한국학교수학회논문집 제 11 권, 제 4 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 11, Number 4, 609-627, December 2008

학생들의 문제해결전략 유형과 비례상황 인지와의 관계

박정숙[1)]

본 연구의 목적은 학생들의 문제해결전략 유형과 비례추론의 한 요소인 비례상황의 인지와의 관계를 탐구하기 위한 것이다. 학생들의 문제해결전략 유형은 비와 비례 과제를 실시한 결과를 근거로 가법적 유형, 승법적 유형 그리고 형식적 유형으로 나누었으며 세 차례의 면담 중 첫 번째와 세 번째에 비례상황인 것과 아닌 것을 구분하는 문제를 제시하였을 때 어떻게 분류하며 시간에 따라 어떻게 발달하는지 분석하였다. 그 결과 각 유형의 학생들은 초기에 비례상황과 그렇지 않은 상황을 구분하지 못하였으나 점차 구분할 수 있게 되었다. 그러나 정비례상황과 반비례상황을 구분하지 못하는 모습을 발견할 수 있었다. 또한 문제를 해결하는 과정에서 승법적 유형의 학생들이 더 우수하였으나 비례상황과 아닌 것을 분류하는 문제에서는 비례식 알고리즘이라는 분명한 기준을 가지고 있는 형식적 유형의 학생들이 더 우수하였다. 본 연구는 비와 비례 과제를 해결하는 것과 비례상황의 인지가 비례추론의 서로 다른 측면임을 제기하며 비례추론을 위해서는 승법적 전략과 함께 형식적 전략도 함께 이해할 필요가 있음을 보여주고 있다.

주요용어 : 비례추론, 비례상황, 가법적 전략, 승법적 전략, 형식적 전략

I. 서론

학생들의 비례성의 발달에 대해 가장 먼저 관심을 기울인 학자들은 Piaget와 그의 동료들이다. 그들은 장어의 길이와 음식의 양 사이의 관계, 양팔 저울의 평형 문제, 그림자의 크기와 물체 사이의 거리 사이의 관계, 그리고 확률의 이해 등의 다양한 문제 상황을 이용하여 비례성의 발달 단계를 구분하였다. Inhelder와 Piaget(1958)는 학생들의 비례적 사고의 특성을 단계별로 가장 먼저 밝힌 한 사람으로 두 관계 사이의 관계(이차적 관계)를 포함하는 것이 비례적 사고의 필연적인 특성이라고 하였다. 또한 비례성의 인식이 형식적 조작기 가장 초기에 획득되므로 인지발달 전반에 걸친 지표로 간주하였으며, Piaget의 연구 이래로 심리학에서는 아동이 형식적 조작기에 해당되는지 아닌지를 판단하는 하나의 근거로 비례성을 사용하였다.

Inhelder와 Piaget(1958)가 인지 전반에 걸친 지표로 비례적 사고를 제시한 것과 달리 비례적 사고를 수학적 추론의 하나로 받아들이기도 한다. Karplus, Pulos, 그리고 Stage(1983)

---

1) 서울대학교 대학원 (pjungsook@hanafos.com)

는 일차함수 관계가 존재하는 두 변수 사이에서 일어나는 추론을 특별히 비례추론이라 하였다. 또한 비례추론은 일차함수의 미정계수를 결정하는 내포적 비율을 인식하고 외연적 변수에 더해지는 값 또는 데이터로부터 계산된 내포적 변수의 두 값을 비교할 때 주어진 데이터와 관계를 활용하는 단계를 거쳐 개념화될 수 있다고 하였다. Karplus 등(1983)의 비례추론은 구체적인 수학적 상황에 한정된 추론이며 특히 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$를 만족하는 값에서 $f(x)=ax(a\neq 0)$를 인지하는 것이다.

Lesh, Post, 그리고 Behr(1988)는 비례추론을 공변과 다중 비교를 포함하는 수학적 추론의 한 형태로 여러 가지 정보를 마음속에 저장하고 처리하고 능력이라고 보았다. 비례추론은 추론, 예측과 밀접한 관련을 가지고 있으며 사고의 질적 양적 방법을 모두 포함한다. 또한 비례추론은 비율, 비, 몫 그리고 분수와 같은 유리수 표현 사이의 전체적(holistic) 관계에 대한 추론을 포함한다. 또한 비례추론을 형식 대수를 위한 예비적인 단계로 보았으며 초등수학의 정점으로 보았다. 따라서 일반적인 인지능력으로 보는 Piaget와 달리 Karplus 등(1983)과 Lesh 등(1988)은 비례추론을 수학적 추론의 일부로 보고 있음을 알 수 있다.

Lesh 등(1988)이 제기한 비례추론의 개념은 단순히 방정식의 두 변이 같음을 이해하는 것을 넘어 동치류, 변수, 그리고 변환과 같은 대수적 이해와 깊은 관련이 있음을 밝히고 있다. 그러나 Piaget의 연구 이래로 많은 연구자들이 비의 구조적인 불변을 인식하지 않고도 옳은 답을 구하는 과정을 비례추론과 구분하지 않고 막연히 적용하고 있음을 찾아볼 수 있다(Lamon, 1989). 실제로 비례식을 포함한 문제를 해결한 모든 사람들이 비례추론을 이용하는 것은 아니다. Cramer, Post, 그리고 Currier(1993)는 두 비의 동치 관계에서 유도되는 $ad=bc$와 같은 알고리즘은 비례추론이 아닌 절차적 지식으로 볼 수 있으며 이 같은 문제를 해결했다고 해서 비례추론 능력이 잘 발달되었다고 할 수 없다고 하였다. 비례상황이 아닌 경우에 비례적으로 문제를 해결하는 것도 제대로 된 비례추론이라고 할 수 없으므로, 비례추론은 다양한 문제 유형을 해결할 수 있는 능력, 비례적이지 않은 상황과 비례적인 상황을 식별하는 능력을 포함해야 한다. Post, Behr, 그리고 Lesh(1988)도 "비례추론을 잘하는 학생들은 문제의 맥락이나 숫자에 영향을 받지 않고 융통성 있게 문제를 해결할 수 있으며 비례적인 상황과 그렇지 않은 상황을 구별할 수 있어야 한다(p. 176)"고 한 바 있다.

그러나 비례추론에 관한 선행연구들(Kaput & West, 1994; Lamon, 1993; Lo & Watanabe, 1997; Singh, 2000)을 보면 학생들의 문제해결전략에 초점을 맞추고 있으며 비례상황의 인지에 초점을 맞춘 연구는 매우 부족한 실정이다. 우리나라 교육과정을 살펴보아도 비례상황의 인지 측면을 학습 목표로 하고 있는 부분을 찾을 수 없다. 비례상황은 정비례인 상황과 반비례인 상황 모두를 포함하며 관계식으로 보면 $y=ax(a\neq 0)$인 상황과 $y=ax+b(a\neq 0)$인 상황을 구분할 수 있는 것을 의미한다. 우리나라 교육과정에 따르면 초등학교 6-가에서 비와 비례에 대한 개념을 처음 학습하고 7-가에서 정비례와 반비례를 학습하며 8-가에서 $y=ax+b(a\neq 0)$의 상황을 학습하게 되어 있다. 그러나 8-가의 주요 내용은 $y=ax+b(a\neq 0)$의 특징이 초점이 맞추어져 있으므로 $y=ax(a\neq 0)$인 상황과의 구분은 주요 학습 내용이라고 볼 수 없다.

