

# 끝단질량과 크랙을 가진 유체유동 회전 외팔 파이프의 동적 안정성

## Dynamic Stability of Rotating Cantilever Pipe Conveying Fluid with Tip mass and Crack

손인수† · 윤한익\* · 김동진\*\*

In-Soo Son, Han-Ik Yoon and Dong-Jin Kim

(2007년 11월 1일 접수 ; 2007년 11월 23일 심사완료)

**Key Words** : Open Crack(개구형 크랙), Rotating Cantilever Pipe Conveying Fluid(유체이송 회전 외팔파이프), Stability(안정성), Tip Mass(끝단질량), Critical Flow Velocity(임계유속)

### ABSTRACT

The stability of a rotating cantilever pipe conveying fluid with a crack and tip mass is investigated by the numerical method. That is, the effects of the rotating angular velocity, mass ratio, crack severity and tip mass on the critical flow velocity for flutter instability of system are studied. The equations of motion of rotating pipe are derived by using the Euler-Bernoulli beam theory and the extended Hamilton's principle. The crack section of pipe is represented by a local flexibility matrix connecting two undamaged pipe segments. Also, the crack is assumed to be in the first mode of fracture and always opened during the vibrations. When the tip mass and crack are constant, the critical flow velocity for flutter is proportional to the rotating angular velocity of pipe. In addition, the stability maps of the rotating pipe system as a rotating angular velocity and mass ratio  $\beta$  are presented.

### 1. 서 론

다물체 동역학은 70년대 초반 제어공학의 급격한 발전과 더불어 새로운 공학의 한 연구분야로 자리 잡았다. 유연 구조물(flexible structures)의 동특성을 제대로 이해하고 해석하는 것은 로봇의 매니퓰레이터의 제어 및 우주공학의 여러 분야에서 매우 중요한 문제라 할 수 있다. 특히 회전하는 유연 구조물은 대표적인 다물체 시스템 중의 하나로써 오랜 기간 동안 많은 연구자들에 의해 연구되어져 왔다<sup>(1-3)</sup>. 또한 유체유동을 갖는 파이프 구조물은 일반적으로 산업 현장 등의 배관계 및 기계장치 등에서 흔히 접할 수

있다. 이러한 시스템의 주요 인자인 유체가 파이프 구조물의 진동특성과 안정성에 미치는 영향에 관하여서도 많은 연구들이 진행되고 있다<sup>(4,5)</sup>. 일반적으로 크랙과 같은 결함을 갖는 구조물은 그 위치에서 강성저하가 발생하며, 동일한 하중이 작용하더라도 크랙에 의해서 추가적인 변형 에너지가 존재하게 되어 구조물의 안정성에 큰 영향을 미친다. 회전하는 구조물의 동특성은 회전하지 않는 그것의 동특성과는 매우 다른 현상을 보이며 이러한 회전운동은 회전 구조물의 강성 및 고유진동의 특성변화를 가져온다<sup>(6)</sup>. 하지만 수학적 모델링 및 계산의 복잡성, 그리고 과도한 파라미터들로 인하여 회전하지 않는 구조물의 연구에 비하여 회전하는 구조물에 관한 연구는 그다지 많지 않은 실정이다. 회전운동은 유체와 크랙을 갖는 파이프 구조물의 동적특성과 안정성에 큰 영향을 미친다. 따라서 회전요소를 포함하고 끝단질

† 교신저자: 정회원, 동의대학교 기계공학과

E-mail : isson92@deu.ac.kr

Tel : (051)890-2239, Fax : (051)890-1932

\* 정회원, 동의대학교 기계공학과

\*\* 동의대학교 대학원 기계공학과

량을 가진 구조물의 안정성을 판단하는 것은 로봇 매니플레이터 등의 끝점제어 등 여러 분야에서 필요하며, 그 응용이 가능하다. 특히 회전 구조물에 안정성에 큰 영향을 미치는 크랙이 존재하는 경우 크랙과 회전운동, 끝단질량 및 유속에 의한 연성관계가 전체 계의 안정성에 미치는 영향을 연구하고 예측하는 것은 중요한 공학적 문제라 할 수 있다. Yoo 등은<sup>(7)</sup> 복합변형변수를 이용한 수학적 모델링을 다양한 회전 구조물에 적용하여 회전 구조물의 동적 모델링의 타당성을 규명하였으며, Panussis 등은<sup>(8)</sup> 회전하는 유체튜브의 면외 및 면내방향의 진동특성에 미치는 회전 각속도와 유체의 영향과 계의 안정성 해석을 수행하였다. 또 Dado와 Abuzeid는<sup>(9)</sup> 크랙과 끝단질량을 가진 보의 횡방향 및 축방향 진동의 연성관계에 대한 연구결과를 발표하였으며, Liu 등은<sup>(10)</sup> 파이프 형태의 중공축에 크랙이 존재하는 경우 크랙의 영향에 따른 보의 동적특성을 연구하였다. 최근, 끝단질량을 가진 회전하는 유연 구조물의 동적 특성에 관한 연구결과가 발표되었으며<sup>(11)</sup>, 회전 외팔보에 크랙과 같은 결함이 존재하는 경우 크랙이 회전 외팔보의 동특성에 미치는 영향에 대한 연구결과도 발표되었다<sup>(12)</sup>.

하지만 이상의 많은 연구들에서는 크랙, 이송유체, 끝단질량 그리고 회전 요소를 모두 포함하는 파이프 구조물의 안정성 해석에 관한 연구는 찾아보기 힘들다. 따라서 이 연구에서는 끝단질량을 가지고 회전하는 유체유동 외팔 파이프에 크랙형태의 결함이 존재하는 경우에 크랙과 유속, 그리고 회전운동이 계의 안정성에 미치는 영향을 수치해석 하였다.

