대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 18 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 18 , No. 4, 483-497. Nov 2008

(두 자리 수)×(두 자리 수) 해결과정에서 나타나는 아동의 비형식적인 지식에 관한 사례연구

전 형 옥* · 이 경 화**

본 연구에서는 (두 자리 수) × (두 자리 수)의 곱셈에 대한 학생의 비형식적인 지식은 무엇이며, 문제 해결 과정에서 이러한 비형식적 지식의 역할이 어떠한지 분석하였다. 아직 (두 자리 수) × (두 자리 수)의 곱셈을 학습하지 않은 한 명의 3학년 학생을 대상으로 4차례의 임상면담을 실시하였고, 학생이 작성한 활동지와 행동적인 특성, 사고과정에 대한 단서 등도 자료에 포함시켰다. 아직 표준적인 알고리즘을 알지 못하는 상태에서 비형식적인 지식만으로 어떻게 문제를 해결하고 개념을 발전시키는지, 특히 어떤 유형의 비형식적인 지식을 어떤 방식으로 활용하는지 알아보았다. 관찰한 비형식적 지식은 모델화하기, 두 배하기 전략, 그리고 곱셈의 분배와 결합 성질에 대한 이해이다. 그리고 비형식적 지식은 문제 해결 과정에서 해결방법을 설명하고 정당화하는 역할을 하였다.

Ⅰ. 서 론

학생들은 초등학교 수학을 이해하는 데 기초가 되는 비형식적이거나 직관적인 많은 지식을 가지고 학교에 입학한다(Carpenter et al., 2005). 연산영역에서 아동의 비형식적인 지식에 관한 이전의 연구(Carpenter et al., 2005; Kamii, 2005; 백선수; 2005)를 살펴보면 학생들은 형식적인 교육을 받기 이전에 비형식적인 지식과 전략으로 문제를 해결할 수 있는 것으로 나타났다. 예를 들어 1학년 학생은 어떤 문제를 해결하는 과정에서 6+8의 값을 모르지만, 7+7이 14라는 사실로부터 “8에서 6에 1을 주면 7과 7이 된다. 따라서 두 수의 합은 14”라고 설명할 수 있다.

아동의 비형식적 지식은 아동의 학습을 지속시키는 매우 중요한 도구이며, 학습의 효율성이나 적절성을 결정하는 요인이다. Capenter et al.(2005)은 아동이 소유한 비형식적 지식이 중요하고, 그것이 수학 교수·학습을 위한 기초로서 사용되어야 한다고 주장하였다. Baroody & Coslick(2005)은 비형식적인 산술지식은 형식적인 계산을 이해하는 가장 중요한 기초라고 주장하였다. Ginsburg(1997)는 아동의 지적 발달을 이해하기 위해서는 아동의 일상적 환경에서의 비형식적 지식의 발달을 고려해야 함을 지적하였다. 이러한 연구들에 의하면, 아동의 비형식적인 지식은 학습의 기초이면서 동시에 아동의 학습과정을 이해하는 도구이다.

비형식적 지식에 대한 연구는 주로 수와 연산 영역에서 아동의 비형식적 지식에 대해 분

* 한국교원대학교 대학원, antree@hanmail.net
** 서울대학교, khmath@snu.ac.kr

석하고 비형식적 지식을 형식화하는 방안에 대해 논의하였다. 김진호(2002)는 비형식적 지식의 속성에 대해 고찰하고 비형식적 지식과 형식적 지식의 결합에 관한 방안을 모색하였다. 이 연구는 문헌 연구를 통하여 비형식적 지식의 속성을 파악하고 형식적 지식과의 결합에 관해 논의하였다. 백선수(2004)는 학생의 분수 영역의 곱셈과 나눗셈에서의 비형식적 지식과 형식적 지식의 연결의 중요성을 인식하고 연결 방안에 관하여 연구하였다. 이 연구는 문헌 검토를 통하여 아동의 비형식적 지식을 확인하고 그것의 형식화 방안을 모색하였다. 이종욱(2007)은 초등학교 2학년 아동 한 명을 대상으로 곱셈과 나눗셈 문제를 해결하는 과정에서 비형식적 해결 전략을 분석하였다. 이 연구는 형식적 지도를 받기 전과 받은 후의 아동의 해결 전략을 비교 분석한 것이다. 아동의 비형식적 지식을 분석하는 것의 중요성은 인식하고 있으나, 아동이 사용하는 비형식적 지식을 면밀히 분석한 연구는 부족하다.

본 연구에서는 아직 (두 자리 수) × (두 자리 수)의 곱셈을 학습하지 않은 한 명의 3학년 학생이 어떤 비형식적 지식을 어떤 방식으로 활용하는지 파악하고자 한다. 이 연구의 결과는 아동의 비형식적 지식과 형식적 지식의 결합 방식에 대한 교육적 시사점을 제시하는 한 가지 근거자료가 될 것으로 생각한다.

Ⅱ. 비형식적 수학적 지식

NCTM(2007)은 「학교 수학을 위한 원리와 규준」에서 수학학습의 본질인 이해를 강조하고 학생들이 이해와 함께 학습할 수 있음을 설명하였다. 학생들은 일상생활 경험을 통해 수, 패턴, 형상, 자료, 크기에 관하여 상당히 복잡한 일련의 비형식적 개념을 점차 발달시키며, 학교에 들어가기 전 많은 수학적 관념을 자연스럽게 배운다. 그리고 학생들은 이러한 비형식적 수학적 지식 위에 새로운 수학을 학습해 나갈 수 있으며, 이러한 학습의 형태가 개념적 이해를 촉진한다. 비형식적 지식은 학생의 일상 경험, 학습 경험을 통해 지속적으로 구성되며, 이러한 비형식적 지식은 수학을 학습하는데 적극적으로 사용되어야 한다.

김진호(2002)는 비형식적 수학적 지식의 속성을 형식적 수학적 지식인 학교 수학의 특징을 설명하면서 고찰하였다. 학교 수학은 일반적으로 수학적 개념들과 절차들로 구성되어 있으며, 지식이란 "일반적으로" 개념적인 요소와 절차적인 성질을 모두 지니고 있다는 측면에서 비형식적 수학적 지식 또한 개념적 성질과 절차적 성질로 나누어 생각해 볼 수 있다고 설명한다. 그래서 학생의 비형식적 수학적 지식을 면밀히 분석하기 위해서는 절차적인 지식뿐만 아니라 개념적 지식 측면까지 분석되어져야 한다고 논의하였다.