본 연구는 비례추론의 한 요소인 비례상황과 그렇지 않은 상황을 학생들이 어떻게 구분하는지 분석하였다. 좀 더 구체적으로 일반적인 비례추론의 발달 단계가 가법적 전략에서 승법적 전략으로 그 후에 형식적 전략으로 발달되는 것에 비추어 볼 때, 학생들의 문제해결전략 유형과 비례상황의 인지가 어떤 관계가 있는지 탐구할 것이다. 비례상황의 인지가 학생

들의 문제해결전략 유형에 따라 어떻게 발달하는지 분석하여 그에 따른 시사점을 도출할 것이다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 학생들의 문제해결전략 유형

비례추론은 학교에서 학습하기 이전의 직관적인 경험으로부터 보다 형식적인 학교 경험을 통해 점차적으로 발달한다. Piaget가 비례성을 총체적 능력 또는 일반적인 인지 구조의 확장으로 본 것과 달리 Lesh 등(1988)은 "점진적으로 증가하는 국소적 능력"(p. 103)라고 하였다. 즉, 초기 비례추론은 작고 한정된 문제 상황 속에서 숙달된 다음 점차적으로 보다 폭넓은 문제 상황으로 확장된다는 것이다. Piaget와 Lesh 등(1988)이 바라본 비례추론의 범위는 서로 다르지만 발달 단계는 유사한 측면이 있다.

Inhelder와 Piaget(1958)는 청소년들의 비례성에 대한 이해 능력은 (1) 포괄적인 보상 전략으로부터 자연스럽게 (2) 모든 경우로 일반화 하지 않고 승법적 전략으로 (3) 마지막 비례법칙의 형식화로 발달한다고 하였다 마지막 단계를 좀 더 상세히 설명하면 수치적 비례관계를 인식하는 단계이며 $a' = na$, $b' = nb$로부터 $\frac{b'}{b} = \frac{a'}{a}$라는 비례성을 인식하는 단계이다 (Piaget et al., 1977). Inhelder와 Piaget(1958)가 제시한 비례추론의 발달 단계는 이후 연구자들이 비례추론의 발달 단계를 연구하는데 기초가 되고 있다.

Lesh 등(1988)도 Piaget가 제시한 발달 단계와 비슷한 단계를 제시하고 있으나 발달 단계라는 용어 대신 개념화라는 용어를 사용하고 있다. 개념화 1단계는 문제에 주어진 정보를 기초로 가법적 추론을 이용하는 것이다. 단, 문제에 주어진 정보를 모두 이용하는 것이 아니라 몇 개의 정보에 한정시켜 사용한다. 개념화 2단계는 편향된 정보를 포함하고 가장 원시적인 승법적 관계를 이용한다. 개념화 3단계는 패턴을 인지하고 전 비례추론의 형태를 띠고 있다. 개념화 4단계는 진정한 승법적 비례를 이용하는 단계이나 여전히 편향된 정보에 기초하고 있다. 개념화 5단계는 명백하고 분명한 절차에 근거하여 승법적 비례를 이용하는 단계이다. 이 단계에서 처음으로 학생들은 "A 대 B는 C 대 D이다."라는 문장을 진정으로 쓸 수 있게 된다. Lesh 등이 제시한 개념화 단계는 Piaget가 제시한 발달 단계를 보다 상세히 제시하며 학생들이 사용하는 전략에 초점을 맞추고 있다.

다른 연구자들이 제시한 비례추론의 발달 단계도 Piaget가 제시한 발달 단계를 기초로 좀 더 상세히 단계를 나누거나 각 단계의 특징을 수학적 추론의 입장에서 학생들이 사용하는 문제해결 전략의 특징을 중심으로 기술하고 있다. Piaget는 학생들마다 정도의 차이는 있지만 시간이 걸리더라도 주어진 발달 단계에 따라 순차적으로 발달한다고 보았고 Lesh 등(1988)도 순차적 발달 단계임을 부인하지는 않았다. 비례추론의 마지막 단계를 살펴보면 형식적 접근으로 $a:b=c:d$를 활용하여 문제를 해결하는 것이다. 그러나 학생들이 $a:b=c:d$를 이용하여 문제를 해결했다 하여도 비 동치관계를 관계적으로 이해하고 문제를 해결하였는지 도구적으로 이해하고 문제를 해결하였는지 제시된 답만으로 판단하기는 어렵다.

본 연구에서는 Lesh 등(1988)이 학생들이 사용하는 문제해결전략에 초점을 맞춘 것에 근거하여 발달단계 대신 학생들의 문제해결전략 유형으로 학생들의 유형을 구분할 것이다. 학

생들의 유형을 상세화하지 않으면서 그 특징을 분명히 하기 위하여 학생들의 전략을 덧셈을 주로 사용하는 가법적 전략, 단위화 또는 곱셈을 주로 사용하는 승법적 전략, 비례식 알고리즘과 같은 형식적 전략으로 나누어 각 전략을 주로 사용하는 학생들을 선정하여 비례상황을 어떻게 인지하고 있는지 분석할 것이다.

2. 비례상황의 인지

Cramer 등(1993)은 비례추론을 할 수 있는 사람의 특성으로 첫째, 다양한 문제 유형을 풀 수 있어야 하고, 둘째, 비례상황과 아닌 상황을 구분할 수 있어야 하고, 셋째, 비례상황에 포함된 수학적 관계를 이해할 수 있어야 한다고 하였다. 예를 들어, "영수와 성철이의 운동장 트랙을 달리는 속도는 같다. 영수가 먼저 출발하여 9바퀴를 돌았을 때 성철이는 3바퀴를 돌았다. 영수가 15바퀴를 돌았을 때 성철이는 몇 바퀴를 돌게 되는가?"(Cramer et al., p159)와 같은 문제를 생각해보자. 이 문제에서 영수와 성철이의 속도는 같으므로 영수가 9바퀴에서 15바퀴까지 6바퀴를 도는 동안 성철이도 똑같이 6바퀴를 돌게 된다. 따라서 성철이는 9바퀴를 돌게 된다. 이러한 문제는 비례추론의 결측치 문제[2)]와 문제 구조가 동일하고 문제의 맥락도 비슷하여 많은 학생들이 문제의 의미를 고려하지 않고 비례식 알고리즘을 이용하여 문제를 해결한다.

학생들이 수 구조가 동일한 문제 상황에서 비례 관계를 적용시키는 오류는 de Bock, van Dooren, Janssens, 그리고 Verschaffel(2002a)의 연구를 비롯해 지속적으로 연구하고 있다(de Bock, Verschaffel, & Janssens, 2002b; van Dooren, de Bock, Hessels, Janssens, & Verschaffel, 2005). de Bock 등(2002a)은 확률, 닮음과 같이 다양한 영역에서 학생들이 선형성을 이용하는 것을 발견하였다. 특히 닮은 도형의 넓이와 부피의 비를 계산하는 과정에서도 길이의 비와 같은 것으로 인지하는 학생들을 보여주고 있다. van Doorren 등(2005)은 2학년부터 8학년까지 다양한 연령대의 학생들에게 비례상황인 것과 아닌 것을 구분하도록 하는 과제에서 2학년부터 5학년까지 지속적으로 무조건적으로 비례관계를 사용하는 학생들이 증가하나 6학년부터 비례상황과 그렇지 않은 상황을 인지하기 시작하는 것을 보고하고 있다. 그러나 8학년조차 여전히 비례상황을 제대로 구분하지 못하고 있다는 것을 볼 때 비례상황을 인지하는 것과 비례관계의 문제를 해결하는 것은 비례추론의 서로 다른 측면임을 짐작하게 해준다.