## 2. 이론 해석

Fig. 1은 이 연구에서 해석 예제로 사용한 반경  $r$ 의 축에 고정되어 회전운동을 하는 크랙과 끝단질량을 가진 유체유동 회전외팔 파이프를 나타낸 것이다. 중력의 영향은 고려하지 않았으며, 파이프의 해석은 오일러-베르누이 보 이론을 적용하였다. Fig. 1에서  $x$ 는 외팔 파이프의 고정점  $O$ 로부터 변형 전 임의의 질점  $P_0$ 까지의 거리를 나타내며,  $s$ 는 변형 전의 임의의 질점  $P_0$ 에서 변형 후의 질점  $P$ 까지 변형할 때 파이프가 인장된 길이를 나타낸다. 또  $U$ ,  $m_t$ , 그리고  $x_c$ 는 유속, 끝단질량, 그리고 크랙의 위

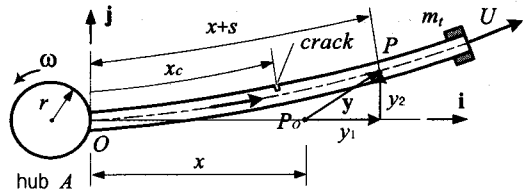


Fig. 1 Original configuration of rotating cantilever pipe conveying fluid with crack and tip mass

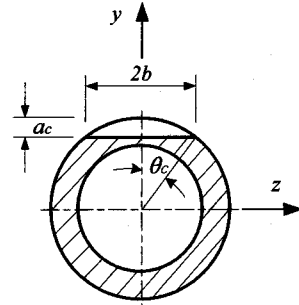


Fig. 2 Cross section of cracked pipe

치를 각각 의미한다.  $\omega$ 는 파이프의 회전 각속도이다. Fig. 2는 크랙이 존재하는 부분의 파이프 단면을 표현한 것이다. 여기서  $a_c$ ,  $2b$ 는 각각 크랙의 깊이와 길이이다. 또  $\theta_c$ 는 전체 크랙의 반각이다.

### 2.1 크랙 모델링

같은 하중이 작용하는 구조물에서도 크랙이 존재하는 경우에 구조물의 자체 탄성 변형에너지 외에 크랙에 의한 변형에너지가 존재하고 이 부가되는 에너지만큼 추가적인 변형이 더 발생하게 된다. Castigliano의 정리를 이용하여 크랙위치에서 크랙으로 인하여 부가되는 변위가 포함된 유연행렬은 다음과 같이 구할 수 있다<sup>(9,10)</sup>.

$$C_{\bar{i}\bar{j}} = \frac{\partial^2}{\partial P_{\bar{i}} \partial P_{\bar{j}}} \left[ \int_{-b}^b \int_0^{a_c} J dy dz \right] \quad (1)$$

여기서  $\bar{i}, \bar{j}$ 는 각 힘의 방향을 의미하며 변형률 에너지 밀도함수  $J$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$J = \frac{1-\nu^2}{E} (K_{IP} + K_{IM})^2 \quad (2)$$

여기서  $K_{IP}$ 와  $K_{IM}$ 은 각각 제 I 파괴모드에서의 축

방향 힘  $P_a$ 와 굽힘 모멘트  $M_b$ 에 의한 응력집중계수를 의미한다. 또  $\nu$ 와  $E$ 는 Poisson의 비와 영계수를 각각 나타낸다. 식 (2)의 응력집중계수는 각각 다음과 같다<sup>(10)</sup>.

$$K_{IP} = \frac{P_a}{2\pi R t_p} \sqrt{\pi R \theta_c} F_t(\theta_c), \quad (3)$$

$$K_{IM} = \frac{M_b}{\pi R^2 t_p} \sqrt{\pi R \theta_c} F_b(\theta_c)$$

여기서  $t_p$ 는 파이프의 두께를 의미하며,  $R = (R_o + R_i)/2$ 이다. 또  $F_t$ 와  $F_b$ 는 참고문헌 (10)에 잘 나타나 있다.

이 연구에서는 축방향과 굽힘방향의 힘과 모멘트의 영향만을 고려하였다. 따라서 강성행렬은 식 (2), (3)을 식 (1)에 대입하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} C_{22} & -C_{12} \\ -C_{21} & C_{11} \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서 아래첨자는 축방향 힘과 모멘트에 관계하는 항을 의미하며,  $\Delta = C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}$ 이다. 또  $k_{12}$ 와  $k_{21}$ 은 축방향과 굽힘방향의 연성효과를 나타내는 요소로써 전체 시스템의 동특성에 극히 미소한 영향을 미치기 때문<sup>(9)</sup>에 이 연구에서는 두 방향의 연성효과를 고려하지 않았다. 즉, 병진 및 회전 스프링은  $K_T \equiv k_{11} = C_{11}^{-1}$ ,  $K_R \equiv k_{22} = C_{22}^{-1}$ 로 정의 된다.

## 2.2 운동방정식

먼저, Fig. 1의  $y_1$  대신 인장방향 변위  $s$ 를 사용하기 위하여 다음과 같은 기하학적 관계를 이용하였다<sup>(7)</sup>.

$$s \approx y_1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left( \frac{\partial y_2}{\partial x} \right)^2 dx \quad (5)$$

계의 운동방정식은 크랙과 끝단질량을 가진 유체유동 회전 외팔 파이프의 에너지식들을 확장된 해밀턴 원리에 대입하여 유도할 수 있다. 이 연구에서는 횡방향과 인장방향의 연성효과를 무시하였다. 따라서 자유진동에 대한 계의 횡방향 운동방정식을 구하면 각 크랙구간에 대하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