비형식적 지식을 정의하는 것은 쉽지 않은 일이며, 학자들의 관점에 따라 다르게 정의되어 왔다. 많은 학자들이 비형식적 지식을 아동이 학교 교육을 받기 이전에 일상생활 경험으로부터 얻은 수학적 지식이라고 정의하였다. 하지만 Becker & Selter(1996)는 비형식적 수학적 지식을 아동이 학교 밖에서 획득한 능력과 지식뿐만 아니라, 직접적인 지도 없이 학교에서 개발한 개념들을 포함한 지식으로 정의하였다. 백선수(2005)는 비형식적 지식의 정의에 관한 여러 학자의 견해를 종합하여, 비형식적 지식의 정의와 특징에 대해 고찰하였다. 그는 비형식적인 지식을 관련된 주제에 대하여 형식적인 지도를 받기 이전에 획득한 지식 즉, 학생이 실생활 경험으로부터 자연스럽게 전수 받은 지식과 사전

지식, 그리고 스스로 발명한 지식으로 정의하였다. 그는 비형식적 지식을 학교 교육을 받기 이전의 일상생활 경험으로부터 얻은 수학적 지식만으로 한정하지 않고, 학교 수학 과정에서 특정한 주제와 관련하여 형식적인 지도를 받기 이전에 획득한 모든 지식으로 설명하였다.

본 연구에서는, Becker & Selter(1996)의 관점에 따라, 아동이 특정 주제와 관련하여 형식적인 지도를 받기 이전에 소유하고 있는 지식, 그 지식은 일상생활 경험에서 또는 학교 수학을 학습하는 과정에서 터득한 지식을 비형식적 지식으로 정의한다. 이러한 비형식적 지식은 비형식적 개념 지식과 비형식적 절차 지식을 포함한다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구대상

본 연구는 아직 (두 자리 수) × (두 자리 수)의 곱셈을 학습하지 않은 한 명의 3학년 여학생을 대상으로 이루어졌다. 나영이(가명)는 광주 M초등학교에 재학 중이며, 연구에 참여하는 당시에 (두 자리 수) × (한 자리 수)의 표준알고리즘을 학습한 상태였다. 교사와 학부모 의견에 따르면, 나영이의 수학 학업 성취도는 중상위 수준, 다른 교과의 학업 성취도는 상위수준이다. 나영이는 수학 지필 평가에서 자주 단순 계산을 실수하고 수학교과에 자신감을 갖고 있지 않다고 말하였다. 나영이는 자신의 생각을 말과 글로 표현하는 데는 적극적이었다.

2. 자료수집 및 분석

한 학생이 문제를 해결하는 과정에서 보이는 비형식적 지식을 분석하기 위하여 연구자는 학생의 문제 해결 과정을 관찰하고, 학생이 문제를 해결하는 모든 과정을 비디오로 녹화하였다. 학생이 문제해결을 끝낸 뒤 면담을 실시하고 모든 면담은 비디오 녹화하고 대화내용을 전사하였다. 그리고 학생이 문제를 해결한 학습지와 해결과정을 설명하기 위해 사용한 활동지를 수집하였다.

자료의 분석은 면담과정에서 그리고 면담 종료 후에 이루어졌다. 면담 과정 중의 분석 결과를 토대로 다음 면담의 내용을 조정하였다. 면담 종료 후 분석은 학생의 전체적인 문제 해결과정과 특징을 있는 그대로 기술하는 방식으로 진행하였다. 1차 분석을 바탕으로 학생의 비형식적 지식(개념적 틀)의 관점으로 범주화하고 종합하는 분석을 시도하였으며, 전문가 2인과 연구자 1인이 함께 분석하였다.

3. 연구절차

본 연구에서는 학생의 문제 해결 과정에서 나타나는 비형식적인 지식을 분석하기 위해, 아동의 사고 과정과 논리를 면밀히 관찰하고 파악하려는 목적으로 임상면담 방법을 사용하였다(Ginsburg, 1997). 임상면담은 매 회마다 50여분씩 총 4회 실시하였으며, 일주일동안 실행하였다.

면담 과제는 문장제 형태로 1차면담에서 4문제, 나머지 면담에서는 각각 2문제씩 총 10 문제를 제시하였으며, 면담 과정에서 학생의 사고과정을 확인하고자 추가문제를 제시하였다. 곱셈 단원의 교육과정을 분석하여 (두 자리 수) × (두 자리 수)의 학습 위계를 참고하여 구성하였으며, 곱셈 상황인 동수 누가, 비율, 비교, 정렬, 조합의 문장제 상황의 유형에서 동수누가, 비율, 정렬의 문제 상황으로 구성하였다.

이는 학생의 비형식적 지식을 자연스럽게 끌어내기 위해 학생이 쉽게 접할 수 있는 실생활 장면을 구성하고자 한 것이다.

1차면담에서는 학생의 형식적 지식의 현 상황을 분석하고자 (두 자리 수) × (한 자리 수) 유형의 문장제를 제시하였다. 학생은 조합 상황의 문제를 제외하고 모든 문제를 세로셈 표준 알고리즘을 사용하여 문제를 해결하였다. 그리고 조합 상황의 문제는 곱셈상황의 문제로 인식하지 못하고 그림을 그려 문제를 해결하였지만, 문제를 정확히 해결하는 데 실패하였다. 1차면담을 통해 학생이 학교에서 형식적으로 학습한 지식은 곱셈구구, (두 자리 수) × (한 자리 수)의 세로셈 알고리즘, 곱셈과 덧셈 연산 사이의 관계에 대한 이해로 분석되었다.

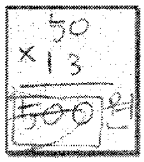
다음 면담은 학생의 (두 자리 수) × (두 자리 수) 곱셈의 문제 해결과정에서 나타나는 비형식적 지식을 관찰하고자 다음 <표 Ⅲ-1>과 같은 유형의 문제를 제시하였다.

Ⅳ. 비형식적 수학적 절차 지식

1. 모델화하기

본 연구에서의 모델화는 서찬숙, 남승인(2004)의 연구에서 언급한 바와 같이, 학생들이 문제를 해결할 때 구성한 모델(그림, 구체물, 식) 중에서 그림으로 나타내는 과정을 의미한다. 구체물과 식은 본 연구에서의 문제해결 과정에 직접적으로 관련되지 않기 때문이다. 교육과정 상에서 곱셈의 모델화 전략은 수모형을 조작하는 활동으로 지도된다. 수모형을 조작하는 활동 후에 형식적인 세로셈 알고리즘이 지도된다.

3차 면담에서 학생에게 제시한 문장제(<표 Ⅲ-1>을 참고)는 비율상황을 나타낸 것으로, (몇 십) × (몇 십 몇)과 같은 계산을 요구하는 문제이다. 학생은 50×13을 해결하기 위해, 곧바로 [그림 Ⅳ-1]과 같이 50×13을 세로셈으로 표현한 후 계산하였다. 학생은 (두 자리 수) × (한 자리 수)의 계산을 세로셈으로 해결하는 방법을 이전에 학습하였으며, 세로셈으로 계산하는 것이 쉬운 방법이라고 설명하였다. 그러나 학생은 [그림 Ⅳ-1]과 같이 500이라는 답을 얻었다. 학생이 해결한 답에 확신을 갖고 있지 못한 상황에서 면담자는 다른 방법으로 해결해 보도록 요구하였다.

