. 이것은 오늘날 현대수학 전반에 걸쳐 활용되고 있기 때문에 이론적으로도 기초적인 분야이며 응용의 측면에 있어서도 이공계를 위시하여 경제학, 사회학과 같은 사회과학 등에 광범위하게 쓰이고 있다.

대학에서 선형대수학의 학습은 대체로 구체적인 계산중심이거나 형식적 개념중심의 많은 새로운 추상적인 주제와 개념을 다룬다. 이러한 학습에 대해 학생들은 종종 기계적인 계산이나 딱딱한 형식적인 개념으로 인해 이해에 큰 어려움을 겪는다. 이러한 문제점을 해결하고 효과적인 개념학습을 위해서는 개인의 수학적 직관에 의해 개념이해, 계산기능, 응용의 3가지 목표를 균형적이고 통합적으로 달성해야 한다. 이를 위한 방안으로 [2]에서는 3종류의 수리철학인 직관주의, 논리주의, 형식주의에 근거하여 수

학적 개념을 직관적 개념, 논리적 개념, 형식적 개념의 3가지 유형으로 분류하였는데 그 기준은 아래와 같다.

유형	직관적 개념	논리적 개념	형식적 개념
기본 철학	직관주의	논리주의	형식주의
활동, 사고 측면	감각적 활동, 사고 → 수학적 활동, 사고 연결	수학적 활동, 사고에서 직관의 불확실성, 오류가능성 제거	수학적 활동, 사고 → 형식적 활동, 사고 이행
공간	저차원 공간	고차원 공간	추상적 공간
표현기법	다양한 그림 함수(방정식)의 그래프	수식, 논리식 도형의 방정식(함수)	집합과 성질 구조

또한 구체적 사례로서 벡터이론의 중요한 아홉 가지 개념을 통하여 세 가지 유형을 실제적으로 조사하고 이를 토대로 개념학습의 순서로서 표준적 순서와 구조적 순서라는 두 가지 형태를 제시하였다([2]). 표준적 순서란

직관적 개념 → 논리적 개념 → 형식적 개념

으로 진행한다(예를 들어, [3], [7], [8]). 그것은 역사적 순서에 부합할 뿐만 아니라 이론적 체계에 있어서도 구체적이고 직관적인 내용에서 논리적이고 추상적인 내용으로 나아간다. 직관적 개념을 바탕으로 형식적 개념을 이해한다. 반면에 구조적 순서는

형식적 개념 → 직관적 개념 → 논리적 개념

으로 진행한다(예를 들어, [4], [6]). 그것은 추상적인 내용에서 구체적이고 직관적인 내용으로 나아가며, 직관적이나 논리적 개념을 예로서 취급한다. 구조를 강조하는 현대수학의 세계에 본격적으로 입문하기 위해서는 반드시 거쳐야 하는 관문과도 같다.

학생의 입장에서 볼 때 개념학습은 무엇보다도 학생들에게 접근성이 높아야 한다. 이러한 점에서 학습 순서는 표준적 순서를 따라야 하며 또한 그 출발점은 향후 중요한 개념들을 이끌어낼 수 있는 씨앗(seed)이 되어야 한다. 그러한 두 가지 조건, 표준적 순서의 출발점이자 씨앗이 되는 개념을 기원적 개념(original concepts)이라 부르자. 요컨대 선형대수학의 효과적인 개념학습을 위해서 기원적 개념으로부터 출발하여 표준적 순서를 따를 것을 제안한다.

본 논문의 주된 목적은 선형대수학의 기원적 개념을 제시하는 것이다. 여기서는 기원적 개념의 대상으로서 평면과 공간의 기하학과 1차방정식을 제시한다. 먼저 직관적 개념에 중점을 두고 1차방정식의 표준적 순서를 수립한다. 다음으로 평면과 공간의 기하학과 1차방정식 모두가 씨앗이 됨을 밝힘으로써 그들이 기원적 개념임을 보인다.