I) Segment 1 :  $0 \leq x \leq x_c$

$$\begin{aligned} & (m+M) \frac{\partial^2 y_{21}(x,t)}{\partial t^2} + 2MU \frac{\partial^2 y_{21}(x,t)}{\partial x \partial t} \\ & + MU^2 \frac{\partial^2 y_{21}(x,t)}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 y_{21}(x,t)}{\partial x^4} \\ & - (m+M)\omega^2 y_{21}(x,t) \\ & - (m+M)\omega^2 \left[ r(L-x) + \frac{(L^2-x^2)}{2} \right] \frac{\partial^2 y_{21}(x,t)}{\partial x^2} \\ & + 2\omega(m+M) \frac{\partial s_1(x,t)}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

II) Segment 2 :  $x_c \leq x \leq L$

$$\begin{aligned} & (m+M) \frac{\partial^2 y_{22}(x,t)}{\partial t^2} + m_t \frac{\partial^2 y_{22}(L,t)}{\partial t^2} \\ & + 2MU \frac{\partial^2 y_{22}(x,t)}{\partial x \partial t} + MU^2 \frac{\partial^2 y_{22}(x,t)}{\partial x^2} \\ & + EI \frac{\partial^4 y_{22}(x,t)}{\partial x^4} - (m+M)\omega^2 y_{22}(x,t) \\ & - (m+M)\omega^2 \left[ r(L-x) + \frac{(L^2-x^2)}{2} \right] \frac{\partial^2 y_{22}(x,t)}{\partial x^2} \\ & - m_t \omega^2 y_{22}(L,t) + m_t \omega^2 L \frac{\partial^2 y_{22}(L,t)}{\partial x^2} \\ & + 2\omega(m+M) \frac{\partial s_2(x,t)}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

여기서  $m$ 과  $M$ 은 각각 파이프와 유체의 단위길이당 질량이며,  $L$ 은 파이프의 전체길이를 나타낸다. 인장방향에 대한 운동방정식은 각 크랙 구간에 대하여 각각 다음과 같다.

I) Segment 1 :  $0 \leq x \leq x_c$

$$\begin{aligned} & (m+M) \frac{\partial^2 s_1(x,t)}{\partial t^2} + 2MU \frac{\partial^2 s_1(x,t)}{\partial x \partial t} \\ & - EA_p \frac{\partial^2 s_1(x,t)}{\partial x^2} \\ & - (m+M)\omega^2 \left[ s_1(x,t) + 2\omega \frac{\partial y_{21}(x,t)}{\partial t} \right] = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

II) Segment 2 :  $x_c \leq x \leq L$

$$(m+M) \frac{\partial^2 s_2(x,t)}{\partial t^2} + m_t \frac{\partial^2 s_2(L,t)}{\partial t^2}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2MU \frac{\partial^2 s_2(x,t)}{\partial x \partial t} - EA_p \frac{\partial^2 s_2(x,t)}{\partial x^2} - m_t \omega^2 s_2(L,t) \\
 &- (m+M)\omega^2 \left[ s_2(x,t) + 2\omega \frac{\partial y_{22}(x,t)}{\partial t} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{9}$$

여기서  $A_p$ 는 파이프의 단면적이고,  $s_k, y_{2k}$  ( $k=1,2$ )는 파이프의 인장방향 변위 및 횡변위를 나타내며 각각 다음과 같다.

$$s_k = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{ki}(x) d_{1i}(t) \tag{10a}$$

$$y_k = \sum_{i=1}^{\infty} Y_{ki}(x) d_{2i}(t) \tag{10b}$$

여기서  $\phi_i(x), Y_i(x)$ 는 각각 인장방향과 횡방향 모드함수,  $d_{1i}(t), d_{2i}(t)$ 는 일반화 좌표,  $k$ 는 크랙에 의한 분할 구간의 수를 나타낸다. 그리고 각 모드함수는 크랙이 존재하는 위치를 기준으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

I) Segment 1 :  $0 \leq x \leq x_c$

$$\phi_{1i}(x) = A_1 \cos(\lambda_{ai}x) + A_2 \sin(\lambda_{ai}x) \tag{11a}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{1i}(x) &= B_1 \cos(\lambda_i x) + B_2 \sin(\lambda_i x) \\
 &+ B_3 \cosh(\lambda_i x) + B_4 \sinh(\lambda_i x)
 \end{aligned} \tag{11b}$$

II) Segment 2 :  $x_c \leq x \leq L$

$$\phi_{2i}(x) = A_3 \cos(\lambda_{ai}x) + A_4 \sin(\lambda_{ai}x) \tag{12a}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{2i}(x) &= B_5 \cos(\lambda_i x) + B_6 \sin(\lambda_i x) \\
 &+ B_7 \cosh(\lambda_i x) + B_8 \sinh(\lambda_i x)
 \end{aligned} \tag{12b}$$

여기서  $\lambda_{ai}$ 와  $\lambda_i$ 는 각각 다음 식에서 구할 수 있다.

$$\lambda_{ai}^2 = \frac{\omega_{ai}^2 m L^2}{EA_p} \tag{13}$$

$$\cos(\lambda_i L) \cosh(\lambda_i L) + 1 = 0 \tag{14}$$

식(13)에서  $\omega_{ai}$ 는 외팔 파이프의  $i$ 번째 종진동 고 유진동수이다. 또 미지수  $A_1 \sim A_4$ , 그리고  $B_1 \sim B_8$ 은 외팔 파이프의 경계조건 및 크랙위치에서의 연속 조건인 다음 식들에 대입하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \phi_1(0) &= 0, \quad \frac{d\phi_2(L)}{dx} = 0, \\
 \frac{d\phi_1(x_c)}{dx} &= \frac{d\phi_2(x_c)}{dx}
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 Y_1(0) &= 0, \quad \frac{dY_1(0)}{dx} = 0, \\
 \frac{d^2 Y_2(L)}{dx^2} &= 0, \quad \frac{d^3 Y_2(L)}{dx^3} = 0
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 Y_1(x_c) &= Y_2(x_c), \quad \frac{d^2 Y_1(x_c)}{dx^2} = \frac{d^2 Y_2(x_c)}{dx^2}, \\
 \frac{d^3 Y_1(x_c)}{dx^3} &= \frac{d^3 Y_2(x_c)}{dx^3}
 \end{aligned} \tag{17}$$

크랙 위치에서의 회전 및 병진스프링 상수가 포함된 연속조건은 각각 다음 식으로 표현할 수 있다<sup>(9)</sup>.

