한국수학사학회지 제21권 제1호(2008년 2월), 97 - 108

위너공간에서의 해석적 파인만 적분에 대한 역사적 소고

단국대학교 응용수학전공 **이상덕**
sdlee@dankook.ac.kr
단국대학교 응용수학전공 **김 혁**
hyukkim@dankook.ac.kr

본 논문에서는 위너공간 위에서 정의되는 해석적 파인만 적분, 해석적 푸리에-파인만 변환과 합성곱을 조사하고 이들에 대한 연구동향에 대하여 알아본다.

주제어 : 위너공간, 해석적 파인만 적분, 푸리에-파인만 변환, 합성곱

1. 파인만 적분

수학자이며 물리학자인 R. Feynman은 1948년 함수공간에서의 한 복소적분의 존재성을 가정하고 이 적분이 양자역학의 슈레딩거 방정식의 초기값 문제를 구하는데 사용할 수 있음을 보였다([13]). 그 후 많은 수학자와 물리학자들이 파인만 적분과 이에 관련된 많은 연구를 진행하였다.

파인만 경로적분은 슈레딩거의 파동방정식, 하이젠베르크의 행렬역학과 더불어 미시세계에서 일어나는 양자현상을 설명하는데 사용되는 접근방법으로 잘 알려져 왔다. 특히 파인만의 경로적분은 미시세계의 양자역학적인 현상을 고전물리의 원리들을 이용하여 기술하려는 노력에 의하여 탄생하여 양자역학을 보다 개념적으로 이해할 수 있게 되었으며 현대물리의 다른 분야인 양자장론에서 매우 강력한 도구로 사용되고 있다. 물리적으로 이러한 기원을 갖고있는 파인만 적분은 수학에도 깊은 뿌리를 가지고 있으며, 많은 수학적 관심의 대상이 되어왔다. 파인만 경로적분은 수학적으로 위너적분과 관련이 있으며 엄밀하게 많은 연구가 진행되어 왔다.

파인만 적분이 소개된 이후 많은 수학자 및 물리학자들이 이 적분에 관심을 가지고 이 적분을 수학적 이론으로 발전시키려고 노력하였다. Cameron은 Kac의 방법([22])을 기반으로 하여 위너 적분의 해석접속(analytic continuation)의 방법을 이용하여 해석적 파인만 적분(analytic Feynman integral)을 정의했다. Feynman이 정의한 경로적분

으로 슈레딩거 방정식을 설명할 수 있지만 수학적 구조면에서 많은 문제를 가지고 있다. 파인만의 경로적분의 구조는 기본적으로 유한차원 공간에서 정의되는 르벡 측도를 이용하였다. Cameron은 이를 해결하기 위하여 [2]에서 위너 적분에 복소수 매개변수를 이용한 위너 수열적분(sequential Wiener integral)을 정의하고 이를 이용하여 파인만의 경로적분을 유도하였다. 그 뒤 [3]에서 해석접속(analytic continuation)의 개념을 사용하여 보다 엄밀한 해석적 파인만 적분(analytic Feynman integral)을 정의하였다.

해석적 파인만 적분에 관련된 많은 연구들이 수학자와 물리학자들에 의하여 진행되어 왔다. 위너공간은 시불변(stationary)이고 이동(drift)이 주어지지 않은 위너과정(Wiener process)으로 구성된다.

본 논문에서는 Cameron에 의하여 위너 적분으로 정의된 해석적 파인만 적분을 소개하고 위너공간에서 정의되는 푸리에-파인만 변환과 합성곱을 중심으로 역사적인 발전 과정을 소개한다.

2. 파인만 적분과 푸리에-파인만 변환

해석적 푸리에-파인만 변환에 관한 L_1이론(L_1 analytic Fourier-Feynman transform)은 Brue [1]에 의하여 처음 소개되었고, Cameron과 Storvick은 해석적 푸리에-파인만 변환에 관한 L_2이론을 소개하였다 [4]. 그 후 Johnson과 Skoug [18]는 $1\le p\le 2$ 일 때 해석적 푸리에-파인만 변환의 L_p이론을 전개하여 [1]과 [4]의 결과들을 확장하고 L_1이론과 L_2이론 사이의 여러 가지 관계를 얻었다.