2. 1차방정식의 표준적 순서를 위한 준비

[2]에서는 벡터이론의 기본적인 아래의 아홉 가지 개념을 대상으로 직관적 개념, 논리적 개념, 형식적 개념을 고찰하였다.

(1) 공간으로서 평면 및 공간

(2) 공간내의 고려대상으로서 벡터 및 스칼라

(3) 기본적 연산으로서 선형연산

(4) 부분공간, 생성

(5) 선형독립, 선형종속

(6) 직합과 사영

(7) 기저

(8) 내적

(9) 내적과 관련된 개념 : 내적공간, 기하학적 측도(길이, 각, 거리, 체적), 부분(내적)공간, 직교보공간과 정사영, 정규직교기저(직교화)

이들은 사실 벡터이론뿐만 아니라 선형대수학에서도 출발점이 되는 중요하고 기본적인 것들이다. 그밖에 선형대수학의 주된 개념들로는 행렬, 행렬식, 선형사상을 들 수 있지만 역사적 순서의 입장에서 볼 때 기원적 개념의 후보가 될 수 없다.

역사적으로 벡터이론과 행렬이론을 중심으로 하는 선형대수학은 두 가지 측면에서 시작하였다. 하나는 방정식의 입장에서는 1차방정식의 해법에서 출발한다. 이로부터 행렬식, 벡터, 행렬, 선형사상의 개념이 차례로 출현하였다. 다른 하나는 도형의 입장에서 평면과 공간의 기하학이 또 다른 출발점이다. 이로부터 벡터의 기하학적 취급이 시작되고 행렬식, 행렬, 선형변환의 개념이 얻어졌다.

[2]의 고찰은 평면과 공간의 기하학이 선형대수학의 표준적 순서의 출발점이 됨을 보여준다. 이제 1차방정식이 선형대수학의 또 다른 표준적 순서의 출발점이 됨을 고찰하자. 논의의 일관성과 통일성을 위해 위에서 제시한 아홉 가지 개념을 그대로 택한다. 고찰의 핵심은 1차방정식과 벡터이론의 직관적 개념과의 연계성을 명확히 세우는 것이다. 이에 따라 1차방정식의 논리적, 형식적 개념은 유사하게 수립된다.

1차방정식과 벡터이론과의 연계성은 일반적으로 해석기하학의 측면에서 가능하다. 사실 공간상의 점과 좌표에 의해 성분표시로 주어진 순서쌍은 정확히 일대일대응이다. 따라서 도형은 좌표를 이용하여 방정식으로 표현되며, 역으로 방정식, 보다 일반으로 함수는 그래프를 통해 도형으로 도시할 수 있다. 다만 성분표시는 좌표계의 선택에 의존함을 주의한다. 또한 [2]에서와 같이 유클리드 공간은 직관적 개념과 논리적 개념에서는 실수범위에서 취급하고, 형식적 개념에서는 실수와 복소수를 함께 취급한다. 사실 1차방정식의 경우에는 해집합을 실수범위에서 고려할 수 있음을 지적해둔다. 논의는 직관적, 논리적, 형식적 개념의 순서로 전개한다.

3. 1차방정식과 벡터이론의 직관적 개념

(1) 평면, 공간

먼저 [2]에서와 같이 고려되는 유클리드 공간은 직관적으로 논의하는 사항들이 전부 가능한 공간으로 간주한다. 가령, 점, 선, 면, 공간, 직선도형이나 곡선도형을 다룰 수 있으며 길이, 각, 거리, 면적, 체적과 같은 기하학적 측도가 가능하다. 또한 벡터, 좌표계, 부분공간, 평행성 등을 고려할 수 있다.

그러면 1차방정식에서 미지수의 개수는 유클리드 공간의 차원을 결정한다. 이러한 방식으로 1차방정식과 유클리드 공간은 자연스럽게 연계된다.