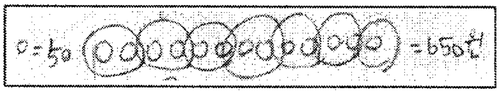


[그림 Ⅳ -1]

<표 Ⅲ - 1> 면담 과제 예시

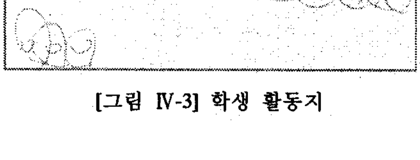
면담	과제	상황
2차	나영이는 반 친구들에게 사탕을 주려고 슈퍼에서 사탕을 10봉지 샀습니다. 집에 와서 보니 사탕은 한 봉지에 13개씩 들어있었습니다. 나영이는 자신이 가진 사탕이 모두 몇 개인지 궁금했습니다.	동수누가
3차	나영이는 교회의 달란트 시장에서 예쁜 스티커를 샀습니다. 스티커는 1장에 50원입니다. 나영이는 스티커를 13장 샀습니다. 나영이가 스티커를 사기위해 쓴 달란트는 얼마일까요?	비율
4차	나영이는 봄소풍을 다녀왔습니다. 나영이반 친구들은 2명씩 18줄로 줄을 지어 버스에 올라탔습니다. 나영이반 친구들은 모두 몇 명일까요?	정렬

학생은 [그림 Ⅳ-2]와 같이 동그라미를 13개를 한 줄로 그리고 두 개씩을 묶어 표현하였고, 처음과는 다른 답인 650을 얻었다. 학생은 한 장의 스티커를 동그라미 하나로 표현하고 그것이 50과 같음을 [그림 Ⅳ-2]에서처럼 등호 기호를 사용하여 표현하였다.



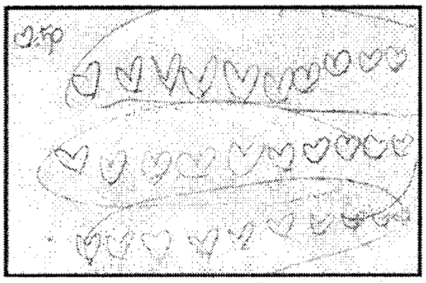
[그림 Ⅳ-2] 학생 활동지

면담자는 처음 방법, 곧 세로셈을 활용한 방법과 나중의 방법, 곧 그림으로 모델화한 방법 중 어떤 것이 더욱 정확하다고 생각하는지를 물었다. 학생은 그림으로 나타내어 해결한 답이 정확하다고 생각하였다. 특이할 만한 점은 학생이 답을 구하고 난 후에도 문제에 대한 탐구 활동을 멈추지 않았다는 것이다. 면담자가 요구하지 않았음에도 불구하고, 자발적으로 자신이 처음 해결한 방법인 세로셈의 계산에서 무엇이 잘못되었는지를 다시 확인하기 시작하였다. 학생은 [그림 Ⅳ-3]과 같이 다시 50 × 13을 표현하였다. 이 모델화는 [그림 Ⅳ-2]와 달리 동그라미 10개를 한 줄에 표현하고 나머지 3개를 다른 줄로 표현한 것이다. 이 표현 속에는 학생이 13을 10과 3으로 나누어 생각하려는 의도를 담고 있다. 13을 10과 그 나머지로 표현한 것은 학생이 기존에 가지고 있는 자리값 개념이 반영된 것이다.



[그림 Ⅳ-3] 학생 활동지

학생은 다음 면담에서도 문제(50×30) 상황을 [그림 Ⅳ-4]과 같이 모델화하였고, 이 모델화에서도 학생의 자리값 개념의 반영을 볼 수 있다. 학생은 하트 모양을 50이라는 단위로 보고, 한 줄에 10개씩 3줄을 표현하고 10개씩을 한 묶음으로 다시 묶어 나타내었다.



[그림 Ⅳ-4] 학생 활동지

50 × 13을 세로셈 알고리즘으로 해결하려는 시도는 학생이 학교에서 받은 형식적인 지도의 결과이다. 하지만 형식적 지식인 세로셈 알고리즘은 (두 자리 수) × (한자리 수)에서 (두 자리 수) × (두 자리 수)로 자연스럽게 전환되지 못하였다. 학생은 세로셈 알고리즘을 바르게 적용하지 못하였고, 결국 50 × 13을 잘못 구하게 되었으며, 그림을 이용한 모델화 결과와 비교하여 자신의 오류를 확인하였다. 여기서 중요한 것은 학생이 세로셈 알고리즘에 따른 해결 과정에 어떤 문제가 있는가를 왜, 어떻게 주목하게 되었는가 하는 점이다. 특히 알고리즘 자체를 맹목적으로 믿고 적용하는 것이 아니라 그림을 이용한 모델로 검증하려고 했다는 점은 학생의 비형식적 지식에 대한 관점, 비형식적 지식의 활용 방식을 드러내는 좋은 계기로 보인다. 또, 문제의 답을 구하기 위해 사용한 모델화와 알고리즘을 이해하기 위해 사용한 모델화가 다르다는 것이다. 답을 내기 위해 사용한 모델화는 계산을 편하게 하기 위해 50을 두 개씩 묶어 100으로 만드는 과정에 따른 반면, 알고리즘을 이해하기 위해 사용한 모델화

는 13을 자리값에 따라 10과 3으로 나누어 표현한 것이다. 이는 세로셈 알고리즘의 적용과정에서 자리값의 의미를 바르게 이해하고 활용해야 한다는 것을 학생 스스로 발견하였다는 간접적인 증거가 되기도 한다.

2. 두 배하기 전략

학생은 모델화하기 전략을 사용하는 과정에서 두 배하기 전략을 함께 사용하였다. 먼저 두 자리 수와 한 자리 수 사이의 곱을 위해 학습한 세로셈 알고리즘을 이용했으나, 그 답의 정확성에 대한 확신을 갖지 못하자 다른 전략을 생각해내었다. 학생은 앞서 이미 확인한 바와 같이 시각적인 모델을 활용하여 [그림 IV-2]와 같이 표현하였다. 여기서 학생이 50 × 13을 계산하기 위해 두 배하기 전략을 사용했다는 것을 알 수 있다. 50을 두 배하면 100이 되고, 그러면 계산을 간편하게 수행할 수 있음을 직관적으로 통찰하여 활용하고 있음을 알 수 있다.