구간 $[0, T]$ 에서 정의되고 $x(0)=0$ 을 만족하는 연속함수들의 모임을 $C_0[0, T]$ 로 표시하고 이 공간을 위너공간이라 한다. $C_0[0, T]$ 의 부분집합 중에서 위너측도 가능한 집합들의 모임을 $\boldsymbol{M}$ 이라 하고 m 을 위너측도(Wiener measure)라 하면 위너측도는 다음 식으로 정의된다. 구간 $[0, T]$ 의 임의의 분할 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n\le T$ 과 $\mathbb{R}^n$의 임의의 보렐집합 B에 대하여

$$I=\{x\in C_0[0, T]:(x(t_1),\cdots,x(t_n))\in B\}$$

을 원통형 집합(cylinder set)이라 하고 이 원통형 집합에 대하여

$$m(I)=\left((2\pi)^n\prod_{j=1}^{n}(t_j-t_{j-1})\right)^{-1/2}\int_B \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{(u_j-u_{j-1})^2}{t_j-t_{j-1}}\right\}d\vec{u}$$

와 같이 정의된다. 여기에서 $t_0=0$, $u_0=0$ 그리고 $\vec{u}=(u_1,\cdots,u_n)\in\mathbb{R}^n$이

다. $\boldsymbol{M}$ 은 모든 원통형 집합를 포함하는 최소의 완비 σ -집합대수(complete σ -algebra)이다. 그러면 $(C_0[0,T],\ \boldsymbol{M},\ m)$ 은 완비측도공간(complete measure space)이 되고 함수 F 의 위너 적분(Wiener integral)은

$$\int_{C_0[0,T]} F(x)\,dm(x)$$

로 표시한다.

일반적인 측도론이나 적분론에서는 "거의 모든 점(almost everywhere)"의 개념이 이론전개의 중요한 개념이 되지만 파인만 적분론에서는 이 개념만으로 충분하지 못하다. 일반 적분론에서는 거의 모든 점에서 같은 두 함수의 적분은 같고, 따라서 이 두 함수는 같은 함수(동치류)로 취급한다. 그러나 파인만 적분론에서는 $m-a.e.$ 에서 같은 두 함수의 파인만 적분이 같지 않을 수 있다 [19]. 따라서 파인만 적분이론에서는 $m-a.e.$ 대신 $s-a.e.$ (축척불변 거의 모든 점)의 개념이 필요하다.

$C_0[0,T]$ 의 부분집합 E 가, 모든 $\rho > 0$ 에 대하여 $\rho E \in \boldsymbol{M}$ 을 만족하면 축척불변 가측집합(scale-invariant measurable set)이라 하고, 축척불변 가측집합 N 이 모든 $\rho > 0$ 에 대하여 $m(\rho N) = 0$ 이면 축척불변 영집합(scale-invariant null set)이라 한다. 어떤 성질이 축척불변 영집합을 제외하고 성립하면 축척불변 거의 모두(scale-invariant almost everywhere, $s-a.e.$)에서 성립한다고 한다. 또한 모든 $\rho > 0$ 에 대하여 $F(\rho x)$ 가 위너측도 가능하면 F 는 축척불변 가측함수(scale invariant measurable function)라 하고, F 와 G 가 $s-a.e.$ 에서 같으면 $F \approx G$ 로 표시한다. 이에 대한 자세한 내용은 [7], [19]를 참고하면 된다.