편의상 직교좌표계를 도입하여 수직선, 좌표평면, 좌표공간을 고려하자. 가장 간단한 경우에서부터 시작해보자. 먼저 미지수가 1개인 경우이다. 그 일반형은

(3.1) $$ax = b$$

이며 해집합은 세 가지 경우로 나뉜다. 해를 갖지 않거나(불능), 무수히 많은 해를 갖거나(부정), 유일한 해를 갖는 경우이다. 유일한 해를 가질 필요충분조건은 계수가 0이 아닐 경우이며 그 해는 $x = b/a$이다(<그림1>).

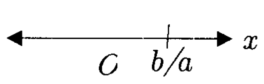
다음은 미지수가 2개인 경우 그 일반형은

(3.2) $$ax + by = c$$

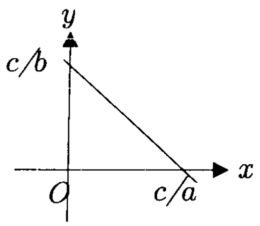
이며, 식의 개수가 미지수의 개수보다 작지만 해집합은 여전히 세 가지 경우이다. 모든 계수가 0이 아닐 때 해집합은 <그림2>와 같다. 미지수가 3개인 경우의 일반형은

(3.3) $$ax + by + cz = d$$

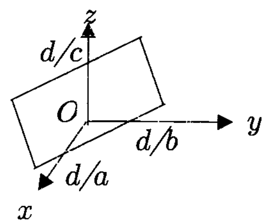
이며 모든 계수가 0이 아닐 때 해집합은 <그림3>과 같다.



<그림1>



<그림2>



<그림3>

이러한 도시에는 유클리드 공간에서 두 점을 지나는 직선은 단하나 결정되고 동일 직선 상에 놓여있지 않은 세 점을 지나는 평면은 단하나 결정된다는 성질이 깔려있음을 지적해 둔다. 좌표계와 무관한 이러한 표현을 자취 형식(locus form)이라고 한다.

(2) 벡터와 스칼라

여러 개의 1차방정식을 함께 고려하는 것은 실제적으로나 이론적으로 당연한 발상이다. 가장 간단한 경우는 다음의 두 개의 연립2원1차방정식이다.

(3.4) $$\begin{cases} ax+by &= c \\ a'x+b'y &= c'. \end{cases}$$

이를 스칼라 형식(scalar form)이라고 한다. 이것을 벡터의 개념을 이용한 벡터 형식(vector form)으로 표현하면 다음과 같다.

(3.5) $$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}, \qquad \boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}.$$

(3.4)와 (3.5)는 단지 표기법의 변화라는 표현의 차이에 그치는 것이 아니라 수에서 벡터와 스칼라라는 본질적으로 전혀 다른 수학적 대상을 다루고 있음에 주목한다. 이러한 방식으로 1차방정식의 벡터 형식과 벡터와 스칼라의 개념은 자연스럽게 연계된다.

또한 (3.4)는 행렬의 개념을 이용한 행렬 형식(matrix form)으로도 표현이 가능하다.

(3.6) $$A\boldsymbol{v}=\boldsymbol{c}, \qquad A=(\ \boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ )=\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

마찬가지로 이러한 표기법의 변화는 벡터뿐만 아니라 행렬이라는 새로운 수학적 대상을 다룬다. 나아가 행렬은 사상으로서 고려할 수 있다. 말하자면, 계수행렬은 벡터 사이의 변환

(3.7) $$A:\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$$

으로서 선형성 (3.8)을 만족한다. 이를 사상 형식(mapping form)이라 한다. 가령, (3.1), (3.2). (3.3)도 사상 형식으로 표현할 수 있다.