그러나 이 연구들은 학생들이 선형성을 과도하게 일반화하고 있음을 보여주고 있긴 하지만 학생들의 개인차를 고려하진 않았다. 실제로 비례추론의 한 요소인 비례상황의 인지를 다룬 선행 연구는 다양하지 않다. 최근 국내에서 안숙현(2008)은 5, 6, 7학년 학생들이 비례상황 문제와 비례상황이 아닌 문제에서 보이는 반응과 문제해결전략을 분석하여 학생들의 비례추론 능력을 확인하였다. 이 연구에서 정비례상황의 문제보다 반비례 문제 상황의 결측치 문제에서 학생들의 성취율은 낮게 나타났으며 정비례와 반비례를 학습한 7학년의 경우에도 여전히 낮은 성취율을 보였다. 또한 비례상황이 아닌 문제에서 약 34%의 학생들이 수 구조에 초점을 맞추어 비례 관계를 적용하는 오류를 범했다고 보고하고 있다. 안숙현(2008)의 연구도 학생들이 비례상황과 그렇지 않은 상황을 잘 구분하지 못하는 것을 밝히고 있으

2) 비례추론의 문제유형은 크게 수치비교문제와 결측치문제로 나누어지며 수치비교문제는 두 개의 비의 크기를 비교하는 문제이며 결측치 문제는 세 개의 양과 미지수가 주어졌을 때 미지수를 구하는 문제이다.

나 그 원인을 제시하지 못하고 있다.

본 연구에서는 학생들이 비례상황을 잘 구분하지 못한다는 것을 떠나 학생들의 문제해결전략 유형에 따라 비례상황을 인지하는데 어떤 특징이 있으며 어떻게 발달해 가는지 분석할 것이다.

Ⅲ. 연구방법

본 연구는 학생들의 문제해결전략 유형과 비례상황을 인지하는 능력 사이의 관계를 탐구하기 위하여 먼저 각 문제해결전략을 특징적으로 사용하는 학생들을 선정하였다. 이를 위하여 2008년 3월 초에 서울의 한 중학교 1학년 중 임의로 표집된 남학생 59명, 여학생 48명 모두 107명의 학생들을 대상으로 비와 비례 과제에 대한 설문을 실시하였다. 설문지는 비와 비례 과제에 대한 다양한 맥락과 유형을 포함시킬 수 있도록 Lamon(1993)의 의미론적 유형[3]에 따라 크게 네 가지 문제 유형으로 나누고 각각의 문제유형마다 결측치문제 두 개와 수치비교문제 한 개를 구성하여 총 12개의 문제로 구성되었다. 각 문제는 답을 구하고 그렇게 해결한 이유를 쓰도록 하여 어떤 방법으로 문제를 해결하였는지 연구자가 판단할 수 있도록 하였다. 설문에 나타난 결과에 따라 학생들의 문제해결전략은 무응답, 추측에 의한 전략, 가법적 전략, 단위화 전략, 승법적 전략, 형식적 알고리즘에 의한 전략으로 나누어 구분하였다.

1. 연구 참여자

수치비교문제는 형식적 전략에 해당하는 전략을 분명히 구분하기 어려우므로 학생들이 사용하는 문제해결전략 유형은 주로 결측치문제 8문제에 대한 응답으로 결정하였다. 네 문제 이상에서 형식적 전략을 사용하면 형식적 유형의 학생으로, 형식적 전략은 사용하지 않고 단위화 전략과 승법적 전략을 사용하면 승법적 유형의 학생으로, 네 문제 이상의 문제에서 가법적 전략을 사용하면 가법적 유형의 학생으로 구분하였다. 학생들의 동의를 받아 가법적 유형 네 명, 승법적 유형 네 명, 형식적 유형 네 명, 모두 12 명의 학생을 선정하였으나 면담을 하는 과정에서 세 번째 면담까지 끝까지 참여하지 않은 세 명의 학생을 제외한 아홉 명의 학생을 대상으로 분석을 시도하였다.

학생들의 이름은 가법적 유형에 해당하는 학생들을 차례로 가일, 가이, 가삼으로 정하였고, 승법적 유형에 해당하는 학생들을 차례로 승일, 승이, 승삼으로 하였으며, 형식적 유형에 해당하는 학생들도 차례로 형일, 형이, 형삼으로 정하였다. 구체적인 면담 대상자의 구성은 <표 1>과 같으며 남학생과 여학생의 구분은 특별히 하지 않았다.

3) 네 가지 유형으로 나누어지며 각각 양의 측정(well-chunked measures), 부분-부분-전체(part-part-whole), 관련된 집합(associated sets), 확대와 축소(stretchers and shrinkers) 유형이다.

<표 1> 면담 대상자

전략유형	가법적 유형	승법적 유형	형식적 유형
대상	가일 가이 가삼	승일 승이 승삼	형일 형이 형삼

2. 자료 수집

면담은 과제 설문의 코딩 작업과 통계적 분석이 끝난 시점인 2008년 3월 중순 이후에 실시되었다. 자료는 모두 세 차례에 걸쳐 수집되었다. 첫 번째 면담은 3월 말에 실시되었다. 면담 시간은 50분에서 60분이 소요되었다. 면담에 사용된 문제는 설문지와 동일하며 학생들이 어떻게 생각하고 풀었는지 그 이유를 설명하도록 하였다. 면담에 사용된 문항은 선행연구(Hart, 1988; Gravemeijer, Keijzer, & Galen, 2005; Lamon, 1993, 1999; Lappan, Fey, Fitzgerald, Friel, & Phillips, 1997; Noelting, 1980)를 참고하였다. 구체적인 문제의 유형 및 내용은 <표 2>와 같다. 설문지의 12문제를 어떻게 해결하였는지 질문한 후 <표 3>의 문제를 주고 문제를 분류하도록 하였다.

두 번째 면담은 4월 말부터 5월에 걸쳐 실시되었으며 <표 2>와 유사하나 구체적인 내용이나 숫자가 첫 번째 면담과는 다른 12문제를 제시하여 풀고 해결하도록 하였다. 이 시기에는 <표 3>의 문제를 제시하지 않았다. 두 번째 면담은 학생들이 비와 비례상황에 대한 문제에 좀 더 익숙하도록 하기 위한 면담이었으며 특히 가법적 유형의 학생들에게 단위화 전략을 시도할 수 있도록 유도하고 형식적 유형의 학생들에게는 문제의 의미를 생각해보도록 하기 위한 면담이었다.

<표 2> 설문지와 면담에 사용된 문제 유형 및 내용

문제 유형	번호	문제 형태	내용
관련된 집합	1-1	수치비교	구성 요소의 비 비교하기
	1-2	결측치	정수 배인 경우 결측치 구하기
	1-3	결측치	정수 배가 아닌 경우 결측치 구하기
부분-부분-전체	2-1	결측치	부분과 전체의 비 이용하기
	2-2	결측치	연비 문제
	2-3	수치비교	부분과 전체의 비 비교하기
양의 측정	3-1	결측치	거리와 시간의 비 이용하여 시간 구하기
	3-2	결측치	거리와 시간의 비 이용하여 거리 구하기
	3-3	수치비교	평균 속력 비교하기
확대와 축소	4-1	결측치	닮음비 이용하기
	4-2	결측치	축척을 이용하기
	4-3	수치비교	가로와 세로의 비 비교하기

<표 3> 면담에 사용한 문제

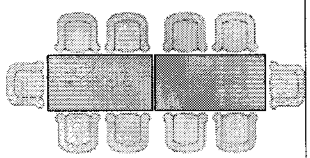
선생님께서는 늘 비슷한 유형의 문제들끼리 모아서 학생들에게 연습시킨다. 어느 날 희수는 실수로 선생님께서 유형별로 따로 분류한 문제 카드를 섞어버렸다. 다음과 같은 문제 카드가 있을 때 어떻게 분류하는 것이 가장 좋은지 분류하고 그 이유를 서술하여라.

