

구름/스핀 운동을 하는 경우의 타원접촉 EHL 유막두께

박 태 조*

경상대학교 기계항공공학부·항공기부품기술연구소

Elastohydrodynamic Film Thickness in Elliptical Contacts with Rolling and Spinning

Tae-Jo Park†

School of Mechanical & Aerospace Engineering, ReCAPT, Gyeongsang National University
(Received October 22, 2008; Revised November 10, 2008; Accepted November 13, 2008)

Abstract – In highly stressed machine elements such as angular contact ball bearings and toroidal type traction drives, the elastohydrodynamic lubrication of elliptical contacts with both rolling and spinning motion are occur. In this paper, a finite difference method with non-uniform grid systems and the Newton-Raphson method are applied to solve the problems. Pressure distributions, film contours and variations of the minimum and central film thicknesses are compared with various ellipticity parameter, dimensionless speed and load parameter. The results showed that the spinning motion has significant influence especially on the film shapes. Reduction of the minimum film thickness under spinning is remarkable whereas the central film thickness is relatively less. Especially variations of the minimum film thicknesses with rolling velocity, load and ellipticity ratio are a great different from those of pure rolling. Therefore present numerical scheme can be used in the analysis of general elliptical contact EHL problems and further studies are required.

Key words – elliptical contacts, EHL, rolling/spinning, numerical analysis, newton-raphson method, minimum film thickness

1. 서 론

Dowson & Higginson[1]이 역방법(Inverse method)라는 획기적인 해석방법을 사용하여 무한장 선접촉문제를 성공적으로 수치해석한 1959년 이후의 지난 반세기 동안 EHL 문제에 대하여 집중적인 연구가 수행되었다. 대표적으로 Hamrock & Dowson[2]이 타원접촉문제에서 최소유막의 크기를 쉽게 추정할 수 있는 이론식을 제시하였고, Chittenden 등[3]은 참고문헌[2]의 수치해석 방법과 결과를 사용하여 윤활유가 Hertz 접촉타원의 임의방향에서 유입되는 경우에도 적용할 수 있는 보다 일반화된 유막두께식을 발표하는 등 이 분야의 실질적인 발전에 크게 기여하였다. 이와 같은 EHL해석이 실제적으

로 중요한 이유는 각종 구름베어링, 기어 및 캠 기구 등과 같이 집중하중을 받는 기계요소가 장시간 동안 성공적으로 운전하기 위해서 필요한 최소유막의 크기를 추정할 수 있게 하는 것이다[4].

앵글러 컨택트 볼베어링(Angular contact ball bearing)이나 자동차 등의 CVT(Continuously variable transmission)로 사용되고 있는 토로이드형(Toroidal type) 트래션 드라이브(Traction drive)에서는 전동요 공간에 구름/미끄럼 운동과 동시에 스핀운동(Spinning)이 발생한다. 특히, 트래션 드라이브에서는 스핀운동의 발생여부에 따라서 트래션 계수(Traction coefficient)가 크게 변화할 뿐만 아니라 동력손실에도 큰 영향을 미치므로 정확한 EHL해석이 요구된다[5]. 하지만 지금까지의 수많은 타원접촉 EHL해석에도 불구하고 스핀운동을 고려한 연구결과는 극소수에 불과한 실정이다[6-12].

*주저자 · 책임저자 : tjpark@gnu.ac.kr

Mostofi & Gohar[6]는 구름운동과 함께 스핀운동을 하는 타원접촉해석을 처음으로 시도하였으며, Dowson 등[7]은 이에 대한 보다 상세한 해석결과를 제시하였다. 특히, Zou 등[8]은 멀티-그리드(Multi-grid) 방법을 사용하여 스핀운동과 함께 윤활유가 Hertz 접촉타원에 대하여 임의방향으로 유입되는 경우까지 포함하는 일반적인 타원접촉해석을 수행하였지만 해석결과와 제시한 유막두께식이 서로 일치하지 않는 등 결과를 신뢰할 수 없었다. 박태조[9,10]는 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법을 사용하여 스핀운동이 추가된 경우의 EHL문제를 정확하게 해석하였다. 이 결과, 스핀운동은 최소유막의 크기에 미치는 하중과 타원비의 영향을 크게 변화시키므로 일반적인 EHL조건에 적용할 수 있는 최소유막두께식을 구하기 위한 추가연구의 필요성을 거듭 제기하였다. 한편, 참고문헌[11,12]은 트래션 드라이브에 적용을 위하여 상대적으로 고하중인 경우에 대한 해석을 수행하였다.