(3.8) $$A(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=A\boldsymbol{v}+A\boldsymbol{w}, \quad A(k\boldsymbol{v})=k(A\boldsymbol{v}) \quad (k\in\mathbb{R}).$$

이러한 성분표시는 좌표계의 선택에 따라 달라진다는 것에 주의해야 한다. 두 연립 1차방정식이 동치라는 것은 그 해집합이 같을 때로 정의한다. 행렬 형식에 있어서는 이것은 기본변형에 의한 행동치 또는 열동치의 개념에 해당한다.

(3) 선형연산

앞에서 언급한 바와 같이 (3.4)에서 (3.5)로의 표기법의 변화에는 수에서 벡터라는 새로운 수학적 대상의 출현뿐만 아니라 수들 사이의 사칙연산과는 다른 스칼라와 벡터, 벡터와 벡터 사이의 새로운 연산이 담겨 있다. 이러한 방식으로 1차방정식에서의 연산과 선형연산의 개념은 자연스럽게 연계된다.

(3.4)와 (3.5)의 차이는 구체적인 예를 통해 명백히 볼 수 있다. 가령

(3.9) $$\begin{cases} x-y &= 0 \\ x+y &= 2 \end{cases}$$

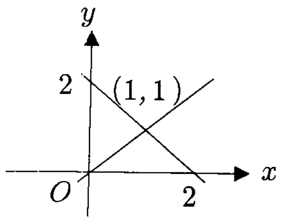
의 해를 구해보자. 이것은 (소거법에 의한) 쉬운 계산으로 유일한 해 $x=1$, $y=1$을

갖는다. 이를 도시하면 <그림4>와 같다. 한편 벡터 형식으로 나타내면

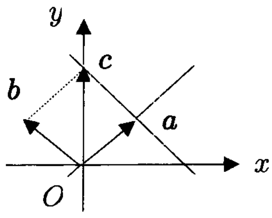
$$xa + yb = c, \qquad \text{단 } a = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

이다. 이를 그림으로 도시하면 <그림5>와 같다. 이로부터 스칼라로서 $x = y = 1$임을 다시 확인할 수 있다. 나아가 행렬 형식의 표현에서는 사상 형식의 의미에서 계수행렬 A는 벡터 사이의 선형변환으로서 <그림6>과 같다. 여기에는 행렬의 곱 또는 사상의 합성이라는 새로운 연산이 등장한다.

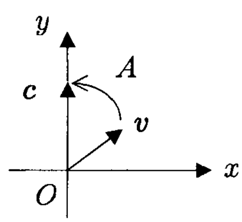
$$A = (\ a\ \ b\ ) = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} : v = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \to c = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}.$$



<그림4>



<그림5>



<그림6>

(4) 부분공간, 생성

공간은 종종 보다 더 큰 공간의 부분공간이 된다. 좌표공간 $\mathbb{R}^3$에는 네 가지 종류의 공간이 있다 : 원점, 원점을 지나는 직선, 원점을 지나는 평면, 공간 자신. 이들은 모두 $\mathbb{R}^3$의 부분공간이 되며 이외의 다른 형태의 부분공간은 존재하지 않는다.

또한 주어진 벡터로부터 공간을 생성할 수 있다. 생성된 공간은 부분공간이 된다. 가령 <그림7>에서 벡터 a, b에 의해 생성되는 공간 $\mathrm{span}\{a,b\}$는 a, b 모두에 평행하고 원점을 지나는 평면이다. 생성된 공간은 식으로 표현할 수 있는데, <그림7>은

(3.10) $$\mathrm{span}\{a,b\} = \{xa + yb \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

이 된다. 다시 말해서,

(3.11) $p \in \mathrm{span}\{a,b\} \Leftrightarrow$ 벡터 형식 $p = xa + yb$이 해를 갖는 것이다.

이러한 방식으로 1차방정식의 해의 존재성과 생성의 개념은 자연스럽게 연계된다.