위너공간에서 해석적 파인만 적분은 다음과 같이 정의된다. $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}_+$ 와 $\tilde{\mathbb{C}}_+$ 를 각각 복소수, 실수부가 양인 복소수, 그리고 실수부가 음이 아닌 복소수중 0 을 제외한 집합이라 하자. F 가 $C_0[0,T]$ 에서 정의되고 복소수값을 갖는 함수로서 모든 $\lambda > 0$ 에 대하여 위너적분

$$J(\lambda) = \int_{C_0[0,T]} F(\lambda^{-1/2}x)\,dm(x)$$

가 유한값으로 존재한다고 하자. 만일 $\mathbb{C}_+$ 에서 정의되는 해석함수(analytic function) $J^*(\lambda)$ 가 존재하여, 모든 $\lambda > 0$ 에 대하여 $J^*(\lambda) = J(\lambda)$ 이면, $J^*(\lambda)$ 를 $C_0[0,T]$ 위에서 매개변수 $\lambda \in \mathbb{C}_+$ 를 갖는 함수 F 의 해석적 위너적분(analytic Wiener integral of F with parameter λ)이라 하고

$$\int_{C_0[0,T]}^{anw_\lambda} F(x)dm(x) = J^*(\lambda)$$

라 나타낸다.

모든 $\lambda \in \mathbb{C}_+$ 에 대하여 F 의 해석적 위너적분 $J^*(\lambda)$ 가 존재한다고 하자. 실수 $q \neq 0$ 에 대하여, 다음 극한값을 매개변수 q 를 갖는 함수 F 의 해석적 파인만 적분(analytic Feynman integral of F with parameter q)이라 하고

$$\int_{C_0[0,T]}^{anf_q} F(x)dm(x) = \lim_{\lambda \to -iq} \int_{C_0[0,T]}^{anw_\lambda} F(x)dm(x)$$

로 나타낸다. 여기서 λ 는 $\mathbb{C}_+$ 에서 $-iq$로 접근한다.

이제 $C_0[0,T]$ 에서 정의되는 함수 F 의 L_p 해석적 푸리에-파인만 변환을 소개한다 [18]. $\lambda \in \mathbb{C}_+$ 와 $y \in C_0[0,T]$ 에 대하여 T_λ 를 다음과 같이 정의하자.

$$T_\lambda(F)(y) = \int_{C_0[0,T]}^{anw_\lambda} F(y+x)dm(x).$$

임의의 $p \in (1,2]$ 에 대하여 다음 극한이 존재할 때($\lambda \in \mathbb{C}_+$)

$$T_q^{(p)}(F)(y) = \text{l.i.m.}_{\lambda \to -iq} T_\lambda(F)(y)$$

이 극한을 함수 F 의 L_p 해석적 푸리에-파인만 변환이라 한다. 여기에서 l.i.m.는 다음을 의미한다. 임의의 $\rho > 0$ 에 대하여

$$\lim_{\lambda \to -iq} \int_{C_0[0,T]} \left| T_\lambda(F)(\rho y) - T_q^{(p)}(F)(\rho y) \right|^{p'} dm(x) = 0, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

또한, $s-a.e.$ $y \in C_0[0,T]$ 에 대하여 보통극한

$$T_q^{(1)}(F)(y) = \lim_{\lambda \to -iq} T_\lambda(F)(y)$$

가 존재하면 $T_q^{(1)}(F)$ 를 L_1 해석적 푸리에-파인만 변환이라 한다.

임의의 $p \in [1,2]$ 에 대하여 $T_q^{(p)}(F)(y)$ 는 $s-a.e.$ 에서 정의된다. 또한 $T_q^{(p)}(F)$ 이 존재하고 $F \approx G$ 이면 $T_q^{(p)}(G)$ 도 존재하고 $T_q^{(p)}(F) \approx T_q^{(p)}(G)$ 이다.

1972년에 Brue는 [1]에서 위너공간에서 정의되는 몇가지 범함수들의 모임을 정의하였고, 이들 함수에 대한 L_1 푸리에-파인만 변환의 존재성을 밝혔다. 그는 또한

$$T_{-q}^{(1)}(T_q^{(1)}(F))(y) = F(y) \quad a.e.\ y \in C_0[0,T]$$

을 보였다. 실제로 그는 $q=1$인 경우에 대해서만 연구를 하였지만 그의 결과는 모든 실수 $q\neq 0$에 대하여도 성립한다.