A. 오늘 재승이는 2살이 되었고 승현이는 6살이 되었다. 재승이가 12살이 되었을 때, 승현이의 나이는 얼마인가?

B. 영철이는 빵을 굽고 있다. 10kg의 밀가루로 12kg의 빵을 만들 수 있다고 한다. 15kg의 밀가루를 사용한다고 할 때 몇 kg의 빵을 만들 수 있는가?

C. 6명의 학생이 4일 동안 어떤 일을 완성할 수 있다고 한다. 8명의 학생이 같은 일을 한다고 할 때 며칠 만에 완성할 수 있는가?

D. 학교 홀에 2개의 테이블이 놓여 있고 10개의 의자가 그림과 같이 놓여 있다. 교사들은 6개의 탁자를 같은 모양으로 놓으려고 한다. 이 탁자에 필요한 의자는 모두 몇 개인가?



E. 2판의 피자로 10명이 먹을 수 있다. 우리 학습의 학생이 모두 35명이라고 할 때 몇 판의 피자가 필요한가?

F. 기차의 길이는 5m이다. 4개의 짐차가 기차에 연결되면 17m가 된다. 8개의 짐차가 기차에 연결되었을 때 기차의 길이는 얼마인가?

세 번째 면담은 6월과 7월에 걸쳐 실시되었으며 <표 2>와 유사한 문제를 주고 해결하게 한 후 <표 3>의 문제를 그대로 주고 문제를 분류하도록 하였다. 세 번째 면담은 학생들의 문제 분류가 전략 유형에 따라 어떻게 변화하였는지 분석하기 위한 시도였다. 모든 면담 과정은 녹음하고 녹취록을 작성하였으며 녹취록과 학생들이 문제 해결 과정을 쓴 기록물 모두 분석 자료로 사용하였다.

Ⅳ. 연구결과

학생들의 면담 결과는 학생들의 문제해결전략 유형에 따라 가법적 전략을 주로 사용하는 학생들을 가법적 유형, 승법적 전략을 주로 사용하는 학생들을 승법적 유형, 형식적 전략을 주로 사용하는 학생들을 형식적 유형으로 묶어 기술하였다.

1. 가법적 유형

가법적 유형의 학생들은 비와 비례과제를 주로 차를 이용한 전략으로 해결하고 있어 사용

한 숫자가 정수배인 경우를 제외하고 대부분 비례 상황을 인지하지 못했다. 2차면담에서 단위화 전략을 유도하였으나 3차면담에서 차를 이용한 전략과 단위화 전략, 비례식 알고리즘을 이용한 형식적 전략이 나타나 여전히 발달과정 중에 있음을 보여주었다. 1차면담과 3차면담에서 비례상황을 분류하는 문제에 대해 <표 4>와 같이 답했다.

<표 4> 1차면담과 3차면담에서 가법적 유형의 학생들의 응답

학생	1차면담 분류	3차면담 분류
가일	AC/BE/DF	AE/BC/DF ⇒ AD/BE/CF
가이	AB/CE/DF	A/BF/C/DE ⇒ A/BC/DE/F
가삼	A/BCDE/F	AD/BCE/F

1차면담에서 세 명의 학생들 모두 A와 F를 서로 다른 유형으로 보고 있으며 D와 F를 같은 유형으로 생각한 학생이 2명이고 비례상황인 B와 E를 같은 상황으로 인지한 학생은 1명임을 알 수 있다. 가일은 A와 C를 묶고 B와 E를 묶고 D와 F를 묶었다. 그 이유에 대해 다음과 같이 답했다.

가일 : B하고 E하고 … D하고 F하고 …A하고 C하고
면담자 : 어떤 기준으로 묶은 거예요?
가일 : 그러니까요 얘는 10킬로그램하고 12킬로그램으로 빵을 만드는 거니까 15킬로그램의 밀가루를 사용한다고 할 때 몇 킬로그램의 빵을 만들 수 있느냐고요 E는 35명이 먹으려고 할 때 몇 판의 피자가 필요한가 하는 거고 그러니까 서로 비슷하지…그러니까 15킬로그램을요 빵을 몇 개 만들 수 있는가 하구요 35명에게 피자가 몇 개 필요한가 하고는 거의 비슷한 문제고요 D하고 F는요 얘도 계속 붙이는 거잖아요 붙여서 몇 개인가고 붙여서 몇 m인가 A하고 C는 6명의 학생이 4일 동안 어떤 일을 완성할 수 있다니까 8명이니까 어떤 것을 더해서 숫자를 더해서 구하는 거고 얘도 12살 되었을 때 승현이는 얘도 더해서 나이를 구하고 얘도 더해서 며칠에 완성하는가를 구하는 거

가일은 "몇 킬로그램의 빵을 만들 수 있는가?"라는 것과 "몇 판의 피자가 필요한가?"를 비슷한 문제 유형으로 보았다. 여기서 비슷하다는 것은 문제의 구조가 비슷한 것을 말하는 것으로 보인다. D와 F는 계속 붙여나가는 것이 비슷하기 때문에 함께 묶었고 A와 C는 모두 더해서 해를 구한다고 생각해서 묶었다. 문제에 사용된 대상을 살펴보면 B와 E는 빵과 피자에 대한 질문이므로 먹는 것과 관련되어 있고 D와 F는 가일의 말대로 문제에 사용된 대상들을 붙여나가고 있으며 A와 C는 모두 사람이 들어 있다. 즉, 문제에 사용된 대상이 유사한 것을 묶는 방식으로 문제를 분류한 것과 다르지 않다. 가일의 방법은 우연히도 A와 C를 같은 유형으로 묶은 것을 제외하고 성공적으로 문제를 해결하였다. 가이는 다음과 같이 문제를 분류하였다.

가이 : A하고 B하고 일단 묶고 C랑 E랑 그리고 이거(D)랑 이거(F)랑
면담자 : D랑 F랑요?
가이 : 네

면담자 : 왜 그렇게 묶었어요?
가이 : 어 이거는요 제 생각에 …이 문제를 풀면요 재승이가 12살이 되었을 때는 10년 후라는 거니까 얘는 16살이 되는데 이것도 그런 식으로 구하는 것 같아요 밀가루 15kg로는 …A도 같이 늘려주는 것처럼 B도 같이 늘려주는 문제인 것 같고요. C는요 A, B랑 같은 것 같기도 하고 E랑 같은지 잘 모르겠어요.

D와 F를 같이 묶은 것은 가일과 동일하며 A가 얼마를 더한 것과 같이 B도 늘어나기 때문에 같은 유형으로 묶었다. B를 늘어나는 것으로 본 것은 문제를 해결하면서 보여주었던 가법적 전략을 그대로 적용하였기 때문이다.

가삼은 처음에 모든 문제가 세 개의 양을 주고 다른 한 양을 찾는 문제라는 점에서 다 똑같은 문제로 인식하였으나 비례식으로 풀 수 있는 문제와 그렇지 않은 문제를 분류하면서 문제를 구분하였다. 그러나 비례식을 사용하여 문제를 성공적으로 해결한 문제는 거의 없었으며 C와 D는 비례식을 이용하여 문제를 해결할 수 없는 문제였으나 그것을 구분하지는 못했다.

가법적 유형의 학생들의 문제 분류 기준은 문제해결전략이 아니라 주어진 문제의 대상의 유사성이나 문제에서 느껴지는 학생의 직관을 이용하여 문제를 분류하고 있음을 알 수 있다. 이러한 전략은 2차면담에서 단위화 전략을 이해하게 되고 3차면담으로 진행되면서 조금씩 변화를 일으키기 시작했다. 3차면담에서 가일은 다음과 같이 문제를 해결하였다.