일반적으로 연립1차방정식

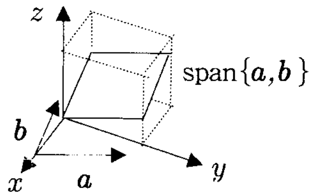
(3.12) $$xa + yb + zc = d \quad \text{또는} \quad Av = d,\ A = (\ a\ \ b\ \ c\ ),\ v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

의 해집합은 부분공간이 아니다. 하지만 동차형

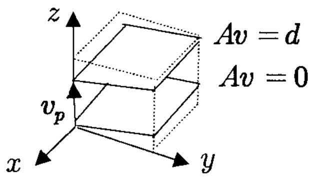
(3.13) $$xa + yb + zc = 0 \quad \text{또는} \quad Av = 0$$

의 해집합은 부분공간이 된다. 사실 (3.12)의 해집합은 <그림8>과 같이 동차형의 해

공간을 특수해 $v_p = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}$만큼 평행이동한 것으로 아핀공간이 된다.



<그림7>



<그림8>

(5) 선형독립과 선형종속

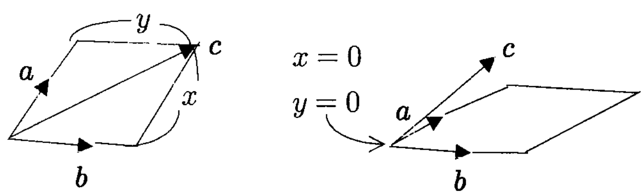
경험적으로 방향에 의해 도형 사이에 위치관계를 고려할 수 있다. 가령 a,b,c의 위치관계는 <그림9>와 같이 동일평면상에 놓이거나 그렇지 않는 두 가지 경우로 나뉜다. 전자는 선형종속으로 평면을 생성하고 후자는 선형독립으로 공간을 생성한다. 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

(3.14) $\{a,b,c\}$가 선형종속 $\Leftrightarrow$ $c = xa + yb$이 (유일한) 해를 갖는 것,

$\Leftrightarrow$ $xa + yb + zc = 0$이 자명해 이외의 해를 갖는 것

(3.15) $\{a,b,c\}$가 선형독립 $\Leftrightarrow$ $xa + yb + zc = 0$이 유일한 해를 갖는 것

이 된다. 이러한 방식으로 1차방정식의 해의 존재성과 선형독립과 선형종속의 개념은 자연스럽게 연계된다.



<그림9>

(6) 직합, 사영

예를 들어, 공간에서 U=span$\{a,b\}$이고 W=span$\{c\}$, $c \not\in U$라 할 때

$$\mathbb{R}^3 = U \oplus W$$

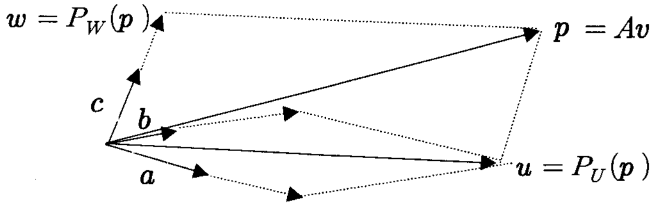
가 성립한다. 이것은 임의의 벡터 p에 대해 1차방정식

(3.16) $$p = u + w = (xa + yb) + zc \quad \text{또는} \quad p = Av$$

가 유일한 해를 갖는 것을 의미한다(<그림10>). 역으로 p의 U와 W로의 사영은 각각

(3.17) $$P_U(p) = u = xa + yb, \quad P_W(p) = w = zc$$

이다. 이러한 방식으로 1차방정식의 해의 유일성과 직합과 사영의 개념은 자연스럽게 연계된다.