1976년에 Cameron과 Storvick은 [4]에서 위너공간에서 정의되는 물리학, 특히 양자역학에서 자주 쓰이는 범함수들의 모임을 구성하였고, 이들 함수에 대한 L_2 푸리에-파인만 변환의 존재성을 밝혔다. 그의 연구결과를 요약하면 다음과 같다.

범함수 F가 전해석함수(entire function) Φ와 $\|\Theta(t,\cdot)\|_2 \in L_2[0,T]$를 만족하는 함수 Θ에 대하여

$$F(x) = \Phi\left\{ \int_0^T \Theta(t, x(s))\, ds \right\} \quad s-a.e.\ x \in C_0[0,T] \qquad (2.1)$$

로 주어질 때 $T_q^{(2)}(F)$이 존재하고 임의의 $q\neq 0$에 대해서

$$T_{-q}^{(2)}(T_q^{(2)}(F)) \approx F$$

임을 밝혔다. 양자역학에서 자주 나타나는 함수

$$F(x) = \exp\left\{ \int_0^T \Theta(t, x(t))\, dt \right\}$$

는 (2.1) 식의 조건을 만족한다. 그 뒤 Cameron과 Storvick은 파인만 수열적분을 정의하고 그리고 이를 기본으로 푸리에-파인만 수열변환(sequential Fourier-Feynman transform)을 정의하고 이에 대한 다양한 결과를 얻었다 [6].

1979년에 Johnson 과 Skoug는 [18]에서 $1\leq p\leq 2$에 대한 L_p 푸리에-파인만 변환을 엄밀히 정의하고 여러 가지 함수의 파인만 적분과 푸리에-파인만 변환의 존재성을 밝혔다. 특히 (2.1) 식의 범함수에 대한 L_p 푸리에-파인만 변환의 결과를 얻었다. Cameron과 Storvick이 [4]에서 정의했던 L_2 푸리에-파인만 변환의 정의로부터 L_p 푸리에-파인만 변환의 정의가 확장될 수 없다. 그러나 Johnson 과 Skoug가 정의한 파인만 변환의 식에서 $p=2$인 경우에 Cameron과 Storvick이 [4]에서 정의했던 L_2 푸리에-파인만 변환의 식과 일치한다.

3. 해석적 푸리에-파인만 변환과 합성곱

1995년 Huffman, Park 과 Skoug는 위너공간에서 합성곱(convolution product)를 정의하고 L_p 푸리에-파인만 변환과 합성곱에 대한 관계를 구성하였다 [15]. 이를 기반으로 해서 위너공간에서 정의되는 다양한 형태의 범함수들에 대하여 푸리에-파인만

변환과 합성곱에 대한 연구결과들이 구성되었다 [15, 16, 17]. 이 절에서는 이러한 연구결과들에 대하여 소개한다.

위너공간에서의 합성곱은 다음과 같이 정의된다. 범함수 F와 G가 위너공간에서 정의된 함수라 하자. $\lambda \in \widetilde{\mathbb{C}}_+$ 에 대하여 다음 적분이 존재하면 이것을 F와 G의 합성곱(convolution product)이라 한다.

$$(F*G)_\lambda(y)=\begin{cases}\displaystyle\int_{C_0[0,T]}^{anw_\lambda} F\left(\frac{y+x}{\sqrt{2}}\right)G\left(\frac{y-x}{\sqrt{2}}\right)dm(x), & \lambda\in \mathbb{C}_+\\ \displaystyle\int_{C_0[0,T]}^{anf_q} F\left(\frac{y+x}{\sqrt{2}}\right)G\left(\frac{y-x}{\sqrt{2}}\right)dm(x), & \lambda=-iq,\ q\in\mathbb{R}-\{0\}.\end{cases}$$

$\lambda = -iq$ 일 때 $(F*G)_\lambda$ 를 $(F*G)_q$ 로 나타낸다.