가일 : B하고 C하고 D라고 F하고 A하고 E ?
면담자 : 왜 그렇게 묶었어요?
가일 : 얘는 며칠 만에 완성할 수 있는지를 물었잖아요. B는 몇 킬로그램의 빵을 만들 수 있느냐고 물었으니까 비슷하게 보여서
면담자 : E는 어떻게 풀어요?
가일 : 한 명당 먹을 수 있는 개수를 구해요 한 명당 5분의 1 곱하기 35를 하면 7판
면담자 : A하고 E를 묶었잖아요. 푸는 방법이 비슷한가요?
가일 : A는 16살 다르네.
면담자 : 이거는 어떻게 풀었어요?
가일 : 12살이 되려면 10년 뒤니까 10을 더해서
면담자 : 애(E)는?
가일 : 하나당 먹을 수 있는 걸 구한다음 곱해서
면담자 : 애(B)는?
가일 : 10킬로니까 1킬로 당 만들 수 있는 빵이 6분의 5 곱하기 15하면 2분의 25킬로그램
면담자 : B랑 비슷한 유형이 뭐겠어요?
가일 : B랑 E
면담자 : 왜 비슷해요?
가일 : 하나당 만들 수 있는 것을 구한 다음에 곱해요

가일은 자신의 직관을 이용해서 문제를 A와 E, B와 C, D와 F를 묶었으나 실제 문제를 풀어보면서 B와 E, A와 D가 같은 문제 유형임을 확인하였다. B와 E가 같은 문제 유형임을 확인하는 전략은 단위화 전략이었고 문제를 분류하는 과정에서 2차면담에서 강조하였던 단위화 전략을 성공적으로 사용하고 있었다. A와 D를 같은 유형으로 묶은 이유는 A에서는

덧셈을 사용하고 D에서도 덧셈을 사용하고 있다는 것을 확인하였기 때문이다. 가일은 A와 D를 묶어야 할지, A와 F를 묶어야 할지 상당히 혼란스러워했으나 둘씩 짝을 지어야 한다는 생각 때문에 최종적으로 A와 D를, C와 F를 묶었다. C를 해결하는 방법에서는 B와 E를 해결하는 방법과 유사한 방법을 사용하여 정답을 구하지 못했다.

가이는 3차면담에서 $y=ax(a\neq 0)$과 $y=ax+b(a\neq 0)$을 구분하지 못하는 모습을 보였다. 가이의 면담 내용은 다음과 같다.

면담자 : D랑 E랑 왜 묶었어요?
가이 : 여기 테이블과 탁자 수를 나눌 수 있으니까 나누는 것 같아요 이거를 한 테이블에 5개씩 이것도 나누기
면담자 : 10명을 2판으로 나눈 다는 거죠?
가이 : 네
...
면담자 : A 계산할 수 있겠어요? 승현이의 나이? 몇 살이에요?
가이 : 어 … 승현이의 나이는 16살
면담자 : 16살 이죠. B는 어떻게 풀어요?
가이 : 밀가루 나누기 빵 약분하면 5분의 6이니까 곱하기 15 18킬로그램
면담자 : C는?
가이 : 어 C가 B랑 비슷한 것 같아요 6분의 4 곱하기 8
면담자 : D는 어떻게 계산해요?
가이 : … 끝 두 테이블에 5개씩 들어가고 나머지는 4개씩 들어가잖아요. 5 5 한 다음에 4개 4개 16개 26개요.

가이도 비례상황의 문제를 단위화 전략을 이용하여 성공적으로 해결하고 있으며 가법적 전략을 사용해야 할 상황에는 적절하게 가법적 전략을 이용하였으나 그 상황을 구분하지 못하는 모습을 보여주었다. 가삼은 비례식을 사용할 수 있다는 점에서 B, C, E를 묶었고 A와 D를 묶은 이유에 대해서는 "A와 D가 비슷한 것 같아요."라고 답했으나 그 이유를 제시하지 못했다. 그리고 F는 어떻게 해결해야 할지 몰라 어느 곳에도 넣지 않았다.

가법적 유형의 학생들의 특징을 보면 문제를 해결하는 능력은 1차에 비해 향상되었으나 여전히 비례상황인 것과 아닌 것을 완전히 구분하지는 못했다. 가법적 유형의 학생들이 1차 면담과 가장 많이 달라진 점은 반비례 상황인 C와 짐차를 덧붙이는 F를 제외하고 대부분의 문제를 성공적으로 해결하고 있다는 것이다. 또한 형식적 유형의 학생들이 대부분 반비례상황을 비례식을 적용하여 해결하려는 것과 달리 가삼을 제외하고는 단위화 전략을 적용하여 문제를 해결하려고 하고 있다.

2. 승법적 유형

승법적 유형의 학생들은 1차면담에서 단위화 전략과 승법적 전략을 이용하여 문제를 해결하였고 그러한 경향은 2차면담에서 그대로 유지되었다. 그러나 3차면담에서는 승일을 제외한 다른 두 명의 학생은 형식적 전략을 사용하기도 하여 형식적 유형으로 발달하는 과정 중에 있음을 보여주었다. 또한 형식적 유형의 학생들에 비해 문제를 해결하는 과정에서 오류가 적었으며 정답률도 높았다. 1차면담과 3차면담에서 비례상황을 분류하는 문제에 대해

<표 5>와 같이 답했다.

<표 5> 1차면담과 3차면담에서 승법적 유형의 학생들의 응답

학생	1차면담 분류	3차면담 분류
승일	AD/BC/EF ⇒ AF/BC/DE	AF/BC/DE ⇒ AF/BE/CD
승이	AD/BCE/F ⇒ ADE/BCF	AD/B/CE/F ⇒ AD/BE/C/F
승삼	ABCE/DF ⇒ ADF/BE/C	ADF/BE/C

승법적 유형의 학생들은 두 가지 형태로 나눌 수 있다. 승일과 승이가 유사하게 문제를 묶는 반면 승삼은 조금 다른 패턴을 보여주고 있다. 서로 다른 패턴을 보이는 이유는 학생들이 사용하는 전략에 있었다. 승일과 승이는 비례식을 알고 있으나 문제해결과정에서 거의 사용하고 있지 않으며 특히 승일은 "비례식을 사용해야 할 필요성을 모르겠다"라고 답하며 단위화 전략과 승법적 전략을 주로 사용하였다. 승삼은 승법적 전략 뿐 아니라 형식적 전략도 사용할 수 있는 학생이었으나 문제를 해결할 때는 주로 승법적 전략을 사용하여 승법적 유형의 학생으로 분류된 학생이었다. 따라서 승삼은 비례식 사용에 있어 승일과 승이보다 능숙한 모습을 보였으며 3차면담에 제시된 12문제 중 상당수를 형식적 전략으로 해결하는 경향을 보여주었다. 1차면담에서 승일은 B와 C를 묶은 이유를 다음과 같이 설명하였다.

승일 : 실제로는 보면 알 것 같은데 아 그렇게 구한 것 같아요 이게 식이 이만큼 나오면 한 개당 이만큼 나온다는 뜻이잖아요 여기(C)도 한 사람이 이만큼의 일을 할 수 있으면 24일 할 수 있으니까 1킬로니까 5분의 6킬로의 빵이 나올 수 있는 거고 15킬로의 빵을 구할 수 있는 거니까 18킬로가 나왔고 이것(C)도 한 명이 할 수 있는 일의 양 곱하기 8명하면 이렇게 하고 이거(F)는 짐차

승일은 세 차례의 면담과정에서 단위화 전략이나 승법화 전략만을 이용하여 문제를 해결한 학생이며 1차면담의 문제 분류에 나타난 모든 문제를 "한 명에 얼마~"라는 단위화전략을 사용하여 문제를 해결하였다. A와 F를 다시 묶은 이유는 둘 다 더하기를 사용하기 때문이라고 답하였으며 D와 E는 곱하기를 사용하기 때문이라고 답했다. 승이는 다음과 같이 설명하였다.

면담자 : F는 아니고 B, C, E를 묶고 그러면 F는 어디다 둘까요? 따로 둘까요?
승이 : 그냥 따로
면담자 : 왜 그렇게 생각했어요? 왜 A랑 D를 묶는 게 좋을까요?
승이 : A와 D는 정비례, B, C, E는 반비례 F는 모르겠어요.
면담자 : 그렇게? 정비례가 뭐에요?
승이 : x가 늘어나면 y도 같이 늘어나요.