<그림10>

(7) 기저

공간에서 $\{a,b,c\}$가 기저란 <그림10>에서 보듯이 임의의 벡터 p에 대해

(3.18) $$p = xa + yb + zc \quad \text{또는} \quad p = Av$$

가 유일한 해를 갖는 것을 의미한다. 특히 표준기저 $\{e_1, e_2, e_3\}$인 경우 (3.18)에서 유일한 해 (x, y, z)는 정확히 v를 위치벡터로 갖는 점의 좌표이다. 이러한 방식으로 1차방정식의 해의 유일성과 기저의 개념은 자연스럽게 연계된다.

(8) 내적

경험적으로 공간에서는 길이, 각, 거리, 면적, 체적 등의 다양한 기하학적 측도를 할 수 있다. 이러한 활동은 내적에 의해 가능하다.

가령 (3.4)에서 두 직선 사이의 각 θ는 두 벡터 $p = (a, b)$, $q = (a', b')$가 이루는 각과 일치한다. 따라서 내적의 정의

(3.19) $$p \cdot q = |p||q|\cos\theta = aa' + bb' \quad \text{또는} \quad p \cdot q = pq^T$$

로부터 θ를 구할 수 있다. 예를 들어 (4.9)의 경우는

$$a \cdot b = (1, 1) \cdot (1, -1) = 0$$

이므로 두 직선은 직교한다.

(9) 내적과 관련된 개념

유클리드 내적을 가진 유클리드 공간을 (유클리드)내적공간이라 정의한다. 내적공간에서는

(3.20) $$|a| = \sqrt{a \cdot a}, \quad d(a, b) = |a - b|$$

에 의해 자연스럽게 노름 $|\ |$과 거리 d가 유도된다. 내적공간의 부분공간도 자연스럽게 고려할 수 있다. 내적공간에서는 서로 직교하는 직합과 정사영을 고려할 수 있다.

그러면 점과 직선 사이의 거리, 하나의 직선으로부터 거리가 l인 직선을 구하는 문제, 평면에서 세 직선이 교점에 의해 삼각형을 이룰 경우 그 삼각형의 면적을 구하는 문제 등의 다양한 응용문제를 해결할 수 있다.

4. 논리적 개념

일반적으로 m개의 연립n원1차방정식은 스칼라 형식

$$\text{(4.1)} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

으로 주어진다. 이것의 벡터 형식은

$$\text{(4.2)} \qquad x_1\boldsymbol{a_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \cdots, \ \boldsymbol{a_n} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

이며, 행렬 형식은

$$\text{(4.3)} \qquad A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}, \qquad A = (\ \boldsymbol{a_1} \ \cdots \ \boldsymbol{a_n}\ ) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

이다. 그 사상 형식은 벡터 사이의 선형변환 $A : \boldsymbol{v} \rightarrow \boldsymbol{b}$ 이다.

이들의 해집합은 n차원 유클리드 공간에서 m개의 초평면의 공통부분이다. 직관적 개념에서와 같이 해집합은 크게 부정, 불능, 유일한 해의 세 가지의 경우로 나뉜다.

마찬가지로 (4.3)의 동차형의 해집합은 부분공간이 된다. (4.3)의 해집합은 동차형의 해공간을 특수해 $\boldsymbol{v_p} = \begin{pmatrix} x_{1p} \\ \vdots \\ x_{np} \end{pmatrix}$만큼 평행이동한 것이다.

선형독립과 선형종속의 개념도 $\mathbb{R}^n$으로 자연스럽게 확장된다.

(4.4) $\{\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_m}\}$가 선형독립 $\Leftrightarrow$ $x_1\boldsymbol{a_1} + \cdots + x_m\boldsymbol{a_m} = \boldsymbol{0}$ 이 유일한 해를 갖는 것

(4.5) $\{\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_m}\}$가 선형종속 $\Leftrightarrow$ 선형독립이 아닐 때

$\Leftrightarrow$ $x_1\boldsymbol{a_1} + \cdots + x_m\boldsymbol{a_m} = \boldsymbol{0}$ 이 자명해 이외의 해를 갖는 것

이 된다.