Huffman, Park 과 Skoug의 결과를 요약하면 다음과 같다. n은 자연수이고, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$은 $L_2[0,T]$ 에 속하는 함수로서 정규직교(orthonormal)함수들이라 하자. (실제로는 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$이 $L_2[0,T]$ 에서 일차독립인 함수들인 경우에도 아래의 결과들은 모두 성립한다.) $1\le p\le\infty$ 에 대하여 $A_n^{(p)}$는 $s-a.e.\ x\in C_0[0,T]$ 에 대하여,

$$F(x)=f\left(\int_0^T \alpha_1(t)\,dx(t),\cdots,\int_0^T \alpha_n(t)\,dx(t)\right), \tag{3.1}$$

형태의 함수 F들의 공간이다. 여기서 $f:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 는 $L_p(\mathbb{R}^n)$에 속하는 함수이고 적분 $\int_0^T \alpha(t)\,dx(t)$ 는 패리-위너-지그문드 확률적분(Paley-Wiener-Zigmund stochastic integral)을 의미한다. 또, $A_n^{(\infty)}$는 $f\in C_0(\mathbb{R}^n)$에 대하여 (3.1) 식과 같이 표현되는 함수들의 공간이며, $C_0(\mathbb{R}^n)$은 $\mathbb{R}^n$에서 정의되는 유계연속함수로서 무한점에서 0 인(vanish at infinity) 함수들이다. $F\in A_n^{(p)}$이면 F는 축척불변 가측함수임을 쉽게 알 수 있고, $p>1$ 일 경우 파인만 적분은 해석적 위너 적분의 축척불변 L_p-극한(scale-invariant L_p-limit)으로 생각한다. 다음은 [15]에서 얻어진 주된 결과들이다.

1. $1\le p\le 2$ 에 대하여 $F\in A_n^{(p)}$라 하면, 임의의 $q\in\mathbb{R}-\{0\}$ 에 대하여 $T_q^{(p)}(F)$ 는 존재하고

$$(T_q^{(p)}(F))(y) \approx g\left(-iq\,;\int_0^T \alpha_1 dy, \cdots, \int_0^T \alpha_n dy\right) \in A_n^{(p')}.$$

여기서 g 는 다음과 같이 주어지는 함수이다.

$$g(\lambda\,; w_1, \cdots, w_n) \equiv g(\lambda\,; \vec{w})$$

$$= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{u}) \exp\left\{-\frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^n (u_j - w_j)^2\right\} d\vec{u}.$$

2. $1 \le p \le 2$ 에 대하여 $F \in A_n^{(p)}$라 하면, 임의의 $q \in \mathbb{R} - \{0\}$ 에 대하여

$$T_{-q}^{(p)}(T_q^{(p)}(F))(y) = F(y) \qquad s-a.e.\ y \in C_0[0, T].$$

3. $F, G \in \bigcup_{1 \le p < \infty} A_n^{(p)}$이면 임의의 $\lambda \in C_+$ 에 대하여

$$T_\lambda((F * G)_\lambda)(y) = T_\lambda(F)(y/\sqrt{2})\,T_\lambda(G)(y/\sqrt{2})$$

$$s-a.e.\ y \in C_0[0, T].$$

4. $F, G \in A_n^{(1)}$이면 임의의 $q \in \mathbb{R} - \{0\}$ 에 대하여

$$T_q^{(1)}((F * G)_q)(y) = T_q^{(1)}(F)(y/\sqrt{2})\,T_q^{(1)}(G)(y/\sqrt{2})$$

$$s-a.e.\ y \in C_0[0, T].$$

5. $F \in A_n^{(1)}$이고 $G \in A_n^{(2)}$이면 임의의 $q \in \mathbb{R} - \{0\}$ 에 대하여

$$T_q^{(2)}((F * G)_q)(y) = T_q^{(1)}(F)(y/\sqrt{2})\,T_q^{(2)}(G)(y/\sqrt{2})$$

$$s-a.e.\ y \in C_0[0, T].$$

1980년 Cameron과 Storvick은 $C_0[0, T]$ 에서 정의되는 함수들의 바나하 대수 (Banach algebra) S 를 소개 하였다 [5]. 바나하 대수 S 는 $f \in M(L_2[0, T])$ 일 때 $s-a.e.\ x \in C_0[0, T]$ 에 대하여

$$F(x) = \int_{L_2[0,T]} \exp\left\{i\int_0^T v(s)\,dx(s)\right\} df(v) \tag{3.2}$$