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{l} EA_p \frac{d\phi_2(x_c)}{dx} \\ EI \frac{d^2 Y_2(x_c)}{dx^2} \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} K_T [\phi_2(x_c) - \phi_1(x_c)] \\ K_R \left[ \frac{dY_2(x_c)}{dx} - \frac{dY_1(x_c)}{dx} \right] \end{array} \right\}
 \end{aligned} \tag{18}$$

### 2.3 무차원 운동방정식

앞 절에서 구한 계의 운동방정식을 무차원화하기 위하여 사용한 무차원 매개변수들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \xi &= \frac{x}{L}, \quad \bar{r} = \frac{r}{L}, \quad \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m+M}}, \\
 \beta &= \frac{M}{m+M}, \quad u = UL \sqrt{\frac{M}{EI}}, \quad k_R = \frac{K_R L}{EI}, \\
 k_T &= \frac{K_T L^3}{EA_p}, \quad \Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{m+M}{EI}}, \\
 \Omega_\mu &= \omega \sqrt{\frac{m_t L^3}{EI}}, \quad \mu = \frac{m_t}{(m+M)L}
 \end{aligned} \tag{19}$$

또 무차원 변위는 각각 다음과 같다.

$$v_k = \frac{s_k}{L} = \sum_{i=1}^n \phi_{ki}(\xi) q_{1i}(\tau) \tag{20}$$

$$\eta_k = \frac{y_{2k}}{L} = \sum_{i=1}^n Y_{ki}(\xi) q_{2i}(\tau) \tag{21}$$

식(19)~(21)의 무차원 매개변수들을 이용하여 계

의 자유진동에 대한 횡방향 무차원 운동방정식을 구하면 크랙 위치에 대하여 각각 다음과 같다.

I) Segment 1 :  $0 \leq \xi \leq \xi_c$

$$\begin{aligned} & \ddot{\eta}_1(\xi, \tau) + 2\sqrt{\beta}u\dot{\eta}_1'(\xi, \tau) + u^2\eta_1''(\xi, \tau) - \Omega^2\eta_1(\xi, \tau) \\ & + \eta_1^{iv}(\xi, \tau) - \Omega^2\left[\bar{r}(1-\xi) + \frac{(1-\xi^2)}{2}\right]\eta_1''(\xi, \tau) \\ & + 2\Omega s_1(\xi, \tau) = 0 \end{aligned} \quad (22a)$$

II) Segment 2 :  $\xi_c \leq \xi \leq 1$

$$\begin{aligned} & \ddot{\eta}_2(\xi, \tau) + \mu\ddot{\eta}_2(1, \tau) + 2\sqrt{\beta}u\dot{\eta}_2'(\xi, \tau) + u^2\eta_2''(\xi, \tau) \\ & + \eta_2^{iv}(\xi, \tau) - \Omega^2\eta_2(\xi, \tau) - \Omega_\mu^2[\eta_2(1, \tau) - \eta_2'(1, \tau)] \\ & - \Omega^2\left[\bar{r}(1-\xi) + \frac{(1-\xi^2)}{2}\right]\eta_2''(\xi, \tau) + 2\Omega s_2(\xi, \tau) = 0 \end{aligned} \quad (22b)$$

여기서  $(\cdot)$ 와  $(\cdot)'$ 은 무차원 시간 및 무차원 축방향 좌표에 대한 미분이다. 또 자유진동에 대한 인장방향의 무차원 운동방정식은 크랙 위치에 따라 각각 다음과 같이 구할 수 있다.

I) Segment 1 :  $0 \leq \xi \leq \xi_c$

$$\begin{aligned} & \ddot{v}_1(\xi, \tau) + 2\Omega\dot{\eta}_1 + 2u\sqrt{\beta}\dot{v}_1'(\xi, \tau) - \sigma^2v_1''(\xi, \tau) \\ & - \Omega^2v_1(\xi, \tau) = 0 \end{aligned} \quad (23a)$$

II) Segment 2 :  $\xi_c \leq \xi \leq 1$

$$\begin{aligned} & \ddot{v}_2(\xi, \tau) + \mu\ddot{v}_2(1, \tau) + 2\Omega\dot{\eta}_2 + 2u\sqrt{\beta}\dot{v}_2'(\xi, \tau) \\ & - \sigma^2v_2''(\xi, \tau) - \Omega^2v_2(\xi, \tau) - \Omega_\mu^2v_2(1, \tau) = 0 \end{aligned} \quad (23b)$$

무차원 경계조건 및 연속조건은 각각 다음과 같다.

$$v_1(0, \tau) = 0, \quad v_2'(1, \tau) = 0 \quad (24)$$

$$\eta_1(0, \tau) = 0, \quad \eta_1'(0, \tau) = 0, \quad (25)$$

$$\eta_2''(1, \tau) = 0, \quad \eta_2'''(1, \tau) = 0$$

$$v_1'(\xi_c, \tau) = v_2'(\xi_c, \tau) \quad (26)$$

$$\eta_1(\xi_c, \tau) = \eta_2(\xi_c, \tau), \quad \eta_1''(\xi_c, \tau) = \eta_2''(\xi_c, \tau),$$

$$\eta_1'''(\xi_c, \tau) = \eta_2'''(\xi_c, \tau),$$

(27)

$$\begin{cases} v_2'(\xi_c, \tau) \\ \eta_2''(\xi_c, \tau) \end{cases} = \begin{cases} k_T[v_2(\xi_c, \tau) - v_1(\xi_c, \tau)] \\ k_R[\eta_2'(\xi_c, \tau) - \eta_1'(\xi_c, \tau)] \end{cases}$$