본 논문에서는 구름운동에 스핀운동이 추가된 경우의 타원접촉 EHL문제에 대한 정확한 유막두께식을 제시하기 위한 연구의 일환으로 타원비, 무차원 속도 및 하중 변수에 따른 EHL특성을 보다 상세하게 조사하고자 한다.

2. 지배방정식

2-1. 레이놀즈 방정식

Fig. 1과 같이 구름운동과 스핀운동이 동시에 발생하는 타원접촉 EHL문제에서 유막내의 발생압력은 다음의 레이놀즈 방정식을 만족시킨다[7-9].

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{\rho} h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\bar{\rho} h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12 \left[\frac{\partial}{\partial x} \{ (u - \omega y) \bar{\rho} h \} + \frac{\partial}{\partial y} \{ \omega x \bar{\rho} h \} \right] \quad (1)$$

여기서, u 는 타원체의 구름방향 평균속도이고, ω 는 평균각속도로서 반시계방향으로 회전하는 경우를 (+)로 정의하였다.

2-2. 윤활유의 상태방정식

EHL상태에서의 윤활유의 점도와 밀도는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다[1-2].

$$\bar{\eta} = \eta_o \exp \{ \{ \ln(\eta_o) + 9.67 \} \cdot \{-1 + (1 + 5.1 \times 10^{-9} p)^2\} \} \quad (2)$$

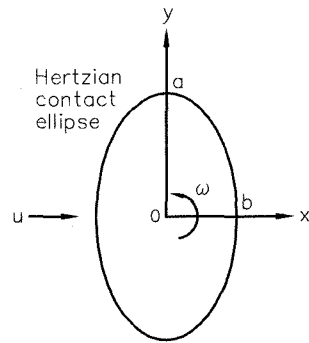


Fig. 1. Contact ellipse and coordinate system.

$$\bar{\rho} = \rho_o \left[1 + \frac{0.58 \times 10^{-9} p}{1 + 1.68 \times 10^{-9} p} \right] \quad (3)$$

여기서, p 와 η_o 의 단위는 각각 [Pa], [Pa·s]이다.

2-3. 유막두께식

타원접촉 EHL상태에서의 유막형상은 다음식과 같이 정의할 수 있다[13].

$$h = h_o + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} + \sum_k \sum_l d_{k,l} p_{k,l} \quad (4)$$

여기서, h_o 는 상수이고, 우변의 2항과 3항은 타원체의 형상에 의한 유막이며, 마지막항은 압력에 의한 윤활면의 탄성변형량이다[13-15].

2-4. 하중조건식

타원체에 작용하는 하중은 다음식과 같이 유막내에서 발생하는 유체압력의 합과 동일하다.

$$w = \iint p \, dx \, dy \quad (5)$$

3. 무차원화

수치해석을 간단하게 하고 해석결과를 효율적으로 정리하기 위하여 다음과 같은 무차원변수를 도입한다.

$$\begin{aligned} X &= x/b, \quad Y = y/a, \quad H = h/R_x, \quad P = p/E, \quad G = \alpha E \\ \rho &= \bar{\rho}/\rho_o, \quad \eta = \bar{\eta}/\eta_o, \quad k = a/b, \quad U = \eta_o u / ER_x \\ \Omega &= \eta_o \omega / E, \quad W = w / ER_x^2, \quad B = 2\Omega / U \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, 유효탄성계수 E 의 단위는 [GPa]이고, Hertz 접촉타원에서 타원체의 곡률반경 R_x, R_y 와 타원비 k 의

관계는 다음 식을 사용하였다[3].