로 주어지는 함수들의 모임이다. 위 정의에서 $M(L_2[0, T])$ 는 $L_2[0, T]$ 위에서 정의된 복소수 값을 갖는 가산 가법 가능한 보렐측도(countably additive Borel measure)들의 공간이다. 양자역학에서 중요한 역할을 하는 함수

$$F(x) = \exp\left\{\int_0^T \Theta(t, x(t))\,dt\right\}$$

도 적당한 Θ 에 대해서 S 에 속한다. 이외에도 많은 형태의 함수들이 S 에 속함이 알려져 있다 [5, 20, 21]. 바나하 대수 S 에 대해서는 많은 연구가 있었으며, 이에 대한 자세한 내용은 [20, 21]를 참고하기 바란다. 다음은 [16]에서 Huffman, Park 과

Skoug에 의해 얻어진 주된 결과들이다.

1. $F \in S$가 (3.2) 식과 같이 주어진 함수이고, $1 \le p \le 2$라 하자. 그러면 모든 실수 $q \ne 0$에 대하여 F의 L_p 푸리에-파인만 변환 $T_q^{(p)}(F)$는 존재하고

$$(T_q^{(p)}(F))(y) = \int_{L_2[0,T]} \exp\left\{i\int_0^T v(t)\,dy(t) - \frac{i}{2q}\int_0^T (v(t))^2\,dt\right\} df(v).$$

2. $F \in S$이고, $1 \le p \le 2$라 하자. 그러면 모든 실수 $q \ne 0$에 대하여

$$T_{-q}^{(p)}(T_q^{(p)}(F)) \approx F.$$

3. $F, G \in S$이고 $1 \le p \le 2$라 하자. 그러면 모든 실수 $q \ne 0$에 대하여

$$T_q^{(p)}((F*G)_q)(y) = T_q^{(p)}(F)(y/\sqrt{2})\,T_q^{(p)}(G)(y/\sqrt{2})$$

$$s-a.e.\ y \in C_0[0,T].$$

Huffman, Park 과 Skoug는 또한 [17]에서 아래와 같은 함수들의 족을 정의하고 이 함수들에 대하여 푸리에-파인만 변환과 합성곱에 대하여 연구하였다.

$1 \le p \le 2$이고, $\gamma \in \left(\frac{2p}{2p-1}, \infty\right]$이라 하자. $L_{r,p}([0,T]\times\mathbb{R})$은 $[0,T]\times\mathbb{R}$에서 정의되고 복소수 값을 갖는 르벡 측도가능한 함수 f로서 거의 모든 $t \in [0,T]$에 대하여 $f(t,\cdot)$가 $L_p(\mathbb{R})$에 속하고, 또 거의 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $\|f(\cdot, x)\|_p$가 $L_r([0,T])$에 속하는 함수들의 공간이라 하자. 그러면 A_{pr}은, $f \in L_{r,p}([0,T]\times\mathbb{R})$에 대하여

$$F(x) = \exp\left\{\int_0^T f(t, x(t))\,dt\right\} \tag{3.3}$$

형태로 표시되는 함수 F들의 모임이다. 이러한 형태의 함수는 양자역학에서 중요한 역할을 하며, $F(x)$는 $s-a.e.$에서 정의되고 축척불변 가측함수이다.