식(20)과 (21)을 식(22), (23)에 대입하여 Galerkin 적분을 수행하면 다음과 같이 행렬형태의 식을 얻을 수 있다.

$$[M]\ddot{\mathbf{q}} + [C]\dot{\mathbf{q}} + [K]\mathbf{q} = 0 \quad (28)$$

여기서 행렬  $[M]$ ,  $[C]$ , 그리고  $[K]$ 는 각각 크랙과 끝단질량을 가진 회전 외팔 파이프의 질량, 감쇠, 그리고 강성행렬을 나타낸다. 또  $\mathbf{q} = [q_{1i}(\tau) \ q_{2i}(\tau)]^T$ 이다. 이 연구에서는 횡방향 진동에 대한 계의 안정성을 평가하였으며, 따라서 횡방향 진동에 대하여  $\mathbf{q}_i(\tau) = \mathbf{D}e^{i\gamma\tau}$  ( $i = \sqrt{-1}$ )로 표현할 수 있다. 계의 동적 안정성은 고유치  $\gamma$ 의 허수부의 부호에 의해 결정된다<sup>(13)</sup>.

### 3. 수치해석 결과 및 고찰

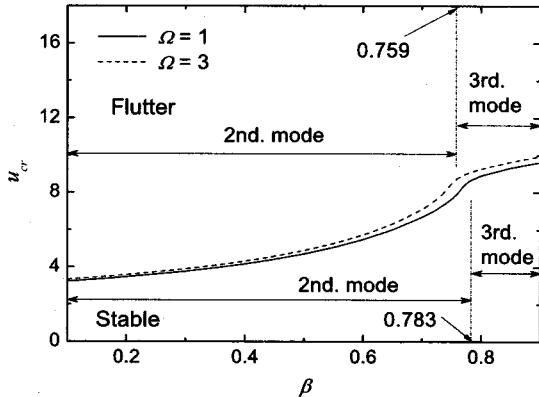
이 연구에서는 앞 절에서 구한 고유치 문제의 방정식으로부터 수치해석을 수행하였으며, 이를 통하여 크랙의 크기와 위치 그리고 파이프의 회전 각속도 및 끝단질량이 계의 플러터 불안정을 유발하는 임계유속에 미치는 영향에 대하여 결과를 도출하고 고찰하였다. 이 연구에서  $\bar{r} = 0.05$ 로 항상 일정하다고 가정하였다.

Fig. 3은 끝단질량의 크기  $\mu = 0.1$ , 크랙의 크기가 0.1로 일정한 경우 크랙의 위치와 회전 각속도의 변화에 따른 계의 플러터 임계유속을 나타낸 것이다. 여기서 가로축은 파이프와 유체의 질량비  $\beta$ , 그리고 세로축은 플러터 임계유속을 각각 나타내고 있다. 도시된 결과의 아래쪽은 안정, 그리고 위쪽은 플러터 불안정 영역을 표현하고 있다. 전반적으로 크랙의 크기 및 위치에 관계없이 회전 각속도와 임계유속은 서로 비례적인 경향을 가진다. 회전 각속도  $\Omega = 3$ 의 결과를 살펴보면, 크랙의 위치가 0.1인 경우 질량비가  $0 < \beta \leq 0.759$ 의 영역에서 2차 모드에 의해 불안정이 일어나며,  $\xi_c = 0.3$ 일 때는  $0 < \beta \leq$

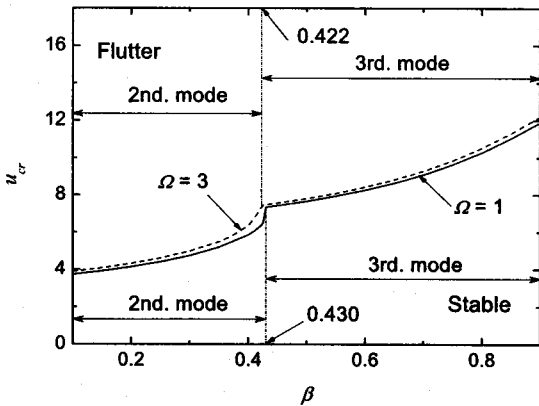
0.422, 그리고 Fig. 3(c)의  $\xi_c = 0.5$ 일 때는  $0 < \beta \leq 0.388$ 의 질량비 영역에서 계는 2차 모드에 의해 플러터 불안정이 일어난다. 크랙의 위치가 파이프의 고정단 가까이 존재할수록 2차 모드에 의해 불안

정을 유발하는 질량비의 영역이 넓어진다는 것을 알 수 있다. Fig. 3(c)에서  $\Omega = 3$ 인 경우  $0.838 < \beta$ 인 영역에서는 4차 모드에 의해 플러터 불안정이 일어난다.