$$k = \left(\frac{R_y}{R_x}\right)^{2/3} \quad (7)$$

따라서, 식(1)-식(5)를 무차원화하여 순서대로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\rho H^3 \partial P}{\eta \partial X} \right) + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\rho H^3 \partial P}{\eta \partial Y} \right) = 12U \frac{b}{R_x} \left[\left(1 - \frac{kbBY}{2R_x} \right) \frac{\partial(\rho H)}{\partial X} + \frac{bBX \partial(\rho H)}{2kR_x \partial Y} \right] \quad (8)$$

$$\eta = \exp[\{\ln(\eta_0) + 9.67\} \{-1 + (1 + 5.1EP)^2\}] \quad (9)$$

$$\rho = 1 + \frac{0.58EP}{1 + 1.68EP} \quad (10)$$

$$H = H_0 + \frac{b^2}{2R_x^2} \left\{ X^2 + \frac{R_x}{R_y} k^2 Y^2 \right\} + \sum_k \sum_l D_{i,j,k,l} P_{k,l} \quad (11)$$

$$W = \frac{kb^2}{R_x^2} \iint P dX dY \quad (12)$$

한편, 수치해석중에 음(-)의 압력이 발생하는 영역에는 다음의 레이놀즈 경계조건식을 적용한다.

$$P = \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\partial P}{\partial Y} = 0 \quad (13)$$

4. 수치해석

참고문헌[13-15]에서와 동일하게 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법을 적용하여 수치해석하고자 한다. 불균일한 격자계를 사용할 경우, 식 (8)의 유한차분형태는 아래의 식 (14)으로 표현된다. 여기서, M_j 는 $Y=Y_j$ 에서 식 (13)을 만족시키는 X방향 격자의 수이고, N 은 Y방향 격자의 수이다[13].

식 (14)에서 미지수인 $P_{i,j}$ 와 H_0 를 구하기 위하여 뉴우튼-랩슨 방법을 적용하면 다음과 같다.

$$\sum_k \sum_l \left(\frac{\partial f_{i,j}}{\partial P_{k,l}} \right)^n (P_{k,l}^{n+1} - P_{k,l}^n) + \left(\frac{\partial f_{i,j}}{\partial H_0} \right)^n \cdot (H_0^{n+1} - H_0^n) + f_{i,j}^n = 0 \quad (16)$$

한편, 식 (12)는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$W = \frac{kb^2}{4R_x^2} \sum_{i=2}^{M_j} \sum_{j=2}^{N-1} P_{i,j} (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i) (\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j) \quad (17)$$

따라서, 식 (16)과 식 (17)에서 미지수와 식의 수가 같으므로 해석이 가능하다.

수치해석과정은 참고문헌[13-15]와 동일하며, 해석결과가 계산영역의 영향을 받지 않도록 가능하면 넓게 하였다. 본 논문에서는 구름방향 입구부와 출구부의 최대경계 위치를 $X=-5.0$ 와 $X=2.0$ 에, 측면부의 최대경계 위치는 $Y=\pm 5.0$ 에 각각 두었으며, 사용한 격자의 수는 최대로 67×45 개이다.

5. 결과 및 고찰

Fig. 2~Fig. 6에는 $|X| \leq 1.7$, $|Y| \leq 3.0$ 인 영역에서의 3-D 압력분포와 2-D 유막형상을 서로 비교하여 나타내었다. 유막형상에서 +와 *기호는 Hertz 접촉 타원의 중심위치($X=Y=0$)와 최소유막두께 H_m 이 발생하는 위치를 각각 표시한다.

Fig. 2~Fig. 5에 나타낸 유막의 등고선 그림에서는 계산조건에 따른 결과를 서로 비교하기 위하여 제일 바깥의 유막크기는 $H=1.5 \times 10^{-5}$ 로 고정시켰다.

Fig. 2에는 Hertz 접촉타원의 타원비가 $k=1.25$ 인 경우에 무차원 스핀/구름 속도비가 $B=0$ 와 $B=120$ 인 경우에 대한 압력분포와 유막형상을 비교하여 나타내었다. 여기서, 타원접촉 EHL문제에 대한 대표적인 연구인 Hamrock & Dowson[2]의 결과와 비교하기 위하여 B 를 제외한 나머지 조건은 동일하게 두었다. $B=0$ 인 경우, 타원접촉 EHL의 대표적인 특징들인 구름방향 출구영역에서의 압력 Spike와 함께 접촉증상부에서