다음 발췌문과 같이 면담 과정에서 이 학생은 문제 해결 방법을 설명하면서 50을 두 번 더하여 100을 만들어 더하면 더 정확하게 답을 구할 수 있다고 말하였다. 두 배하기 전략 중에서도 십진기수법의 자리값 개념과 직결되는 수를 직접 찾아냈다는 점이 특이할 만하다. 한편, 이 학생이 불확실한 세로셈 알고리즘을 이용하여 답을 구한 후, 다시 다른 계산 방법을 생각해냈다는 것은 계산에 있어서의 유창성을 보여준 것으로 생각할 수 있다. Susan Jo Russell(2000)은 계산에 있어서 유창성의 세 가지 특징을 효율성, 정확성, 융통성이라고 설명하였다. 그리고 유창성은 성질과 관계를 잘 이해하는 것을 바탕으로 한다고 주장하였다. 유창성의 측면에서 이 학생의 두 배하기 전략을 평가하면, 계산을 정확하고 빠르고 유연하게 할 수 있어야 한다는 판단과 계산 구조에 대한 통찰, 효율성을 고려한 접근을 시도한 것으로 볼 수 있다. 이는 이 학생이 곱셈과 덧셈의 연산 사이의 관계와 곱셈의 연산의 성질을 이해하였기 때문에 가능한 것으로 판단된다.

나영: (그림으로 표현하여 푼다. 동그라미 하나를 50원이라고 표현한다. 동그라미를 13개를 그리고 두 개씩 묶어가며) 100, 200, … 500, 음? (잠시 멈칫한다) 600, 650 (답이 다르게 나오니까 다시 세로셈을 점검한다.)

면담자: 세로셈으로 문제를 풀었고, 그림으로 풀었어. 무엇이 정확하다고 생각해

나영: 그림. 세로셈은 식을 계산하는데 틀릴 수도 있는데, 13장을 샀으니까 동그라미 하나를 50원으로 하고 13개 하고 두 개씩 묶으면 백원이니까 그게 더 쉬우니까 이렇게 하면…

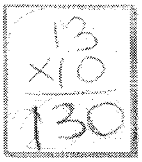
V. 비형식적 수학적 개념 지식

1. 곱셈의 분배법칙에 대한 비형식적 이해

초등학교 3학년 학생들은 아직 곱셈의 분배법칙에 대한 학습을 하지 않은 상태이다. 그러나 이 학생의 경우 문제 해결 과정에서 이를 사용하여 문제를 해결하였다. 2차면담에서 학생에게 제시한 문장제(<표III-1>을 참고)는 동수누가를 나타낸 상황으로, (몇 십 몇) × (십)의 한 예인 13×10을 계산하는 문제였다.

학생은 (두 자리 수)×(한 자리 수)를 계산하기 위한 표준 알고리즘을 이미 학습한 상태였지만, 앞서 확인한 바와 같이 이를 (두 자리 수)×(두 자리 수)로 정확하게 전이시키지는 못

하였다. 그러나 2차 면담에서는 [그림 V-1]과 같이 세로셈 알고리즘을 이용하여 문제를 해결하였다. 면담자는 학생에게 해결한 방법을 설명하도록 요구하였다. 학생은 왜 그렇게 계산했는가에 대한 정확한 설명을 하지 못하여 당황하였다.

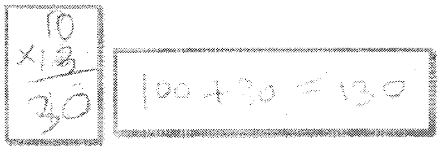


[그림 V-1]

면담자는 학생에게 계산한 값이 정확하다고 확신하는지를 물었다. 학생은 자신없는 표정이었으며, 그 답이 정확한지를 확인하기 위해 다른 방법을 사용하여 문제를 해결하였다. 학생의 두 번째 계산 방법은 13을 10번 더하는 방법이었다. 학생은 13을 10번 더하는 과정에서 계산을 실수하였고 그 결과 230이라는 답을 얻었다. 세로셈 알고리즘을 적용하여 얻은 답과 다른 답을 얻자 학생은 세로셈의 계산값을 230으로 고쳤다.

정확한 값을 얻게 한 세로셈을 신뢰하지 못하는 학생은 두 번째 해결 방법으로 얻은 오답을 더 확신하게 되었고, 다시 면담자가 이번에는 답을 확신하는지 묻자 적어도 세로셈 알고리즘보다는 답을 신뢰하는 것으로 보였다. 학생은 다시 세 번째의 방법으로 문제를 해결하였고, 다음 발췌문과 같이 설명하면서 [그림 V-2]와 같이 기록하였다.

나영: (계속 생각 중인 듯 면담자의 질문에 답을 하지 않고 설명해 나간다)10은 나두고....3을 일단 10을 곱한 다음에 ....130(식으로 표현하며) **13×10에서 3과 10을 곱하고 10과 10을 곱하면 100이니까** (100+30=130이라고 쓴다)



[그림 V-2]

세 번째 얻은 답을 학생은 가장 정확하다고 확신하였고, 다시 세로셈의 230을 130으로 수정하였다. 학생은 두 번째 방법인 동수누가에서 왜 다른 답이 나왔는지를 살펴보고 계산이 틀렸음을 확인하였다. 학생은 정확하다고 확신하는 답을 얻은 후, 세로셈에 그 답을 쓰고 어떻게 계산을 하면 130을 얻을 수 있는지를 스스로 탐색하였다.

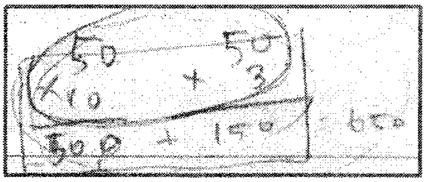
현재까지의 진행과정과 그 의미를 요약하면 다음과 같다. 학생은 문제를 해결하는 첫 번째 방법으로 이전에 학습한 표준 알고리즘을 사용하였다. 하지만 표준 알고리즘을 정확하다고 확신하지 않았다. 그리고 두 번째 방법으로 곱셈과 덧셈 연산 사이의 관계를 사용하여 시각적으로 모델화하여 계산하였다. 하지만 13은 더하기가 까다로운 수였고, 학생은 계산하는 데 많은 시간을 소비하였으나 틀리게 계산하여 정확한 답을 얻는데 실패하였다. 세 번째 방법으로 학생은 곱셈의 분배의 성질을 사용하여 문제를 해결하였다. 13×10에서 13을 10과 3으로 분배하고, 10과 10의 곱은 암산으로 계산하고 10과 3은 표준 알고리즘으로 계산하여 두 값을 더하여 문제를 해결하였다. 이 과정을 식으로 표현하면, $13\times10=(10+3)\times10 \;=(10\times10)+\;(3\times10)=100+30=130$ 이다. 이 과정에서 중요한 점은 학생이 계산한 첫 번째 방법과 두 번째 방법은 모두 곱셈을 배우는 과정에서 형식적으로 학습한 것이고, 세 번째 방법은 전혀 학습하지 않은 내용이라는 점이다. 세 번째 방법에 대해서는 자연스럽게 사용하면서도 왜 그렇게 되는지 잘 모르고 있다. 하지만 학생은 세 번째 방법을 통해 얻은 답에

가장 큰 확신을 표현하였다.