$\mathbb{R}^n$의 두 부분공간 U, W에 대해 직합

$$T = U \oplus W$$

은 임의의 벡터 $\boldsymbol{a} \in T$에 대해 1차방정식

$$\text{(4.6)} \qquad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} = (k_1\boldsymbol{u_1} + \cdots + k_l\boldsymbol{u_l}) + (k_{l+1}\boldsymbol{w}_1 + \cdots + k_{l+m}\boldsymbol{w_m})$$

이 유일한 해를 가질 때이다. 역으로 $\boldsymbol{a}$의 U와 W로의 사영은 각각

(4.7) $\quad P_U(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + x_l\boldsymbol{u}_l, \quad P_W(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{w} = x_{l+1}\boldsymbol{w}_1 + \cdots + x_{l+m}\boldsymbol{w}_m$

으로 표현된다. 보다 일반으로 부분공간 $U_1, \cdots, U_r$의 직합

$$T = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$$

과 T에서 U_i로의 사영 $P_{U_i}(\boldsymbol{a})$에 대해서도 마찬가지이다.

$\mathbb{R}^n$에서 $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$가 기저란 임의의 벡터 $\boldsymbol{b}$에 대해

(4.8) $\quad x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$ 또는 $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$가 유일한 해를 갖는 것

을 의미한다. 특히 표준기저 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$인 경우 (4.8)에서 유일한 해 $(x_1, \cdots, x_n)$는 정확히 $\boldsymbol{v}$를 위치벡터로 하는 점의 좌표이다.

$\mathbb{R}^n$이 (유클리드)내적공간일 때에는 내적에 의해 노름 $|\ |$과 거리 d가 유도된다. 그러면 길이, 각, 거리, 면적, 체적 등의 다양한 기하학적 측도를 할 수 있다.

5. 형식적 개념

앞에서 1차방정식의 행렬 형식에서 계수행렬은 벡터 사이의 선형사상으로 볼 수 있음을 보았다. 선형사상의 형식적 개념은 벡터공간의 형식적 개념을 고려할 때 가능하다. V, W를 $\mathbb{F}$상의 벡터공간이라 할 때 선형사상 $T: V \to W$이란 선형성(선형 연산을 보존하는 성질)

(5.1) $\quad T(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y}), \ T(k\boldsymbol{x}) = kT(\boldsymbol{x}) \ (k \in \mathbb{F})$

을 만족하는 것으로 규정된다. 그러면 1차방정식 $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$의 해집합은 다름 아닌 원상 $T^{-1}(\boldsymbol{b})$이다. 특히 V, W의 차원이 각각 n, m이라면 선형사상은 행렬 형식

(5.2) $\quad T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \ \ A$는 (m, n)행렬

으로 표현할 수 있다. 물론 이것은 좌표계 또는 기저의 선택에 의존한다.

벡터공간과 선형사상의 추상화과정은 이론뿐만 아니라 응용에 있어서 유용하다. 가령 앞에서 다룬 유한차원 유클리드 공간 사이의 행렬사상뿐만 아니라 무한차원의 경우로 확장하여 함수공간 상에서의 선형연산자, 예컨대 미분연산자, 적분연산자 등의 풍부한 예를 다룰 수 있다.

6. 결론

앞에서 1차방정식의 표준적 순서를 수립하였다. 이제 평면과 공간의 기하학과 1차

방정식이 선형대수학의 기원적 개념임을 보이기 위해서 남은 작업은 이들이 선형대수학의 다른 주요 개념, 즉 행렬, 행렬식, 선형사상에 대해 씨앗역할을 보이면 된다.