$$f_{i,j} = \frac{\rho_{i+1/2,j} H_{i+1/2,j}^3}{\Delta X_i \eta_{i+1/2,j}} (P_{i+1} - P_{i,j}) - \frac{\rho_{i-1/2,j} H_{i-1/2,j}^3}{\Delta X_{i-1} \eta_{i-1/2,j}} (P_{i,j} - P_{i-1,j}) + \frac{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i}{k^2 (\Delta Y_{j-1} + Y_j)} \left\{ \frac{\rho_{i,j+1/2} H_{i,j+1/2}^3}{\Delta Y_j \eta_{i,j+1/2}} (P_{i,j+1} - P_{i,j}) - \frac{\rho_{i,j-1/2} H_{i,j-1/2}^3}{\Delta Y_{j-1} \eta_{i,j-1/2}} (P_{i,j} - P_{i,j-1}) \right\} - 12U \frac{b}{R_x} \left[\left(1 - \frac{kbBY}{2R_x} \right) (\rho_{i+1/2,j} H_{i+1/2,j} - \rho_{i-1/2,j} H_{i-1/2,j}) + \frac{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i}{\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j} \frac{bBX_i}{2kR_x} (\rho_{i,j+1/2} H_{i,j+1/2} - \rho_{i,j-1/2} H_{i,j-1/2}) \right] = 0 \quad (14)$$

$$(i=2, \dots, M_j, j=2, \dots, N-1) \quad (15)$$

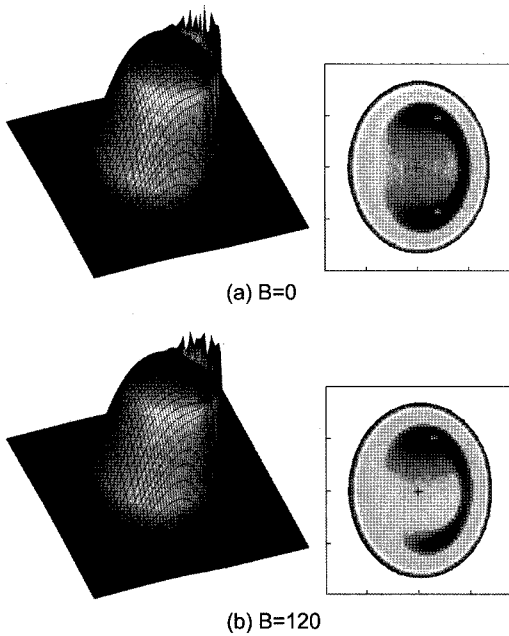


Fig. 2. Pressure distribution and film contours: $k=1.25$, $G=4522$, $U=1.683 \times 10^{-12}$, $W=1.106 \times 10^{-7}$.

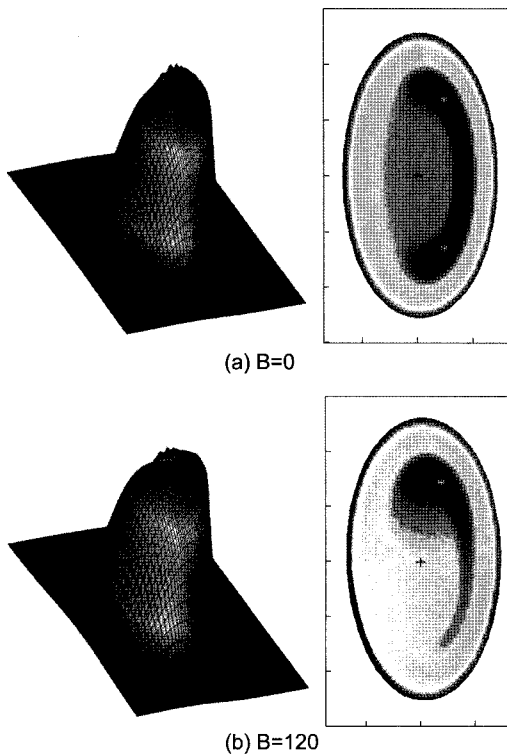


Fig. 3. Pressure distribution and film contours: $k=2.0$, $G=4522$, $U=1.683 \times 10^{-12}$, $W=1.106 \times 10^{-7}$.