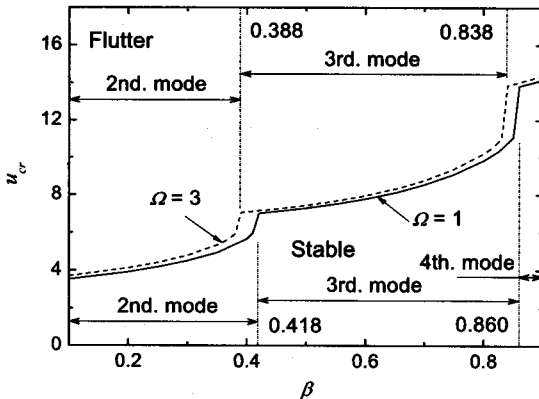
Fig. 4는 끝단질량의 크기가 0.1, 회전 각속도  $\Omega = 3$ 로 두었을 때 크랙의 영향에 의한 계의 플러터 임계유속의 변화를 도식한 것이다. Fig. 4(a)는 크랙의 위치가 0.3인 경우의 결과이다. 질량비가  $\beta \leq 0.480$ 인 영역에서는 크랙의 크기가 0.1인 경우 계는 더 큰 임계유속을 가지지만 그 이상의 질량비 영역에서는 오히려 크랙의 크기가 0.2인 경우 더 큰 임계유속을 가짐을 알 수 있다. Fig. 4(b)의 크랙의 위치에 의한 임계유속을 살펴보면, 크랙의 위치가 0.5인 경우 0.3인 경우에 비하여 전반적으로 낮은 임계유속을 보이지만 특정 질량비 영역, 즉 불안정을 유발하는 모드가 변하는 점프현상<sup>(5)</sup>에 의해서 오히려 반대의 경향을 보인다.



(a)  $a = 0.1, \xi_c = 0.1$

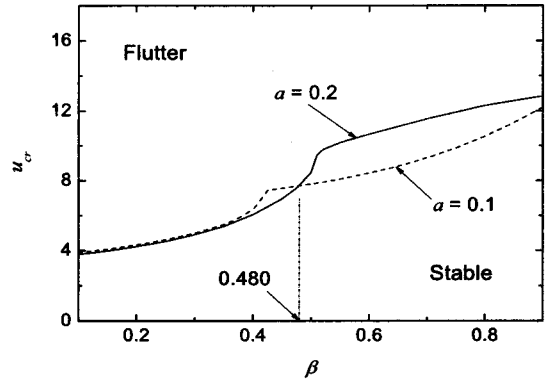


(b)  $a = 0.1, \xi_c = 0.3$

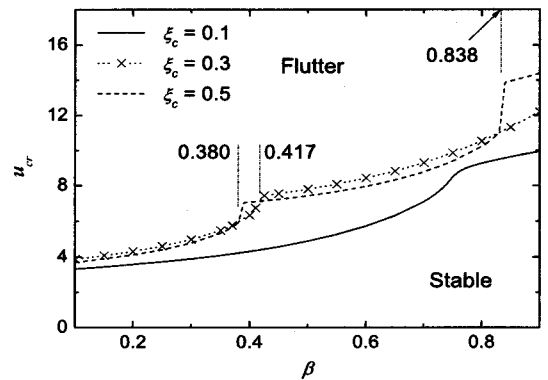


(c)  $a = 0.1, \xi_c = 0.5$

Fig. 3 Critical flow velocity for flutter of cracked rotating pipe as  $\beta$  ( $\mu = 0.1$ )



(a)  $\xi_c = 0.3$



(b)  $a = 0.1$

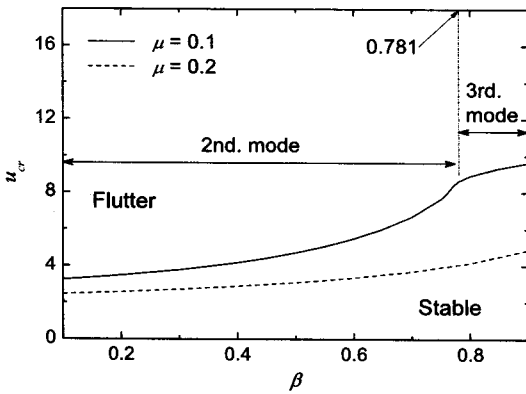
Fig. 4 Critical flow velocity for flutter of cracked rotating pipe as  $\beta$  ( $\mu = 0.1, \Omega = 3$ )

Fig. 5는 크랙의 크기가 0.1,  $\Omega = 1$ 로 일정한 경우에 끝단질량의 영향에 의한 계의 임계유속의 변화를 나타내었다. Fig. 5(a), (b)는 각각 크랙의 위치  $\xi_c = 0.1, 0.3$ 인 경우이다. Fig. 5(a)에서 끝단질량의 크기가 0.1인 경우  $\beta \leq 0.781$ 인 질량비 영역에서 2차 모드에서, 그리고 그 이상의 질량비에서는 3차 모드에 의해 플러터 불안정이 일어난다. 하지만 끝단질량의 크기가 0.2인 경우는 전 질량비에 대하여 2차 모드에 의해서만 플러터 불안정이 발생함을 알 수 있다. 또, 전반적으로 끝단질량과 임계유속은 서로 반비례적인 경향을 보이지만 Fig. 5(b)에서 볼 수 있는 것처럼 특정 질량비 영역( $0.874 \leq \beta$ )에서는 끝단질량이 존재하지 않는 경우  $\mu = 0.1$ 인 경우에 비하여 오히려 더 낮은 임계유속을 갖는다.

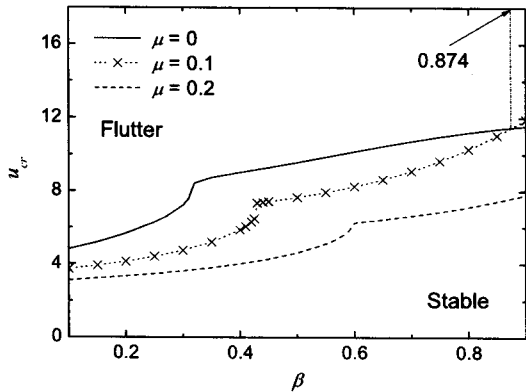
Figs. 6~8은 크랙의 위치 및 크기, 질량비, 그리고 끝단질량의 영향에 따른 파이프의 플러터 불안정 및

안정 영역을 나타낸 것이다. 가로축은 (임계)유속을 나타내며, 세로축은 파이프의 회전 각속도이다. 앞에서 설명한 바와 같이 크랙, 질량비, 그리고 끝단질량의 크기에 관계없이 회전 각속도와 임계유속은 서로 비례적인 경향을 보인다.