F가 (3.3) 식과 같이 주어진 함수이면, Taylor 급수를 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\int_0^T f(t, x(t))\,dt\right]^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\triangle_n(T)}\prod_{j=1}^{n}[f(t_j, x(t_j))]^n d\vec{t}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

여기서

$$\triangle_n(T) = \{(t_1, \cdots, t_n) \in [0,T]^n : 0 < t_1 < \cdots < t_n \le T\} \tag{3.5}$$

이다. 그러므로 (3.4) 식에 푸리에-파인만 변환의 정의를 적용하고 위너적분공식을 이

용하여 계산하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다. 아래 정리들에 대한 자세한 계산과 증명은 [17]을 참고하기 바란다.

1. $1 \le p \le 2$ 이고 $F \in A_{pr}$이 (3.3) 식과 같이 주어진 함수라 하자. 그러면 모든 실수 $q \neq 0$ 에 대하여 푸리에-파인만 변환 $T_q^{(p)}(F)$ 는 존재하고

$$(T_q^{(p)}(F))(y) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\triangle_n(T)} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{n} \left[\left(\frac{-iq}{2\pi(t_j - t_{j-1})} \right)^{\frac{1}{2}} f(t_j, u_j) \right.$$
$$\left. \exp\left\{ \frac{iq[(u_j - u_{j-1}) - (y(t_j) - y(t_{j-1}))]^2}{2(t_j - t_{j-1})} \right\} \right] d\vec{u}\, d\vec{t}.$$

여기서 $\triangle_n(T)$ 는 (3.5) 식으로 주어지는 집합이고 $t_0 = u_0 = 0$ 이다.

2. $1 \le p \le 2$ 이고 $F, G \in A_{pr}$라 하자.그러면 모든 실수 $q \neq 0$ 에 대하여

$$T_q^{(p)}((F * G)_q)(y) = T_q^{(p)}(F)(y/\sqrt{2})\, T_q^{(p)}(G)(y/\sqrt{2})$$
$$s-a.e.\ y \in C_0[0, T].$$

Feynman과 Hibbs는 [13]과 [14]에서, 적당한 함수 $f: [0, T]^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ 에 대하여

$$F(x) = \exp\left\{ \int_0^T \int_0^T f(s, t, x(s), x(t))\, ds\, dt \right\}$$

와 같이 표시되는 함수에 대하여 논하였다. Huffman, Park 과 Skoug는 [16]에서 이 함수에 대한 푸리에-파인만 변환과 합성곱에 대한 관계와 형태에 대하여 결과를 얻었다.

해석적 파인만 적분과 관련된 현재의 연구동향은 다음과 같다. Chang, Chung, Choi와 Skoug는 [8, 9, 10]에서 일반화된 브라운 확률과정(generalized Brownian process)으로 구성된 연속함수공간을 소개하고 함수공간에서 함수공간적분(function space integral), 일반화된 파인만 적분(generalized Feynman integral)과 일반화된 푸리에-파인만 변환(generalized Fourier-Feynman transform)에 관련된 많은 연구결과를 얻었다.

한편 Chung과 Lee([11]) 그리고 Chung과 Ji([12])는 위너공간에서 설명되어온 확률미분방정식(stochastic differential equation)과 금융수학(financial mathematics)에 관련된 이론들을 일반화된 브라운 확률과정으로 유도된 함수공간에서 연구하고 이에 대한 다양한 결과를 얻었다. 그리고 Ryu와 Im([23, 24])은 연속함수공간 $C_0[0, T]$ 에서 위너측도를 일반화한 유사 위너측도를 구성하고 위너적분에서 성립되는 다양한 이론들을 유사 위너측도에 관한 적분에 대하여 확장시켰다.