승이는 정비례와 반비례에 대한 정확한 정의는 모르고 있으며 대략적인 느낌으로 어느 한 양이 증가하면 다른 한 양도 따라서 증가한다고 알고 있었다. A와 D는 "x가 늘어나면 y도 같이 늘어나는 관계"이긴 하지만 정비례 관계는 아니었고 B, C, E 중 반비례는 C가 유일하

였다. 가일과 가이는 D와 F를 모두 대상을 더하는 것으로 인지하여 같은 유형으로 생각하였으나 승일과 승이는 A와 D를 같은 유형으로 보았다. 이러한 결과는 승법적 전략을 사용하여 문제를 해결하는 것과 문제를 분류하는 것이 서로 다른 측면임을 보여준다.

승삼은 처음에 문제 A와 문제 C를 모두 비례식을 사용한다고 답하였다. 문제 A의 나이를 구하는 문제에서 $2:6=12:x$로 해결하여 36살이라는 답을 얻었고, 문제 C에서는 $4:6=x:8$로 해결하여 $\frac{16}{3}$일이라는 답을 얻었다. 그러나 면담자가 "그렇게 해결해도 되나요?"라는 질문에 문제를 다시 해결하여 문제 A는 옳게 구하였으나 문제 C는 비례식을 사용할 수 없다는 것만 이해하고 실제 답은 구하지 못했다.

3차면담에서 승삼은 1차면담과 큰 차이가 없으나 승일과 승이는 1차면담과 다른 모습을 보여주었다. 승일은 문제를 해결하는 데는 큰 어려움이 없었으나 문제 유형의 분류는 그다지 성공적이지 못했다.

면담자 : 그러면 문제를 풀어보고 분류해 보세요.
승일 : ...
면담자 : BE랑 .. 그렇게 되요? 지금 다시 묶은 게 AF는 변함이 없고요 BE 묶었고요 CD묶었죠 아까랑 왜 바뀌었어요?
승일 : 이것 보니까(AF) 더하기를 쓴 것 같고요 이것(BE)은 나누기를 쓰고요 이거는 (CD) 곱하기를 써요
면담자 : 여기(D) 더하기 있는 것은 뭐에요?
승일 : 답이 나오려면 제일 필요하다
면담자 : 여기(A)도 더하기 있고요 여기(F)도 더하기 있는데
승일 : 맨 처음에 더하기로 해가지고 x가 결정되어 가지고 x가 어떻게 곱해져 가지고 이렇게 되는 거잖아요 요거(A)는 아예 더하기만 있잖아요. 그리고 요거(B)는 맨 처음에 나누어 가지고 곱하는 거잖아요 이걸 안 나누면 몇 판인지 못 구하잖아요. 그러니까 여기는 나누기가 가장 필요한 것 같고 그리고 이것(C)도 몇 대 몇이다 이걸 나눈 거잖아요 한 마디로 여기(E)도 나누기가 제일 필요한 것 같고 여기는 나누기(D) 인데 이것 3개 이거
면담자 : 이것 3개 이거 그러니까 이렇게 하겠다는 거죠 AF 그 다음에 BCD 그렇죠?
승일 : 잠시만요 ACF 잠시 만요 아 AF BCE D
면담자 : D는 별개로 떼고 싶은 거에요?
승일 : 네

승일은 전략을 중심으로 문제를 분류하고 있음을 보여준다. 덧셈이 들어있는 문제와 나누기를 사용한 문제, 곱셈이 필요한 문제로 나누었다. 실제로 곱셈과 나눗셈은 같은 연산으로 취급될 수 있으나 그런 점을 고려하진 않았으며 C가 반비례상황이라는 점도 고려하지 않았다. 승일은 전략을 중심으로 문제를 분류하고 있음을 보여준다. 덧셈이 들어있는 문제와 나누기를 사용한 문제, 곱셈이 필요한 문제로 나누었다. 학생2a의 실제 문제 풀이 방법은 [그림 1]과 같다.

A. $2+6=12$ $10+6=16$	**B.** $5:6$ $15:18$	**C.** $\frac{4}{6}\times 8=\frac{16}{3}$ 일
D. $4\times 6+2=26$	**E.** 5명 = 1 35=7개	**F.** $5m+xm=17$ $x=12$, 12=4개의 짐차 1개=3, $3\times 8=24$ $5+24=29$

[그림 1] 승일의 문제 풀이 방법

승일의 문제 풀이 방법을 살펴보면 왜 A와 F, B와 C와 E, 그리고 D를 묶었는지 알 수 있다. A와 F는 첫줄에 더하기만 있고 B와 C와 E는 모두 곱셈으로만 이루어져 있다. 그리고 D만 곱하기와 더하기가 함께 있으므로 D만 별도로 묶었음을 짐작할 수 있다. 승일은 C가 반비례상황임을 인지하지 못하고 단위화 전략을 사용하여 문제를 해결하였고 다른 문제는 모두 옳게 해결하였다. 즉, 비례상황과 그렇지 않은 상황을 구분할 수 있으나 정비례와 반비례를 구분하지 못하는 것을 볼 수 있다.

승법적 유형의 학생들은 처음에는 직관으로 문제를 분류하였으나 실제로 문제를 해결해가면서 문제를 해결하기 위해 사용하는 전략으로 문제를 분류하고 있다. 승법적 관계에 있는 B와 E를 분명히 인식하고 있으나 덧셈으로 해결되는 문제상황을 인식하는 것을 분명히 인식하지 못하며 반비례 상황은 대부분 인식하지 못하고 있었다. 승법적 전략과 함께 형식적 전략을 융통성있게 사용하는 승삼만 성공적으로 문제를 분류하였다.

3. 형식적 유형

형식적 유형의 학생들은 비례식 알고리즘을 주로 사용하여 문제를 해결하였으며 문제의 의미를 고려하지 않고 비례식을 문제를 해결하는 도구로 사용하고 있는 모습을 보여주었다. 특히 형일은 계산 실수가 많았으며 비례식을 사용하여 문제가 잘 해결되지 않으면 가법적 전략을 사용하는 모습을 보여주었으며 형이는 비례식을 사용하나 왜 사용하는지 그 이유에 대해 "계산하기 쉬우니까"라고 답하여 2차면담에서는 문제의 의미를 생각할 수 있는 기회를 제공하였다. 형삼은 형식적 전략을 주로 사용하였지만 문제의 의미를 충분히 이해하고 있었고 승법적 전략도 사용할 수 있는 학생이었다. 1차면담과 3차면담에서 비례상황을 분류하는 문제에 대해 <표 6>와 같이 답했다.

<표 6> 1차면담과 3차면담에서 형식적 유형의 학생들의 응답

학생	1차면담 분류	3차면담 분류
형일	AC/BE/DF ⇒ AC/BEF/D	ADF/BCE
형이	AE/BC/DF	AF/BCDE ⇒ ADF/BCE
형삼	ABE/CDF ⇒ AC/BE/DF	ADF/BCE

1차면담에 나타난 형일의 응답은 가법적 유형의 가일과 1차면담의 응답과 동일하다.