Fig. 6(a)는 크랙의 위치가 파이프의 0.1인 위치에 있을 때 크랙의 크기에 따른 임계유속 변화이다. 이때 끝단질량의 크기와 질량비는 모두 0.2이다. 동일한 회전 각속도에서는 크랙의 크기가 클수록 플러터 불안정을 유발하는 임계유속의 값은 커진다. 즉, 크랙의 크기가 클수록 회전 각속도의 증가에 따른 계의 안정한 영역이 넓어진다. 또 파이프의 회전 각속도가 증가할수록 크랙의 크기에 따른 임계유속 값의 차이는 더 커진다. 예를 들어, 회전하지 않는 경우 크랙의 크기가 0.1일 때에 비하여 0.2인 경우 임계유속은 약 30.5% 정도 더 커진다. 또 파이프의

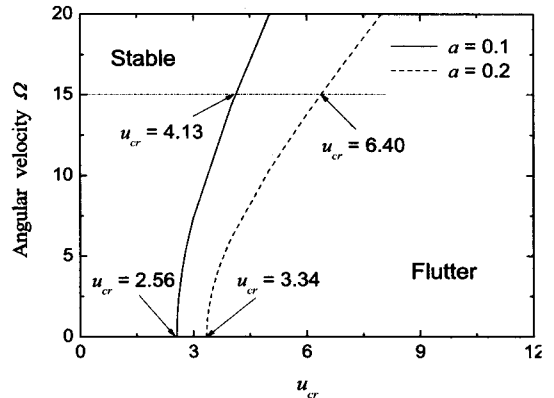


(a)  $\xi_c = 0.1$

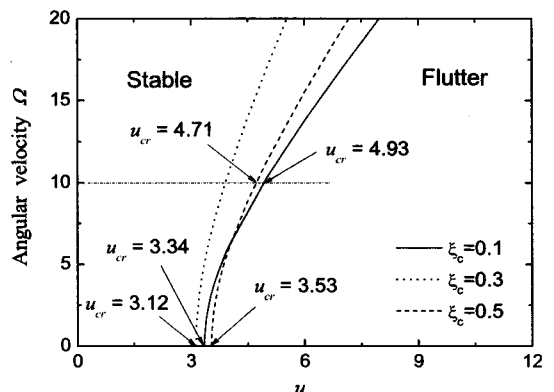


(b)  $\xi_c = 0.3$

Fig. 5 Critical flow velocity for flutter of cracked rotating pipe as  $\beta$  ( $a = 0.1, \Omega = 1$ )



(a)  $\xi_c = 0.1$



(b)  $a = 0.2$

Fig. 6 Stability maps of cracked rotating pipe as flow velocity for crack effect ( $\beta = \mu = 0.2$ )

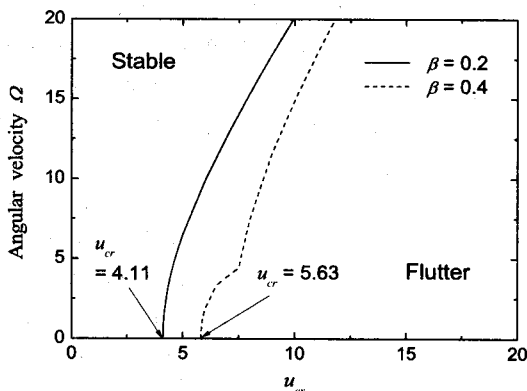
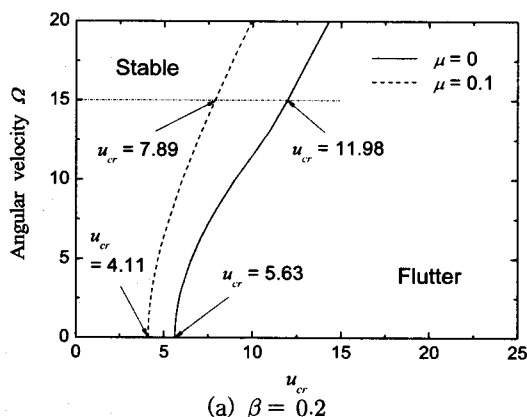
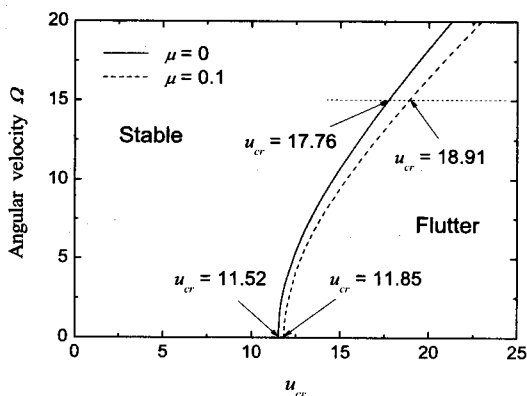


Fig. 7 Stability map of cracked rotating pipe as flow velocity for mass ratio ( $a=0.1$ ,  $\xi_c=0.1$ ,  $\mu=0.2$ )



(a)  $\beta = 0.2$



(b)  $\beta = 0.9$

Fig. 8 Stability maps of cracked rotating pipe as flow velocity for tip mass ( $a=0.2$ ,  $\xi_c=0.3$ )

회전 각속도가 15인 경우, 크랙의 크기가 0.1인 경우에 비하여  $a=0.2$ 인 경우에 약 54.9% 정도 임계유속이 큰 값을 가진다는 것을 알 수 있다. Fig. 6(b)

는  $a=\beta=0.2$ 인 경우 크랙의 위치에 따른 계의 안정 및 불안정 영역을 도시한 것이다. 회전 각속도가  $0 < \Omega < 6.43$ 의 범위에서는 크랙의 위치가 0.5일 때에 비하여 크랙의 위치가 0.1인 경우에 임계유속의 값이 더 큰 값을 가지지만,  $6.43 \leq \Omega$ 인 영역에서는 그 반대의 경향을 가진다. 또 크랙의 위치가 파이프의 0.3인 위치에 존재하는 경우 가장 낮은 임계유속을 가지며 이것은 Fig. 4(b)에서 설명한 결과와 일치함을 알 수 있다.