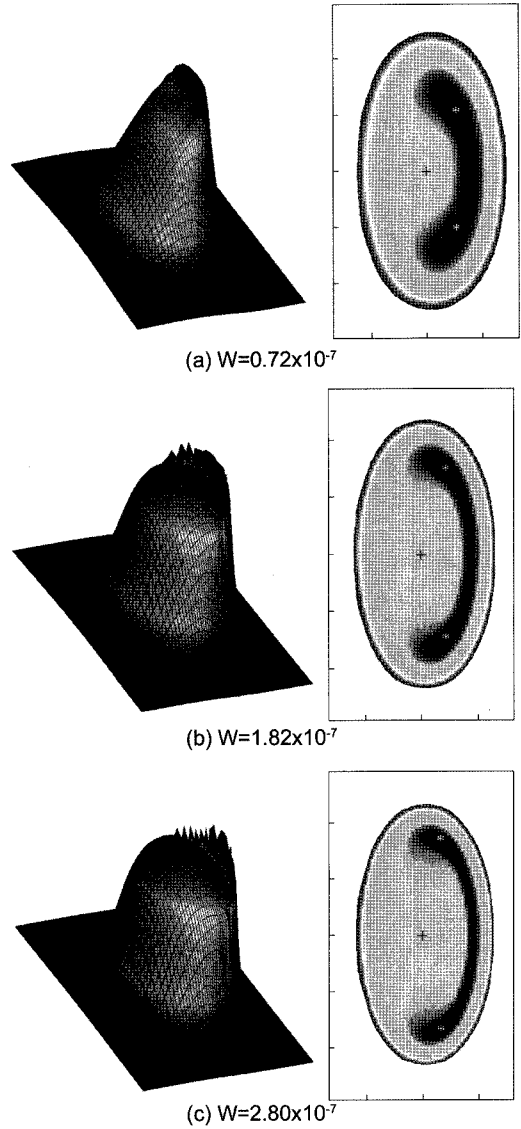


Fig. 4. Pressure distribution and film contours: $k=2.0$, $G=4522$, $U=2.262 \times 10^{-12}$, $B=0$.

크기가 일정한 유막이 출구부에서 급격하게 수축하여 전체적으로는 말발굽모양을 나타내고 있다. 만일, 스핀 운동이 추가될 경우에는 +Y영역 (Fig. 1 참조)에서는 구름방향속도가 느려져서 압력발생이 낮게 된다. 따라서, 국부적인 탄성변형량이 작게 되어 결과적으로 이곳에서의 유막두께의 크기는 감소한다. 하지만 -Y영역에서는 이와는 반대의 경향으로 나타나므로 전체적인 압력과 유막형상의 분포는 접촉타원의 단축에 대하여 비대칭적으로 된다. 이 결과, B=0에서 B=120로 변화하는 경우에 접촉중양부 유막두께 H_0 는 6.488×10^{-6} 에