학생은 세 번째의 방법으로 문제를 해결하고 답에 확신을 갖는 것으로 끝내지 않았다. [그림 Ⅴ-3]와 같이 세로셈을 표현하고, 자리값에 따라 숫자들 옆에 십, 일이라는 글자를 썼다. 이것은 표준 알고리즘이 자리값과 관련이 있음을 스스로 발견하고 이해해보려는 시도이다. 그래서 면담자는 학생이 (두 자리 수)×(두 자리 수)의 알고리즘을 터득하였는지를 확인하기 위해, 학생에게 13×12를 계산하게 하였다. 학생은 여전히 (두 자리 수)×(두 자리 수)의 알고리즘을 완벽하게 터득하지 못하였다. 하지만 학생은 분배의 법칙을 사용하여 문제를 해결하면서 스스로 표준 알고리즘을 자리값과 연결시켜 사고하는 발전을 보였다.

[그림 Ⅴ-3]

곱셈의 분배성질에 대한 이해를 통해 문제를 해결한 사례는 면담 과정에서 반복하여 관찰되었다. 3차면담에서 학생은 곱셈의 분배의 성질을 사용하여 문제를 해결하였다. 이 때 학생에게 제시한 문제는 50×13(<표 Ⅲ-1>을 참고)이다. 학생은 모델화 전략을 통해 50×13을 [그림 Ⅳ-3]과 같이 10개를 한 줄에, 나머지를 다른 줄에 표현하였고 이것은 13의 자리값에 따라 10과 3으로 분배하였다. 그리고 난 후, [그림 Ⅴ-3]과 같이 세로셈을 계산하여 답을 구하였다. 여기서 중요한 점은 [그림 Ⅴ-3]의 세로셈에서 밑수인 13을 분배하여 계산하였다는 것이다. 학생의 곱셈의 분배법칙에 대한 비형식적 이해가 학생의 사전 지식인 (두 자리 수) × (한 자리 수)의 표준 알고리즘을 적절하게 사용하고 확장하는 데 원동력이 되었음을 알 수 있다.



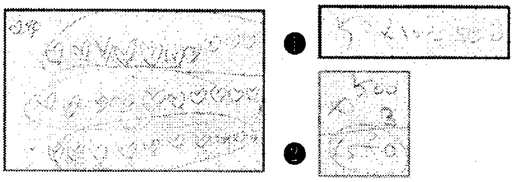
[그림 Ⅴ-3] 학생 활동지

2. 곱셈의 결합법칙에 대한 비형식적 이해

초등학교 3학년 학생은 곱셈의 결합법칙을 아직 모른다. 3차면담에서 학생에게 제시한 문장제는 비율상황의 문제로, (몇 십)×(몇 십)인 50×30을 계산하는 문제였다. 학생은 문제를 해결하기 위해 [그림 Ⅴ-4]와 같은 그림을 그렸다. 이 그림의 특징은 50을 단위로 하는 하트 모양을 한 줄에 10개씩, 3줄로 표현하였다는 점이다. 학생은 이 그림을 보면서, 1단계로 50×10=500을 계산하고 2단계로 500×3= 1500을 계산하였다. 이 과정을 하나의 식으로 표현하면, 50×30 = 50×(10×3) = (50×10)×3으로 표현할 수 있다. 이것은 곱셈에 대한 결합법칙을 사용한 것이다.

학생은 곱셈의 결합법칙을 의식적으로 인식하고 있지 않으며, 왜 그것이 성립하는지를 알지 못하는 것으로 보였다. 하지만 학생은 자신이 표현한 그림을 통해 직관적으로 곱셈의 결합의 성질을 사용할 수 있었다. 그럼에도 불구하고 (두 자리 수) × (한 자리 수)의 표준 알고리즘이 (세 자리 수) × (한 자리 수)를 계산하는 데는 자연스럽게 전이가 되나, 여전히 (두 자리 수) × (두 자리 수)의 계산에는 자연스럽게 전이되지 못하고 있었다. 이 때 곱셈의 결합법칙에 대한 비형식적 지식은 기존의 지식, 즉 형식적 알고리즘을 사용할 수 없는 상황을 극복할 수 있게 하였다. 이것은 학생의 비형식적 지식이 새로운 학습의

기초가 될 수 있음을 보여준다.



[그림 V-4] 학생 활동지

VI. 문제 해결 단계에서의 비형식적 지식의 역할

이 연구를 위한 임상면담에 참여한 학생이 문제를 해결한 단계를 추측하기, 정당화하기, 수정하기 단계로 나누어 볼 수 있다. 각 단계에서 학생의 비형식적 지식은 중요한 역할을 했던 것으로 생각된다. 이하에서는 비형식적 지식의 역할에 초점을 둔 분석결과를 제시하고자 한다.

1. 추측하기 단계

학생은 사전지식, 즉 (두 자리수) × (한 자리수)의 표준 알고리즘을 사용하여 문제를 해결해 보는 것으로 시작하였다. 이 때 학생은 표준 알고리즘을 정확히 적용하지 못하였고, 단지 표준 알고리즘을 활용하여 답을 추측한 것에 해당된다. 그러나 (두 자리 수) × (한 자리 수) 계산을 위해 습득한 표준 알고리즘은 (두 자리 수) × (두 자리 수)를 계산하는데 불완전하게 전이되었다. 예를 들어 50×13을 50×10과 0×3을 구하여 더하는 과정으로 계산하였다.

학생은 표준 알고리즘이 곱셈을 하는 가장 쉬운 방법이라고 설명하였고, 자발적으로 모든 문제를 (두 자리 수) × (한 자리 수)의 표준알고리즘을 사용하여 계산하였다. 그러나 그 결과에 대해 확신을 갖지는 않았으며, 해결과정을 설명하는 것도 어려워하였다. 2차면담에서 13×10의 답으로 130이라는 정확한 답을 얻어내었음에도 불구하고, 학생은 그 결과에 확신을 갖지 않았고 해결방법을 설명하지도 못하였다. 학생은 자신이 알고 있는 방법, 즉 표준 알고리즘을 사용하여 (두 자리 수) × (두 자리 수)의 곱을 해결할 수 있는지를 계속 시도하였다. 이와 같이 기존에 알고 있는 지식을 이용하여 추측하고, 그 추측의 내용과 결과에 대한 확신이 부족한 상태에서 비형식적 지식을 이용하여 다음 단계로 이동하는 학생의 모습을 확인할 수 있었다.

2. 정당화하기 단계

학생이 (두 자리 수) × (두 자리 수)의 표준 알고리즘을 확신하지 못하고 해결한 방법에 대해서도 정확히 설명하지 못한 것은 아직 형식적인 학습을 하지 못하였기 때문이다. 학생은 답의 정확성을 확인하고 평가하기 위해 스스로 또는 연구자의 요구에 따라 다른 방법으로 문제를 해결하였다. 학생은 대안적인 방법을 사용하여 해결한 답에 대해 확신을 갖고 그 해결 방법을 명쾌하게 설명하였다. 초기의 방법의 정확성을 점검하기 위해서, 그리고 문제의 해결 방법을 설명하기 위해서 대안적인 방법을 선택하였다. 학생의 비형식적 지식은 다양한 대안적인 해결 방법을 만드는 데 결정적인 역할을 하였다.