Fig. 7은  $\xi_c=0.1$ ,  $a=0.1$ , 그리고 끝단질량의 크기가 0.2인 경우 파이프와 유체의 질량비에 따른 계의 안정한 영역을 나타내었다. 회전 각속도가 0인 경우 질량비가 0.2일 때 임계유속은 4.11, 그리고 질량비가 0.4인 경우는 5.63으로 도시한 결과의 회전각속도에 대하여 전반적으로 질량비가 클 때 임계유속은 더 큰 값을 가진다.

Fig. 8은  $\xi_c=0.3$ ,  $a=0.2$ 일 때 끝단질량의 크기에 따른 계의 플러터 불안정 및 안정영역을 도시한 것이다. 전반적으로 끝단질량의 크기가 클수록 임계유속의 값은 작아지지만, Fig. 5(b)와 Fig. 8(b)에서 볼 수 있는 것처럼 질량비가 0.9인 경우는 그 반대의 결과를 보임을 알 수 있다. 즉, 파이프의 무차원 회전 각속도가 15인 경우 Fig. 8(a)에서는 끝단질량이 없는 경우에 비하여 끝단질량의 크기가 0.1일 때 임계유속은 약 34.1% 정도 낮아지지만 Fig. 8(b)에서는  $\mu=0.1$ 인 경우 오히려 6.5% 더 커진다.

#### 4. 결론

이 연구에서는 크랙과 끝단질량을 가지는 유체유동 회전 외팔 파이프의 안정성을 평가하였다. 즉, 크랙의 크기와 위치, 파이프와 유체의 질량비, 그리고 파이프의 회전 각속도 및 끝단질량이 계의 불안정을 유발하는 플러터 임계유속의 변화에 미치는 영향에 대하여 수치해석 하였다.

끝단질량 및 크랙의 영향과 관계없이 전 질량비 영역에서 회전각속도와 계의 플러터 임계유속은 서로 비례적인 경향을 보인다. 크랙이 존재하는 경우, 크랙의 크기는 플러터 불안정을 유발하는 모드가 변환(2차 → 3차 모드)되는 질량비를 결정하지만, 크랙의 위치는 불안정을 유발하는 다른 새로운 모드(4차 모드)를 생성한다. 또, 끝단질량의 존재는 전반적으로



로 계의 불안정을 유발하는 플러터 임계유속을 낮추는 역할을 하지만 특정 질량비 영역(이 연구의 수치 해석 예제에서는  $0.874 \leq \beta$ )에서는 오히려 그 반대의 경향을 나타내기도 한다.

이상의 연구결과들로 미루어 보아 계의 불안정을 유발하는 플러터 임계유속과 계의 각 파라미터(끝단 질량, 크랙의 크기 및 위치)들은 질량비 및 회전 각 속도의 영향으로 인하여 일관된 경향을 가지지 않음을 확인하였다. 따라서 크랙을 가진 파이프 계의 안정성을 판단하는 경우 그 계가 가진 운전 조건에 따라 적절한 파라미터를 결정하는 것이 중요하다는 것을 알 수 있다.

### 참 고 문 헌

- (1) Putter, R. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 56, No. 2, pp. 175~185.
- (2) Kane, T., Ryan, R. and Banerjee, A., 1987, "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Mase", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 10, No. 2, pp. 139~151.
- (3) Cai, G. P., Hong, J. Z. and Yang, S. X., 2004, "Model Study and Active Control of a Rotating Flexible Cantilever Beam", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 46, No. 6, pp. 871~889.
- (4) Benjamin, T. B., 1961, "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid(I. Theory)", *Proceedings of the Royal Society (London), Series A*, Vol. 261, pp. 457~486.
- (5) Païdoussis, M. P., 1998, *Fluid-structure Interactions (Volume 1)*, Academic Press.
- (6) Rao, J. S., 1996, *Rotor Dynamics (3th ed.)*, New Age.
- (7) Yoo, H., Ryan, R. and Scott, R., 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 181, No. 2, pp. 261~278.
- (8) Panussis, D. A. and Dimarogonas, A. D., 2000, "Linear In-plane And Out-of-plane Lateral Vibrations of a Horizontally Rotating Fluid-tube Cantilever", *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 14, No. 1, pp. 1~24.
- (9) Dado, M. H. F. and Abuzeid, O., 2003, "Coupled Transverse and Axial Vibratory Behaviour of Cracked Beam with End Mass and Rotary Inertia", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 261, No. 4, pp. 675~696.
- (10) Liu, D., Gurgenci, H. and Veidt, M., 2003, "Crack Detection in Hollow Section Structures through Coupled Response Measurements", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 261, No. 1, pp. 17~29.
- (11) Yang, H., Hong, J. and Yu, Z., 2003, "Dynamics Modeling of a Flexible Hub-beam with a Tip Mass", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 266, No. 4, pp. 759~774.
- (12) Yoon, H. I. and Son, I. S., 2005, "Dynamic Behavior of Rotating Cantilever Beam with Crack", *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 15, No. 5, pp. 620~628.
- (13) Chen, S. S., 1987, *Flow-induced Vibration of Circular Cylindrical Structures*, Washington: Hemisphere, Chapter 5.