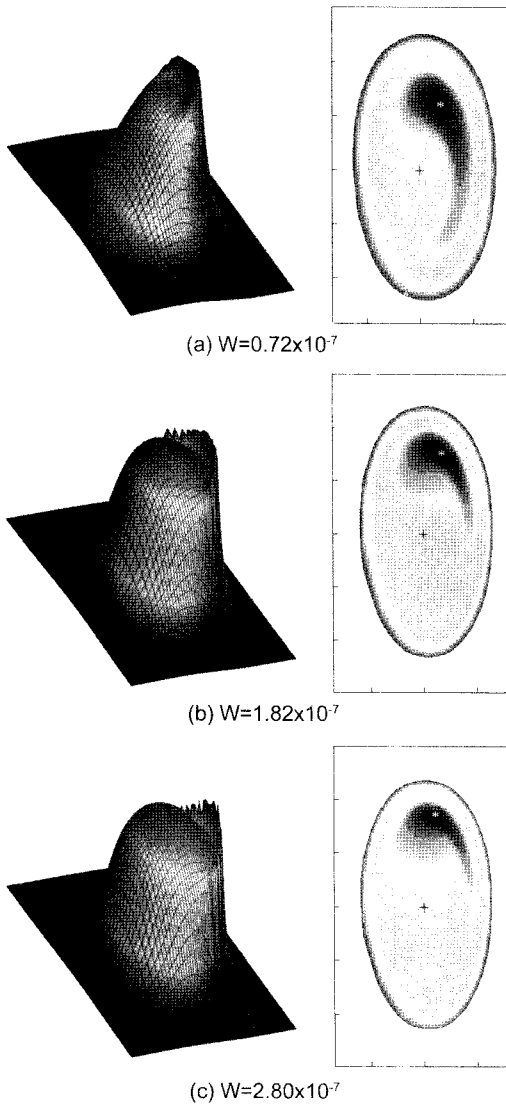


Fig. 5. Pressure distribution and film contours: $k=2.0$, $G=4522$, $U=2.262 \times 10^{-12}$, $B=120$.

서 6.365×10^{-6} 으로 약간 감소하였지만 최소유막두께 H_m 은 4.171×10^{-6} 에서 3.463×10^{-6} 로 아주 크게 감소하였다[10]. 타원비가 다른 경우인 Fig. 3에 나타난 $k=2.0$ 의 결과에서도 동일한 경향임을 알 수 있다. 즉, 스핀운동으로 H_c 는 7.306×10^{-6} 에서 7.132×10^{-6} 으로, H_m 은 5.461×10^{-6} 에서 4.320×10^{-6} 으로 각각 변화한다. 한편, 참고문헌[2,13-14]의 결과와 동일하게 k 가 커질수록 H_m 과 H_c 는 크게 되었다.

Fig. 4는 3가지의 서로 다른 하중조건에 대하여 구름운동만 하는 경우($B=0$)의 결과를 나타낸 그림이다.

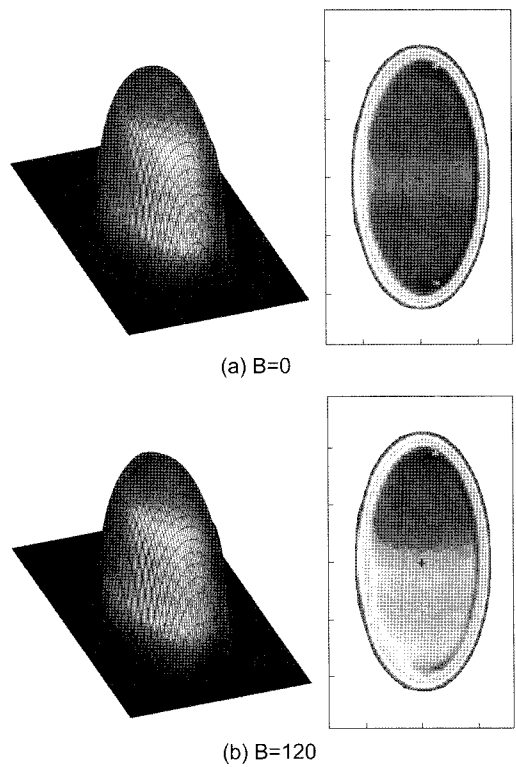


Fig. 6. Pressure distribution and film contours: $k=2.0$, $G=4522$, $U=9.353 \times 10^{-14}$, $W=1.81 \times 10^{-7}$.

하중이 증가할수록 접촉중앙부에서는 압력분포가 Hertz 접촉압력과 근사하게 되고 이에 따라 유막의 크기가 거의 균일하게 되는 영역이 점차 증가하였다. Fig. 5는 $B=120$ 인 경우에 대한 결과로 Fig. 2에서 고찰한 것과 같이 스핀운동으로 인하여 비대칭적인 압력분포와 유막형상을 나타내었다. 특히, $B=0$ 의 경우와는 달리 하중변화에 따른 H_m 의 변화가 아주 크게 나타났다[9]. 즉, H_m 은 하중의 증가에 따라 $B=0$ 의 경우에 (a) 7.054×10^{-6} , (b) 6.291×10^{-6} , (c) 5.361×10^{-6} 으로 감소하지만 $B=120$ 인 경우에는 (a) 6.089×10^{-6} , (b) 4.520×10^{-6} , (c) 3.694×10^{-6} 과 같이 상대적으로 아주 크게 변화하였다.