2차면담에서 학생은 13×10을 해결하였다. 처음에는 사전 지식에 의해 재구성한 표준 알고리즘을 사용하여 130이라는 정확한 답을 얻었다. 하지만 학생은 그 표준 알고리즘의 결과에 확신을 갖지 못했고 계산 과정을 자신 있게 설명하지 못했다. 그 답이 정확한지를 평가하기

위해 제 2의 방법, 즉 시각적 모델링을 통한 동수누가의 방법으로 문제를 해결하였다. 학생은 계산 과정에서 실수를 하였지만, 처음의 답인 130보다 두 번째의 답인 230을 더 정확하다고 생각했다. 그 이유는 학생이 곱셈과 덧셈 연산사이의 관계에 대한 이해를 바탕으로 해결한 답이기 때문이다. 학생은 곱셈은 똑같은 수를 여러 번 더하는 것을 쉽게 하기위해 만든 것이므로, 13×10은 13을 10번 더하는 것과 똑 같다고 설명하였다.

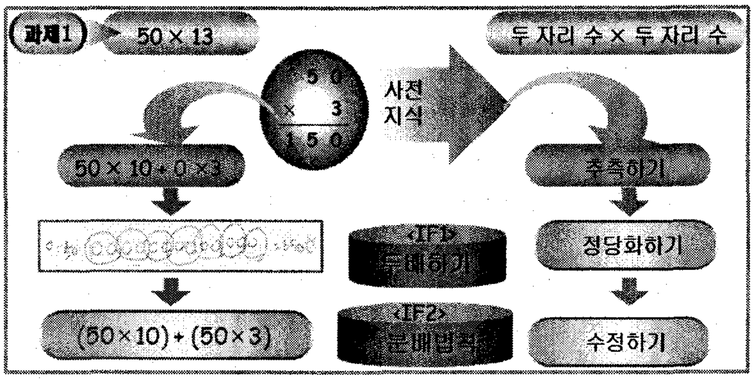
여기서 주목해야 할 점은 학생이 자신의 이해를 바탕으로 하여 만들어낸 비형식적 지식에 기초한 해결 방법을 더욱 신뢰하였다는 것이다. 230을 답으로 선택하였으나 그것의 정확성을 확신하지 못한 학생은 세 번째 방법, 즉 곱셈의 분배법칙에 대한 비형식적 이해를 바탕으로 문제를 해결하였다. 학생은 세 번째의 방법으로 얻은 답이 옳다고 확신하였다. 학생은 문제를 해결한 방법을 설명하면서 곱셈의 분배법칙에 대한 비형식적 이해를 나타냈다. 학생의 비형식적 지식을 사용한 해결방법은 표준 알고리즘으로 해결한 방법과는 달리 학생의 수학적 이해를 반영하고 있다. 이것은 수학 학습에서 학생의 비형식적 지식이 어떻게 활용되어야하며, 비형식적 지식의 활용이 왜 중요한가를 암시한다.

3. 수정하기 단계

학생은 자신의 초기의 답을 수정하고 해결과정을 정당화하는 것에 머무르지 않았다. 초기의 답을 수정한 후, 학생은 자신이 이전에 습득한 (두 자리 수) × (한 자리 수)의 표준알고리즘을 수정 보완하고자 노력하였다.

3차면담에서 학생은 50×13을 [그림 Ⅳ-2]와 같은 방법으로 모델화하여 해결하여 자신의 초기의 답을 수정하였고 해결과정을 정당화하였다. 학생은 여기서 멈추지 않고 다시 [그림 Ⅳ-3]과 같이 다른 방법으로 모델화를 하였다. 이 모델화는 자리값을 기준으로 하여 한 줄에 10개를 표현하고 줄을 바꾸어 나머지를 표현하는 방식이다. 이 모델화는 학생이 표준 알고리즘이 자리값과 관계가 있으며, 곱하는 수 즉 세로셈에서 밑수를 분배하여 곱해야 함을 인식하는 데 바탕이 된다.

학생은 다른 문제의 해결에서도 이러한 과정을 계속 반복하였다. (두 자리 수)×(두 자리 수)의 표준 알고리즘을 명확히 표현하는 것은 성공하지 못하지만, (두 자리 수) × (두 자리 수)의 곱을 해결하기 위해서는 곱하는 수를 분배하여 곱한다는 것을 스스로 터득해 나갔다. 여기서 주목할 점은 학생의 비형식적 지식이 초기의 표준 알고리즘을 수정하는 데 결정적인 역할을 하였다는 것이다.



[그림 Ⅵ-1] 문제 해결 단계에서의 비형식적 지식의 역할

Ⅶ. 비형식적 지식의 역할

학생의 비형식적 지식에 대해 분석하는 목적 중 하나는 비형식적 지식과 형식적 지식이 어떻게 연결되는가에 대한 정보를 얻는 것이다. 비형식적인 지식에 관한 선행연구들에서는 비형식적 지식과 형식적인 지식의 연결이 매우 중요하다고 하였으나, 그 메카니즘 또는 비형식적 지식의 역할에 대해서는 자세히 논의하지 않았다. 본 연구에서는 학생이 문제 해결과정에서 불완전하게 확장하여 적용한 형식적 지식의 한계를 깨닫고, 자신의 비형식적인 지식을 활용하여 어떻게 형식적인 지식으로 나아가는지 그 과정에 대해 확인하였다.

수와 연산의 곱셈 영역에서 학생이 기존에 가지고 있는 형식적 지식은, 1의 곱과 0의 곱을 포함한 곱셈구구, 곱셈의 의미, 덧셈과 곱셈 연산사이의 관계가 포함된다. 또, (두 자리 수) × (한 자리 수)의 표준 알고리즘, 자리값 개념, 위치적 기수법도 이 연구에 참여한 학생이 소유한 형식적인 지식이었다.

본 연구에서 분석한 학생의 비형식적 지식을 정리하면, 비형식적 절차 지식은 모델화 전략과 두 배하기 전략이며, 비형식적 개념 지식은 곱셈의 분배, 결합, 교환의 법칙의 이해이다. 학생은 13×10을 해결하는 과정에서 곱셈의 분배법칙을 사용하였다. 13을 10과 3으로 분배하는 것은 학생의 자리값 개념을 바탕으로 하는 것이다. 그리고 학생은 특정한 곱셈구구(10×10=100)에 대한 지식으로 지필 계산을 하지 않고 10과 10의 곱은 100임을 알았으며, (두 자리 수) × (한 자리 수)의 표준 알고리즘을 사용하여 10×3(<표 Ⅴ-1>)을 계산하여 답을 구하였다.