면담자 : 아 A하고 C, B와 E, D와 F.. 왜 그렇게 묶었어요?
형일 : A와 C는 요 몇 명 몇 살 이렇게 해서 차이라든지 차 뺄셈 그렇게 구하는 것 같구요 B하고 E는요 몇 명에 며칠동안 이렇게 해서 같은 거 같구요 D하고 F는요 ... F랑 E랑 B랑 같은 유형이고 D는 혼자 남을 것 같은데요

형일은 처음에 A와 C, B와 E 그리고 D와 F를 묶었지만 설명하는 과정에서 F와 B와 E를 같은 유형으로 묶었고 D를 다른 유형으로 묶고 있다. 위의 설명에 따르면 문제의 분류 기준이 문제해결전략에 있는 것이 아니라 가법적 유형의 학생들과 비슷하게 문제의 대상의 유사성을 기준으로 문제의 유형을 구분하고 있음을 짐작할 수 있다. 형이는 문제 C를 비례식으로 해결하였고 문제 B와 문제 C를 같은 유형으로 묶은 이유에 대하여 "B, C는요 느낌상으로 똑같은 것 같아요."라고 답하여 비례상황과 아닌 상황을 정확히 구분하지 못하는 모습이 나타났다.

형삼은 다른 형식적 유형들과 달리 비례식을 사용하면서도 그 이유를 잘 알고 있는 학생이었으며 다음과 같이 문제를 해결하였다.

형삼 : 이거는 간단한 비례식 2대 6은 12대 x고 10대 12는 15 대 x 고 (비례식으로 묶을 수 있는 경우를 A, B, E라고 답함)
면담자 : A도 비례식으로 풀리나요?
형삼 : 아 잘못했다. 이건 너무 간단한데
면담자 : 그럼 (비례식으로 묶을 수) 있는 경우가 B, E 구요 없는 경우가 나머지 경우 4개가 모두 한 유형인가요?
형삼 : 한 유형은 아니고요 이거(A)는 더하기고 이거(B)는 비율 이거(C)는 6명이 4일 하면 한 명이 3분의 2 아닌데 2분의 3, 3분의 2 아 머리야 6명이 하루에 할 수 있는 거는 2분의 3 한 명이 할 수 있는 거는 6분의 1 한 명이 4일 동안 할 때
면담자 : 무슨 뜻일까요?
형삼 : 내가 뭐 하는 거지 6명이 4일 동안 완성할 수 있다고 한다 그러면 1명이 할 수 있는 6분의 4 그러면 4일 동안 6분의 4를 하니까 8을 곱해가지고 1일 만들면 되는데 3일
면담자 : 그런데 어떻게 묶는지
형삼 : 6명이 4일 동안 일을 하니까 24분의 1을 할 거에요 8명이 3분의 1씩 하니까 비례식 묶고 덧셈과 덧셈
면담자 : A랑 C랑요?
형삼 : A랑 C랑 묶고 D랑 F랑 묶고 나머지 B, E
면담자 : A랑 C랑 묶을 수 있나요?
형삼 : 계산을 이용하여 간단히 ...

형삼은 처음에 A를 비례식으로 해결하였으며 면담자가 재차 확인하자 잘못을 깨닫고 문제를 수정하였으며 문제 C를 $a \times b = c \times d$라는 관계를 이용하지 않고 해결하였다. 면담자가 A와 C를 같은 유형으로 묶은 것은 이해할 수 없어 다시 한 번 확인하였으나 형삼은 A와 C를 묶는 것을 이상하게 여기지 않았으며 수정하지도 않았다. 형삼의 분류 방법은 형일과 A

와 C를 같은 유형으로 묶었다는 점에서 유사하며 형이와는 D와 F를 같은 유형으로 묶었다는 점에서 공통점을 찾을 수 있다.

3차면담에서 나타난 학생들의 응답을 보면 모두 A, D, F를 같은 유형으로 인지하고, B, C, E를 같은 유형으로 인지하고 있음을 알 수 있다. 형일은 B, C, E는 비례식이기 때문에 함께 묶고 A, D, F는 몇 개를 더 붙여가는 상황이 같기 때문에 함께 묶었다. 6개의 문제 중 C와 F를 제외하고 모두 정답을 구하였으나 C가 반비례인 것은 전혀 인지하지 못했다. 면담자가 "비례식으로 풀린다는 건 어떤 관계가 있다는 건가요?"라는 질문을 던졌을 때 "똑같은 양"이라고 답해 상대적인 크기 개념이 여전히 부족한 것으로 나타났다.

형이는 A의 관계식을 $y=x+4$, B는 $y=\frac{5}{6}x$, C를 $y=\frac{2}{3}x$, D를 $y=\frac{1}{5}x$, E는 $y=5x$라고 쓰고 F를 어떻게 나타내야 할지 모르겠다고 하였다. 그렇지만 곱해서 다른 양으로 나타나는 관계가 아니므로 정비례는 아니라고 하며 A와 F를 같은 유형으로 묶었다. 면담자가 D의 경우를 그림으로 그려서 보여주자 의자가 양 끝에 2개가 붙는다는 것을 이해하고 관계식을 $y=\frac{1}{5}x+2$로 고치고 A, D, F를 같은 유형으로 묶었다. D를 A, F와 같은 유형으로 묶는 것에는 성공했지만 관계식은 옳은 관계식은 아니었다. 1차면담에서와 같이 여전히 C를 정비례로 인식하고 문제를 해결하였고 무엇이 잘못되었는지 파악하지 못했다.

형식적 유형의 학생들이 승법적 유형의 학생들보다 비례상황과 그렇지 않은 상황을 인식하는데 더 성공적인 이유는 문제의 분류의 기준이 비례식 또는 관계식에 있기 때문이다. 즉, 비례식을 비례상황을 구분하는 지표로 삼고 있어 다른 전략을 사용하는 학생들에 비해 분명한 기준을 가지고 있다는 점이 장점으로 작용한 것 같다. 실제로 승법적 학생들 중 승삼의 분류 방법은 형식적 유형의 학생들과 크게 다르지 않으며 승삼의 분류 기준 역시 비례식이었다. 따라서 비례상황의 문제를 해결하는 문제에서는 승법적 전략만으로 충분히 해결가능하나 비례상황을 인식하고 일반화하는 문제를 해결할 수 있기 위해서는 형식적 전략이 문제를 분류하는 기준이 됨을 알 수 있다.

이상과 같은 면담 결과를 정리하면 <표 7>과 같다.

<표 7> 학생들의 전략 유형에 따른 면담 결과

전략 유형	1차 면담	3차 면담
가법적 유형	· 주어진 문제의 대상의 유사성을 기준으로 문제 분류	· 기준화 전략으로 문제를 해결하며 비례상황과 그렇지 않은 상황을 구분하지 못함
승법적 유형	· 비례상황과 그렇지 않은 상황을 구분하지 못하며 승법적 전략을 문제 분류에 적용하지 못함	· 비례상황과 그렇지 않은 상황은 구분하나 정비례와 반비례를 구분하지 못함
형식적 유형	· 비례식을 문제 분류 기준으로 사용하지 못하고 문제의 대상의 유사성을 기준으로 분류	· 비례식을 문제 분류 기준으로 사용하나 정비례와 반비례 구분하지 못함

V. 결론

이상과 같은 분석을 통해 나타난 결과는 크게 세 가지로 정리할 수 있다. 첫째, 1차면담에서 대부분의 학생들이 비례상황과 아닌 상황을 구분하지 못하는 것을 미루어 볼 때 비례상황과 비례상황이 아닌 상황을 구분하는 것은 쉽지 않은 과제이다. 학생들은 비례 문제를 해결할 때 사용한 문제해결전략을 문제 분류에 활용하지 못하였으며 문제에 나타난 대상의 유사성으로 문제를 분류하려는 경향을 나타내었다. 둘째, 면담에 참여한 9명의 학생들 모두 정비례 상황과 반비례 상황을 구분하지 못했다. 3차면담에서 점차 비례상황을 구분할 수 있게 되었으나 여전히 정비례상황과 반비례상황을 구분하지 못하여 비례상황과 아닌 상황을 구분하는 것보다 정비례상황과 반비례상황을 구분하는 것이 더 어려운 과제임을 보여주었다. 셋째, 비와 비례 과제에서 승법적 유형의 학생들이 형식적 유형의 학생들에 비해 문제해결력이 우수하였으나, 비례상황의 인지면에서는 형식적 유형의 학생들이 승법적 유형의 학생들보다 성공적으로 문제를 분류하였다. 3차면담까지 진행하면서 대부분의 학생들은 면담에 사용한 문제들의 공통적인 특징으로 비 또는 비례를 떠올렸으나 비례식이라는 구체적인 기준이 있는 형식적 유형의 학생들이 문제 분류에서는 더 명확한 구분을 보여주고 있다. 형식적 유형의 학생들은 비례식 알고리즘을 사용하면서 왜 사용하는지 그 이유를 제시하지 못하고 단지 문제를 해결하는 도구로 사용하여 승법적 유형의 학생들에 비해 문제의 이해가 부족한 측면이 나타났었다. 그러나 비례상황을 인지하는 문제에서 승법적 유형의 학생들이 비례상황은 분명히 구분하나 덧셈이 포함된 상황을 인지하는데 혼란을 느끼는 것에 비해 형식적 유형의 학생들은 그러한 상황을 분명히 구분하고 있는 모습을 찾아볼 수 있었다.