Fig. 6에는 무차원 속도변수가 $U=9.353 \times 10^{-14}$ 에 대한 결과를 나타낸 것으로 이는 비슷한 하중조건인 Fig. 4(b)와 Fig. 5(b)에 비하여 1/20 정도로 느린 경우이다. 여기서, 유막의 등고선 그림에서 제일 바깥의 유막크기는 $H=4 \times 10^{-6}$ 이다. U 가 작기 때문에 구름방향 출구측에서 압력 Spike는 나타나지 않으며, 탄성변형 되는 접촉중앙부의 대부분 영역에서의 유막두께는 거

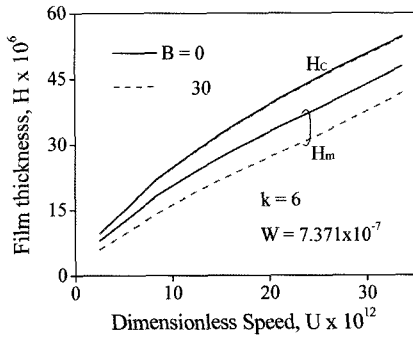


Fig. 7. Variation of central and minimum film thicknesses with dimensionless speed parameter: $k=6.0$, $G=4522$, $W=7.371 \times 10^{-7}$.

의 균일하였다. 한편, H_m 은 $B=0$ 와 $B=120$ 인 경우에 각각 0.5595×10^{-6} 와 0.227×10^{-6} 으로 변화량은 작지만 변화율은 크게 되었다.

Fig. 7에는 무차원 속도변수 U 에 대한 H_c 와 H_m 의 변화를 스피ن/구름 속도비 B 가 서로 다른 경우와 비교하여 나타내었다. 이 결과, U 가 변화하는 경우에 H_c 는 스피ن운동의 영향을 거의 받지 않지만 H_m 은 스피ن운동이 없는 경우보다 거의 일정한 크기가 감소한 상태로 거의 직선적으로 변화하고 있다.

이상의 결과, 타원점축 EHL문제에서는 스피ن운동이 최소유막두께의 크기에 아주 큰 영향을 미치는 것을 알 수 있다. 따라서, 구름운동과 함께 스피ن운동을 하는 타원점축 EHL문제에 적용할 수 있는 정확한 유막두께식을 구하기 위해서는 추가적인 연구가 요구되며, 본 논문에서 제시한 수치해석 방법과 결과가 유용하게 사용될 수 있을 것으로 기대된다.

6. 결 론

본 논문에서는 구름운동과 함께 스피ن운동을 동시에 하는 타원점축 EHL문제를 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법을 적용하여 수치해석하였다. 이때, 접촉타원의 타원비, 무차원 속도 및 하중 변수의 변화에 따른 압력 분포와 유막형상을 상세하게 조사하였다. 이 결과, 스피ن운동은 제반 무차원변수에 대하여 접촉중양부 유막 두께와는 달리 최소유막두께의 크기를 크게 감소시켰다. 따라서, 일반적인 타원점축문제에 적용할 수 있는 정확한 EHL 유막두께식을 제시하기 위해서는 추가적인 연구가 요구되며, 본 논문의 결과가 유용하게 사용될 수 있을 것으로 기대된다.

후 기

이 논문은 2단계 BK21사업과 지식경제부 지방기술 혁신사업(RTI04-01-03)의 지원으로 수행되었습니다.

기호 설명

- a : Hertz 접촉타원의 장반경
- B : 무차원 스피ن/구름 속도비, $2\Omega/U$
- b : Hertz 접촉타원의 단반경
- E : $2/E = (1-\nu_1^2)/E_1 + (1-\nu_2^2)/E_2$
- G : 무차원 재료변수, αE
- H : 무차원 유막두께, h/R_x
- H_c : 접촉중양부에서의 무차원 유막두께
- H_m : 무차원 최소유막두께
- k : Hertz 접촉타원의 타원비, a/b
- n : 반복계산횟수
- P : 무차원 압력, p/E
- R_x : 등기타원체의 x방향 곡률반경
- R_y : 등기타원체의 y방향 곡률반경
- U : 무차원 속도변수, $\eta_0 u/ER_x$
- u : 타원체의 구름방향 평균속도
- X, Y : 무차원 좌표계, $x/b, y/a$
- W : 무차원 하중변수, $W = w/ER_x^2$
- z : 윤활유의 Roelands 계수
- α : 윤활유의 압력-점도지수
- η : 무차원 점도, $\bar{\eta}/\eta_0$
- η_0 : 대기압 상태에서의 점도
- $\bar{\eta}$: 윤활유의 점도
- ρ : 무차원 밀도, $\bar{\rho}/\rho_0$
- ρ_0 : 대기압 상태에서의 밀도
- $\bar{\rho}$: 윤활유의 밀도
- Ω : 무차원 각속도, $\eta_0 \omega/E$
- ω : 타원체의 평균각속도