3차면담에서 50×13을 해결하면서 사용한 모델화 전략(비형식적 절차 지식, [그림 Ⅳ-2])은 두 배하기 전략(비형식적 절차 지식)과 함께 연결되어 나타난다. 이 과정에서도 학생의 형식적 지식과의 연결을 살펴볼 수 있다. 먼저 학생은 50을 두 번씩 묶어 100만들었다. 만들어진 100들을 더해가며 문제를 해결하였다. 이러한 비형식적 전략은 곱셈과 덧셈 연산사이의 관계에 대한 이해를 바탕으로 가능한 것이다. 또 다른 모델화([그림 Ⅳ-3])은 10개를 한 줄로 표현하고 나머지를 다른 줄에 표현한 것이다. 이것은 모델화를 자리값을 기준으로 표현한 것으로 자리값 개념(형식적 개념 지식)이 반영된 것이다. 50×10=500은 10의 곱의 규칙(N×10=N0-면담과정에서 인식된 비형식적 절차 지식)을 사용했으며, 500×3은 표준 알고리즘을 사용하여 계산한다.

학생은 문제를 해결하는 과정에서 때로는 비효율적이며 정확하지 않은 형식적 지식을 사용하였다. 그러나 곱셈과 덧셈 사이의 연산 사이의 이해와 자리값 개념은 다양한 비형식적 지식(예를 들어 모델화 전략 사용하기, 두 배하기, 곱셈의 분배 성질과 결합 성질의 사용)을 사용하는데 기반 지식으로 작용하고 있다. 그 이외에도 형식적 지식, 비형식적 지식 모두에 바탕이 되는 가장 근본이 되는 것은 학생의 곱셈적 사고이다. 단위에 대한 사고인 곱셈적 사고는 50×13에서 50이라는 단위를 100으로 만들고 100을 단위로 다시 사고할 수 있게 하였고, 또 50×30에서 50을 단위로 시작하여 10개씩 묶어 500으로 만들고 500이 다시 새로운 단위가 되어 3을 곱하여 1500이 된다는 사고를 가능하게 한 것이다.

요컨대, 학생이 아직 형식적인 학습을 하지 않은 (두 자리 수) × (두 자리 수) 계산을 해야 할 때, 이 학생은 이전에 학습한 (두 자리 수) × (한 자리 수)를 위한 표준 알고리즘을 적용하는 것으로 시작하였다. 그러나 이 지식은 적절하게 전이되지 않았고, 학생 역시 적절성에

대한 확신을 갖지 못하였다. 학생은 이를 극복하기 위해 다양한 비형식적 전략, 곧 모델화 전략, 두 배하기 전략, 곱셈에 대한 분배법칙, 결합법칙, 교환법칙을 사용하였다. 이들 비형식적 전략은 형식적 지식이 보다 확장된 영역에서 성립될 수 있는 형태로 적절하게 전환될 수 있도록 촉진하는 역할을 하였으며, 적절하지 않게 적용된 부분을 찾아 수정하게 하는 판단 준거로서 작용하였다.

Ⅷ. 결론 및 논의

본 연구는 한 명의 초등학교 3학년 학생을 대상으로 (두 자리 수) × (두 자리 수) 문제 해결 과정에서 나타나는 비형식적 지식은 무엇이고, 학생이 도전적인 문제 해결 과정에서 겪는 어려움을 극복하는 국면에서 비형식적 지식의 역할은 무엇인지를 알아보았다.

본 연구에서 관찰된 비형식적 지식은 모델화 전략, 두 배하기 전략, 곱셈 연산의 분배, 결합법칙에 대한 비형식적 이해이다. 이 비형식적 지식은 문제를 성공적으로 해결하는 데 강력한 역할을 하였다.

첫째, 학생의 모델화 전략은 (두 자리 수) × (두 자리 수)를 해결하는 데 가장 중심적인 역할을 하였다. 곱셈 문제 장면을 모델화하는 것은 다양한 방식이 아닌 정렬 형태의 방식으로 일관되게 나타나고 있으나 문제와 계산하려는 수에 따라서 다르게 정렬되기도 하였다. 그러나 학생은 10을 기준으로 정렬되는 그림을 규칙적으로 사용하여 문제를 해결하였고 이것은 학생의 자리값 개념에 대한 이해를 반영하는 대표적인 비형식적 지식이었다.

둘째, 모델화 전략을 통해 학생은 자연스럽게 두 배하기 전략을 사용하였다. 이것은 학생이 50이라는 수를 계산하기 쉬운 수 100으로 만들기 위해 사용한 전략이다. 100은 계산하기 쉬운 수이기 때문이라는 학생의 언급에서 볼 수 있듯이 학생의 비형식적 전략은 학생이 계산의 유창성을 꾀할 수 있게 하였을 뿐 아니라, 계산 절차 전체를 개관하여 효율적으로 이끄는 데에도 활용되었다.

셋째, 학생은 곱셈 연산의 성질인 분배와 결합의 성질에 관하여 형식적인 학습을 하지 않았지만 모델로 사용된 그림을 보면서 자연스럽게 곱셈 연산의 성질을 문제 해결에 사용하였다. 곱셈의 연산의 성질 중에서도 분배법칙은 모델화를 통하지 않고 직접 사용되었다. 학생의 곱셈의 분배 성질을 이용한 해결 과정이 (두 자리 수) × (두 자리 수)의 곱을 해결하는데 중요한 역할을 하였을 뿐만 아니라, 형식적인 알고리즘의 이해와 연결 가능성을 보여주고 있다. 분배과정은 자리값을 기준으로 하여 이루어졌으며 표준 알고리즘에서의 밑수를 분배하여 계산하는 과정을 간접적으로 경험하게 하는 기회가 되었다. 곱셈의 분배 법칙을 사용하면서 자리값을 기준으로 분배하는 것은 학생의 자리값 개념을 반영한 비형식적 지식이었다.

학생의 문제 해결과정에서 나타난 비형식적 지식은 문제 장면을 정렬 모델로 표현한 것, 그리고 특정한 수에 따라 나타날 수 있는 계산 전략인 두 배하기 전략, 그리고 곱셈의 연산의 성질인 분배와 결합의 성질에 대한 이해로 정리할 수 있다. 이러한 비형식적 전략과 이해는 형식적인 지도를 통해 구축한 형식적 지식을 반영하고 있고 바탕으로 하고 있다. 학생은 비형식적 지식을 형식적으로 지도받지는 않았지만 기존의 지식과의 연결을 통해 당연히 성립하는 것으로 인식하고 문제 해결과정에 사용하고 있다. 기존의 교육과정에서는 학생의 비형식적 지식을 형식적인 지식으로 학습하도록 하기

위해서 교사의 노력이 요구되는 것으로 보인다.

학생의 비형식적 지식은 문제를 해결하는 과정에서 특정한 역할을 하였다. 문제를 해결하는 과정은 추측하기, 정당화하기, 수정하기 단계를 거치며, 각 단계에서 비형식적 지식이 중요한 역할을 하였다. 학생의 비형식적 지식은 문제 해결과정의 적절성을 판단하는 준거로 활용되었으며, 설명과 정당화의 도구가 되었다. 학생이 스스로 찾아내지 않은 기존의 형식적인 알고리즘의 원리를 설명하는 데에는 어려움을 보였지만, 스스로 필요에 따라 사용한 비형식적 지식과 그에 비추어 형식적인 지식을 만들어낸 것에 대해서는 확신을 가지고 설명하였다.