비례추론에 대한 선행연구 중에는 비례식 알고리즘을 문제의 의미는 고려하지 않고 단지 문제를 해결하는 도구로만 사용하는 예를 보여주는 연구들을 찾을 수 있다. 고은성과 이경화(2007)는 초등학교 6학년 2명에 대한 사례 연구에서 대부분의 문제를 비례식을 세워 문제를 해결하나 개념들을 유의미하게 연결시키지 못하고 단순한 알고리즘으로 사용하는 예를 제시하였다. Nunez, Schliemann 그리고 Carraher(1993)는 학교교육을 받지 않은 십장들이 비례식을 학습한 학생들 보다 실제 도면의 확대와 축소 문제를 더 잘 해결하지 못하는 사례를 보여주었다. 이러한 사례들은 비례식 알고리즘이 학생들을 도구적 이해를 하도록 하는 수학적 기호이므로 문제의 의미를 강조하는 교수 방법의 필요성을 제안하였다.

본 연구에서 선행연구 결과와 유사한 모습을 형식적 유형의 학생들에게서 찾을 수 있었다. 그러나 비례상황을 구분하는데 승법적 유형의 학생 중에서는 승법적 전략과 형식적 전략이 모두 가능한 학생만이 문제를 옳게 분류하였고 형식적 유형의 학생들 모두 비례상황과 비례상황이 아닌 것을 구분할 수 있었다는 것은 비례식이 비례상황을 구분하는 지표로서 작용하였기 때문으로 해석할 수 있다. 또한 비와 비례 문제를 해결하는데 있어 형식적 유형의 학생들에 비해 성공적으로 해결하였던 승법적 유형의 학생들이 비례상황을 제대로 인지하지 못했다는 것은 비와 비례 문제를 해결하는 것과 비례상황의 인지는 비례추론의 서로 다른 요소임을 보여주는 것이며 비례상황을 제대로 인지하기 위해서는 승법적 전략과 함께 형식적 전략을 이해하고 있어야 함을 제시하고 있다.

참고문헌

안숙현 (2008). 5, 6, 7학년 학생들의 비례추론 능력 실태조사, 한국교원대학교 석사학위논문.
고은성, 이경화 (2007). 초등학교 6학년 학생의 비례추론 능력 분석 : 2명의 사례 연구, 대

한수학교육학회지 수학교육학연구, 17(4), 359-380.
Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion : Research implications. In D.T. Owens (Ed.), Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics (pp. 159-178). New York : Macmillan.
de Bock, D., van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2002a). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and irresistiBility of secondary school students'errors, Educational Studies in Mathematics, 50, 311-334.
de Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (2002b). The effects of different proBlem presentations and formulations on the illusion of linearity in secondary school students, Mathematical Thinking and Learning, 4(1), 65-89.
Gravemeijer, K.P.E., Keijzer, R. & Galen, F.H.J. van (2005). RF01: The significance of task design in mathematics education : examples from proportional reasoning. Paper presented at Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 2005.
Hart, K. (1988). Ratio and proportion. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number-concepts and operations in the middle grades (pp. 198-219). Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.
Inhelder, B. & Piaget, J. (1958). The growth of logical thinking: From childhood to adolescence. New York: Basic Books, Inc.
Kaput, J. & West, M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems : Factors affecting informal reasoning patterns. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics (pp.235-287). Albany, NY: SUNY Press.
Karplus, R., Polos, S., & Stage, E. K. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on 'rate' proBlems. Educational Studies in Mathematics, 14, 219-233.
Lamon, S. (1993). Ratio and proportion : Connecting content and children's thinking. Journal for Research in Mathematics Education, 24, 41-61.
Lamon, S. (1999). Teaching fractions and ratios for Understanding : Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. Mahwah, NJ : Lawrence Erlbaum Associates.
Lappan, G. Fey, J., Fitzgerald, W. Friel, S. & Phillips, E. (1997). Comparing and Scaling : Ratio, Proportion, and Percent, Palo Alto, CA : Dale Seymour PuBlishing Co.
Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In M. Behr, & J. HieBert (Eds.), NumBer concepts and operations for middle graders (pp. 93-118). Hillsdale, NJ: Lawrence ErlBaum Associates.
Lo, J.J., & WatanaBe, T. (1997) Developing Ratio and Proportion Schemes: A Story of a Fifth Grader, Journal for Research in Mathematics Education, 28(2), pp. 216-236.
Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept Part I -Differentiation of stages, Educational Studies in Mathematics, 11, 217-253.
Nunes, T., Schliemann, A. D., & Carraher, D.W. (1993). Street mathematics and school

mathematics. New York : CamBridge University Press.

Piaget, J., Grize, J., Szeminska, A., & Bang, V. (1977). Epistemology and psychology of functions, Castellanos, F.X. Anderson, V.D.(trans), Dordrecht: D. Reidel PuBlishing Company.

Post, T. R., Behr, M. J. & Lesh, R. (1988). 'Proportionality and the development of prealgeBra understanding', In A. Coxford & A. Schute (Eds.), The Ideas of AlgeBra, K-12, 1988 YearBook of the National Council of Teachers of Mathematics (pp.78-90). Reston, VA.: National Council of Teachers of Mathematics.

Singh, P. (2000). Understanding the concepts of proportion and ratio constructed By two grade six students, Educational Studies in Mathematics, 43, 271-292.

van Dooren, W., de Bock, D., Hessels, A.,Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional : Effects of age and proBlem type on propensities for overgeneralization. Cognition and Instruction, 23(1), 57-86.

The relationship between the students' strategy types and the recognition for proportional situations

Park, Jung Sook[4)]

Abstract

The purpose of this research was to investigate the relationship between the students' strategy types and the recognition for proportional situations. The students' strategy types which were based on the results of ratio and proportion tests were divided into an additive type, a multiplicative type, and a formal type. This research analyzed the students' activities of categorization when were given the proportional problems and nonproportional problems to the students. And it also explored how to develop students' recognizing for the discrimination between the proportional situations and nonproportional situations. The results was the following. First, the students didn't discriminate the proportional situations and the nonproportional situations in the initial state but they came to discriminate little by little. Secondly, the students didn't discriminate the direct proportions and the inverse proportions until the last stage. Third, the multiplicative type was outperformed more than the formal type in solving the ratio and proportion problems but the formal type was outperformed more than the multiplicative type in discriminating between proportional situations and nonproportional situations. These results are interpreted as showing that solving ratio and proportion tasks and recognizing proportional situations are different aspects of proportional reasoning and it is necessary to understand multiplicative strategy with formal strategy in recognizing proportional situations.

Key Words : Proportional reasoning, Proportional situation, Additive strategy, Multiplicative strategy, Formal strategy

4) Seoul National University Graduate School (pjungsook@hanafos.com)