참고 문헌

1. Dowson, D. and Higginson, G. R., *Elastohydrodynamic Lubrication*, SI ed., Pergamon Press, 1977.
2. Hamrock, B. J. and Dowson, D., "Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts, Part 3 : Fully Flooded Results", *Trans. ASME, J. of Lub. Tech.*, Vol. 99, pp. 264-276, 1977.
3. Chittenden, R. J., Dowson, D. and Taylor, C. M.,

- “Elastohydrodynamic Film Thickness in Concentrated Contacts”, *Proc. Instn. Mech. Engrs., J. of Mech. Eng. Sci.*, Vol. 200, pp. 207-226, 1986.
4. Skurka, J. C., “Elastohydrodynamic Lubrication of Roller Bearings”, *Trans. ASME, J. of Lub. Tech.*, Vol. 92, pp. 281-291, 1970.
 5. Ehret, P., Chevalier, F., Dowson, D., Taylor, C. M., Okamura, H. and Sano, T., “Traction in EHL Elliptical Contacts with Spin Conditions”, *Tribology Series*, Vol. 38, pp. 71-83, 2000.
 6. Mostofi, A. and Gohar, R., “Oil Film Thickness and Pressure Distribution in Elastohydrodynamic Point Contacts”, *J. of Mech. Eng. Sci.*, Vol. 24, pp. 173-182, 1982.
 7. Dowson, D., Taylor, C. M. and Xu, H., “Elastohydrodynamic Lubrication of Elliptical Contacts with Spin and Rolling”, *Proc. Instn. Mech. Engrs., J. of Mech. Eng. Sci.*, Vol. 205, pp. 165-174, 1991.
 8. Zou, Q., Huang, C. and Wen, S., “Elastohydrodynamic Film Thickness in Elliptical Contacts with Spinning and Rolling”, *Trans. ASME, J. of Tribology*, Vol. 121, pp. 686-692, 1999.
 9. 박태조, “타원접촉의 탄성유체윤활: 제2보 - 스핀운동의 영향”, *한국윤활학회지*, Vol. 23, No. 2, pp. 49-55, 2007.
 10. 박태조, 고재현, “스핀운동이 타원접촉의 탄성유체윤활에 미치는 영향”, *한국정밀공학회 2007년도 춘계 학술대회논문집*, 2007.
 11. Taniguchi, M., Dowson, D. and Taylor, C. M., “The Effect of Spin Motion upon Elastohydrodynamic Elliptical Contacts”, *Elastohydrodynamics*, Vol. 32, pp. 599-610, 1997.
 12. 장시열, “무단 변속기의 동력전달 접촉에서 회전운동을 고려한 타원형상의 점접촉 탄성유체윤활연구”, *한국윤활학회지*, Vol. 21, No. 6, pp. 272-277, 2006.
 13. Park, T. J. and Kim, K. K., “A Numerical Analysis of the Elastohydrodynamic Lubrication of Elliptical Contacts”, *Wear*, Vol. 136, pp. 299-312, 1990.
 14. 박태조, “Hamrock & Dowson의 EHL 유막두께식에 대한 평가”, *한국윤활학회지*, Vol. 12, No. 3, pp. 115-122, 1996.
 15. 박태조, 현준수, “타원접촉의 탄성유체윤활: 제1보 - 윤활유의 유입방향이 Hertz 접촉타원의 장축방향인 경우”, *한국윤활학회지*, Vol. 14, No. 4, pp. 58-63, 1998.