학생은 문제를 해결하는 과정에서 표준 알고리즘을 사용하려는 시도를 보였다. 하지만 표준 알고리즘을 부적절하게 전이함으로써, 스스로 확신을 잃고 불완전함을 극복하기 위하여 비형식적인 지식을 사용하였다. 학생은 문제를 해결하고 난 후, 기존에 알고 있는 표준 알고리즘에 비추어 이해하려고 노력하였다. 그것은 학생이 표준 알고리즘의 중요성에 가치를 부여하였으며, 비형식적 지식에 비해 파지되어야 할 최종 형태의 지식이라는 것을 알고 있음을 암시한다. 하지만 이해가 바탕이 되지 않은 표준 알고리즘의 자동화는 다음의 학습으로 전이되는데 많은 한계를 가져옴을 학생의 사례를 통해 알 수 있다.

Baroody & Coslick(2005)은 학생이 표준 알고리즘으로 문제를 해결하는 것보다 수학을 이해하면서 해결하는 것이 더 중요하다고 하였다. 이 연구에서는 표준 알고리즘을 이해하는 과정에서, 학생의 비형식적 지식이 매우 중요한 역할을 한다는 것을 확인하였기 때문에, 비형식적 지식을 이용하여 표준 알고리즘을 발견 또는 발명하여 적절하게 적용하는 것이 더 중요하다고 주장할 수 있다. 특히 비형식적 지식을 사용한 해결 방법에서는 형식적 알고리즘으로 해결한 과정과는 달리 학생이 기존에 가지고 있는 지식과 활발하게 연결하여 이해하는 장면을 포착할 수 있다. 학생이 사용하는 곱셈의 분배법칙, 모델화는 자리값 개념, $10 \times 10 = 100$이라는 특수한 수의 곱의 결과에 대한 지식을 연결한 것이며, 이를 통해 학생은 표준 알고리즘에 대한 깊은 이해를 토대로 스스로 알고리즘을 만들어내었다.

학생이 나타내는 비형식적 지식이 무엇인가를 알아보는 것도 중요하지만, 그 다음 단계인 형식적 지식으로 발전하는 과정을 알아볼 필요가 있다. Ginsburg & Seo(1999)는 학생이 비형식적 전략을 창안할 뿐 아니라, 개념을 발전시켜 형식화하고 관례적으로 표현하도록 이끌어야 한다고 주장하였다. 백선수(2005)와 김진호(2002) 역시, 비형식적 지식과 형식적 지식의 연결의 중요성에 대해 논의하였다.

본 연구에서 학생은 꾸준히 문제해결 과정을 반성함으로써 형식적인 알고리즘으로 나아가려는 경향을 보였다. 학생의 이러한 특성은 교사가 수행해야 할 매우 중요한 역할을 부여한다. 학생이 반성적 사고에 의해 비형식적 지식과 형식적 지식을 분석하고 이해하며, 연결하려고 시도하는 것이 필요하며, 이를 교사가 유도해야 하기 때문이다. 직접적으로 표준 알고리즘을 설명하고 지도하여 강제로 학습하도록 하는 것이 아니라, 스스로 표준 알고리즘의 필요성을 이해하고 재구성하는 것이 학생의 의무이며, 교사는 이를 자연스럽게 유도해야 하는 것이다.

본 연구는 한 명의 학생만을 대상으로 한 관찰과 면담에 기초하여 수행되었기에 일반화하는 데 한계가 있다. 그러나 한 학생이 보이는 세세한 반응을 관찰하고 분석하였기 때문에 유사 주제에 대한 후속 연구의 기초자료를 제공

할 수 있다. 무엇보다 학생의 비형식적 지식이 구체적으로 어떤 것이며, 어떤 방식으로 학생의 학습에 영향을 미치는지에 대한 세부 자료를 제공하였다는 점에서 의의가 있다. 본 연구를 확장하여 다양한 수준과 성향의 학생들이 형성하는 비형식적 지식의 종류와 특성, 역할에 대한 연구를 기대한다.

참고문헌

김진호(2002). 비형식적 수학적 지식과 형식적 수학적 지식의 결합에 관한 소고. **학교수학, 4**(4), 555-563.

백선수(2005). **비형식적 지식을 활용한 분수 곱셈과 나눗셈에서의 형식화 지도 방안 개발.** 한국교원대학교 박사학위논문.

서찬숙 · 남승인(2004). 문제 장면의 모델화를 통한 수업이 곱셈적 사고력과 곱셈 능력 신장에 미치는 영향. **초등수학교육, 8**(1), 33-50.

이종욱(2007). 한 초등학교 2학년 아동의 곱셈과 나눗셈 해결 전략에 관한 사례연 구. **수학교육, 46**(2), 155-171.

Baroody & Coslick(2005). **수학의 힘을 길러주자 왜? 어떻게?.** (권성룡, 김남균, 김수환, 김용대, 남승인, 류성림, 방정숙, 신준식, 이대현, 이봉주, 조완영, 조정수, 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1998 출판).

Becker & Selter(1996). Elementary school practices. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatric, & C. Laborde (Eds), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 511-564). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Carpenter et al.(2005). **어떻게 수학을 배우지?.** (김수환, 박영희, 백선수, 이경화, 한 대희, 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1999년 출판).

Ginsburg(1997). Mathematics learning disabilities: A view from developmental psychology. *Journal of Learning Disabilities*, 30(1), pp. 20-33.

Ginsburg & Seo(1999). The matnematics in children's thinking. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal*, 1(2), pp. 113-129.

Kamii(2005). **Piaget의 발생론적 인식론을 적용한 수학수업-3학년-.** (강완, 김진호, 김연, 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1994년 출판).

NCTM(2007). **학교 수학을 위한 원리와 규준.** (류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙, 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 2000년 출판).

Susan Jo Russell(2000). Developing computational fluency with whole numbers. *Teaching Childern Mathematics*, 7, 154-158.

A Child's Informal Knowledge of Multiplication

Jeon Hyung Og (Gradyate School of Korea National University of Education)
Lee Kyung Hwa (Seoul National University)

This study investigated what kind of informal knowledge is emergent and what role informal knowledge play in process of solving 2-digit by 2-digit multiplication task. The data come from 4 times interviews with a 3th grade student who had not yet received regular school education regarding 2-digit by 2-digit multiplication. And the data involves the student's activity paper, the characteristics of action and the clue of thinking process. Findings from these interviews clarify the child's informal knowledge to modeling strategy, doubling strategy, distributive property, associative property. The child formed informal knowledge to justify and modify her conjecture of the algorithm.

* **Key words** : informal knowledge(비형식적 지식), informal strategy(비형식적 전략), multiplication(곱셈)

논문접수: 2008. 10. 6
논문수정: 2008. 11. 7
심사완료: 2008. 11. 16