먼저 1차방정식의 경우를 고려하자. 표현에 있어서 1차방정식은 자취 형식에서 출발하여 스칼라 형식, 벡터 형식, 행렬 형식, 나아가 사상 형식에 이른다. 이것은 단지 표기법의 변화에 그치지 않고 두 가지 수학의 중대한 진보를 내포한다. 하나는 새로운 수학적 대상, 새로운 연산자의 도입이다. 가령, 벡터의 개념, 행렬의 개념, 선형사상의 개념과 새로운 연산자로서 선형연산, 행렬의 곱, 사상의 합성이 도입되었다. 이러한 방식으로 1차방정식의 표현과 행렬, 선형사상의 개념은 자연스럽게 연계된다.

다른 하나는 1차방정식의 풀이에 있어서 보다 일반적인 해법의 출현이다. 그것은 미지수와 식의 개수가 같은 경우 Cramer 공식과 같은 행렬식에 의한 해법을 넘어서서, 미지수와 식의 개수가 다른 경우에도 행렬에 의한 Gauss-Jordan 소거법으로 해를 구할 수 있다. 이러한 방식으로 1차방정식의 해법과 행렬과 행렬식의 개념은 자연스럽게 연계된다.

다음으로 평면과 공간의 기하학의 경우를 고려하자. 이 경우 행렬식은 행렬을 이루는 벡터에 의해 형성되는 평행체의 체적을 의미한다. 이러한 방식으로 평면과 공간의 기하학과 행렬식의 개념은 자연스럽게 연계된다.

또한 변환의 입장에서 행렬은 평면이나 공간에서 선형성을 가진 벡터 또는 도형 사상의 변환이다. 가령, 회전, 반전, 확대, 축소, 전단, 정사영 등이 예가 된다. 이것은 선형사상으로 자연스럽게 확장된다. 이러한 방식으로 평면과 공간의 기하학과 행렬과 선형사상의 개념은 자연스럽게 연계된다.

수학의 본질에 있어서 다원성은 여러 학자들에 의해 주장된바 있다([1], [5], [9]). 본 연구는 선형대수학의 기원이 다원적임을 보여주는 사례로서도 흥미롭다.

감사의 글 본 논문의 개선을 위해 심사위원의 유용하고 의미있는 지적과 조언에 깊은 감사를 드린다.

참고 문헌

1. 김용운, 김용국, 수학사대전, 우성문화사, 1986.
2. 박홍경, 김태완, 이우동, 수학적 개념의 유형과 효과적인 개념학습, 한국수학사학회지 20, 105-126(2007).
3. 이상구, 현대 선형대수학, 경문사, 2006.
4. 임근빈, 임동만, 선형대수학, 형설출판사, 2004.
5. R. Hersh, 허민 역, 도대체 수학이란 무엇인가, 경문사, 2003.
6. 上坂吉則, 塚田眞, 入門線型代數, 近代科學社, 1987.

7. Anton, H., Busby, R. C., *Contemporary linear algebra*, Anton Textbooks Inc., 2003.
8. Johnson, L. W., Riess, R. D., Arnold, J. T., *Introduction to linear algebra*, Addison-Wesley, 1992.
9. MacLane, S., *Mathematics* : form and function, Springer-Verlag, 1986.

Two original concepts in linear algebra

Department of Computer Science, Daegu Haany University **Hong Kyung Pak**

Today linear algebra is one of compulsory courses for university mathematics by virtue of its theoretical fundamentals and fruitful applications. However, a mechanical computation-oriented instruction or a formal concept-oriented instruction is difficult and dull for most students. In this context, how to teach mathematical concepts successfully is a very serious problem. As a solution for this problem, we suggest establishing original concepts in linear algebra from the students' point of view. Any original concept means not only a practical beginning for the historical order and theoretical system but also plays a role of seed which can build most of all the important concepts. Indeed, linear algebra has exactly two original concepts : geometry of planes, spaces and linear equations. The former was investigated in [2], the latter in the present paper.

Key words: concept learning, linear algebra, original concept, geometry of planes and spaces, linear equation

2000 Mathematics Subject Classification: 97-03

ZDM Classification: G19

논문 접수: 2007년 12월 심사 완료: 2008년 1월