참고 문헌

1. Brue, M. D., *A functional transform for Feynman integrals similar to the Fourier transform*, Thesis, Univ. of Minnesota, Minneapolis,1972.
2. Cameron, R. H., *A family of integrals serving to connect the Wiener and Feynman integrals*, Journal of Math. and Physics, 39(1960), 126-140.
3. Cameron, R. H., *The Ilstow and Feynman integrals*, J. Analyse Math. 10(1962-1963), 287-361.
4. Cameron, R. H., Storvick, D. A., *An L_2-analytic Fourier-Feynman transform,* Michigan Math. J. 23(1976), 1-30.
5. Cameron, R. H., Storvick, D. A., *Some Banach algebras of analytic Feynman integrable functionals*, in Analytic functions, Kozubin, 1979, Lecture Notes in Mathematics 798, Springer-Varlag, Berlin, New York, (1980), 18-67.
6. Cameron, R. H., Storvick, D. A., *Sequential Fourier-Feynman transforms*, Ann. Acad. Sci. Fenn. 10(1985), 107-111.
7. Chang, K. S., *Scale-invariant measurability in Yeh-Wiener space*, J. Korean Math. Soc., 19(1982), 61-67.
8. Chang, S. J., Choi, J. G., Skoug, D., *Integration by parts formulas involving generalized Fourier-Feynman transforms on function space*, Trans. Amer. Math. Soc., 355(2003), 2925-2948.
9. Chang, S. J., Chung, D.M., *Conditional function space integrals with applications*, Rocky Mountain J. Math., 26(1996), 37-62.
10. Chang, S. J., Skoug, D., *Generalized Fourier-Feynman transforms and a first variation on function space*, Integral Transforms and Special Functions, 14(2003), 375-393.
11. Chung, D. M., Lee, J. H., *Generalized Brownian motions with application to finance*, J. Korean Math. Soc. 43(2006), 357-371.
12. Chung, T. S., Ji, U. C., *Gaussian white noise and applications to finance*, in Quantum Information and Complexity (T. Hida, K. Saito and Si Si, Eds.), World Scientific, 2004, pp. 179-201.
13. Feynman, R. P., *Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics,* Rev. Mod. Phys., 20(1948), 367-387.
14. Feynman, R. P., Hibbs, A. R., *Quantum mechanics and path integrals,* McGraw-Hill, New York, 1965.
15. Huffman, T., Park, C., Skoug, D., *Analytic Fourier-Feynman transforms and convolution*, Trans. Amer. Math. Soc. 347(1995), 661-673.

16. Huffman, T., Park, C., Skoug, D., *Convolution and Fourier-Feynman transforms of functionals involving multiple integrals*, Michigan. J. 43(1996), 247-261.
17. Huffman, T., Park, C., Skoug, D., *Convolution and Fourier-Feynman transforms, Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 12(1997), 827-841.
18. Johnson, G. W, Skoug, D., *An* L_p*-analytic Fourier-Feynman transform*, Michigan Math. J., 26(1979), 103-127.
19. Johnson, G. W, Skoug, D., *Scale-invariant measurability in Wiener space*, Pacific J. of Math., 83(1979), 157-176.
20. Johnson, G. W, Skoug, D., *Notes on the Feynman integral*, I, Pacific J. Math., 93(1981), 313-324.
21. Johnson, G. W, Skoug, D., *Notes on Feynman integral*, II, J. Func. Anal., 41(1981), 277-289.
22. Kac, M., *Probability and Related Topics in Physical Sciences*, Interscience Publisher, New York (1959).
23. Ryu, K. S., Im, M. K., *A measure-valued analogue of Wiener measure and the measure-valued Feynman-Kac formula*, Trans. Amer. Math. Soc. 354(2002), 4921-4951.
24. Ryu, K. S., Im, M. K., *An analogue of Wiener measure and its applications*, J. Korean Math. Soc. 39(2002), 801-819.

Note on Analytic Feynman Integral on Wiener Space

Department of Mathematics, Dankook University **Sang Deok Lee**
Department of Mathematics, Dankook University **Hyuk Kim**

In this paper, we investigate the analytic Feynman integral, the analytic Fourier-Feynman transform and convolution product on Wiener space. We then consider various results between these concepts.

Key words: Wiener space, analytic Feynman integral, analytic Fourier-Feynman transform, convolution product

2000 Mathematics Subject Classification : 60J65, 28C20

논문 접수 : 2007 년 11월 심사 완료 : 2008 년 1월