

고유치 수치기법을 이용한 지하저장공동 주위의 용질이동해석

정일문¹ · 김지태^{1*} · 조원철² · 김남원¹

¹한국건설기술연구원 수문연구실, ²연세대학교 공과대학 토목환경공학과

A Solute Transport Analysis around Underground Storage Cavern by using Eigenvalue Numerical Technique

Il Moon Chung¹, Jitae Kim^{1*}, Woncheol Cho², and Nam Won Kim¹

¹Hydrology Research Division, Korea Institute of Construction Technology

²Department of Civil and Environmental Engineering, Yonsei University

본 연구에서는 수치해석의 시간차분에서 발생하는 절단오차를 극복하는 방안으로 고유치 기법을 도입하였다. 고유치기법은 모의를 할 때 공간만을 이산화하는 특징을 가지며, 공간적으로 이산화된 방정식을 대각화시킴으로써 선형동력학적 시스템을 분리시킨 후 시간적분을 이용한 계산이 임의의 위치에서 임의의 시간에 대해 개별적으로 또 연속적으로 수행된다. 이러한 고유치기법을 이용하여 오염물 이동을 모의하고 이를 해석해와 비교 검증하였고, 동일한 조건에서 유한요소법을 이용한 수치모형과 고유치기법을 이용한 용질이동의 예측을 실시한 결과 고유치기법을 이용할 경우 계산시간과 저장용량이 수치모형에 비해 절약됨을 확인할 수 있었다. 고유치 기법을 이용하여 지하유류저장 공동주위의 불균일 유속장에서 용질의 이동을 분석하였다. 이 방법이 모의발생에 오랜 시간이 걸리는 문제에 유용하게 사용될 수 있으므로, 공동에 인접한 오염원으로부터 공동의 안전성을 평가하기 위한 민감도 분석에 이 방법을 적용하였으며, 모의결과에 의하면, 중분산지수와 횡분산지수가 각각 50 m, 5 m일 때 공동에 도달하는 시간은 약 50년으로 추정되었다.

주요어 : 고유치 기법, 절단오차, 시간적분, 지하저장공동, 민감도분석

The eigenvalue technique is introduced to overcome the problem of truncation errors caused by temporal discretization of numerical analysis. The eigenvalue technique is different from simulation in that only the space is discretized. The spatially discretized equation is diagonalized and the linear dynamic system is then decoupled. The time integration can be done independently and continuously for any nodal point at any time. The results of eigenvalue technique are compared with the exact solution and FEM numerical solution. The eigenvalue technique is more efficient than the FEM to the computation time and the computer storage in the same conditions. This technique is applied to the solute transport analysis in nonuniform flow fields around underground storage caverns. This method can be very useful for time consuming simulations. So, a sensitivity analysis is carried out by using this method to analyze the safety of caverns from nearby located contaminant sources. According to the simulations, the reaching time from source to the nearest cavern may takes 50 years with longitudinal dispersivity of 50 m and transversal dispersivity of 5 m, respectively.

Key words : eigenvalue technique, truncation errors, time integration, sensitivity analysis, underground storage cavern

서 론

지하수 용질이동 문제의 해석에 있어 정확해를 얻기는 매우 어렵다. 해석하는 비교적 정확한 해를 구할 수 있으

나, 주로 균질 등방성인 대수층의 단순한 영역 내에서의 용질이동이나 매우 잘 형성된 층상대수층에서만 적용될 수 있는 한계가 있다. 이러한 어려움을 극복하기 위하여 최근 다양한 수치기법을 이용한 모형이 개발되었다. 수치

*Corresponding author: jtkim@kict.re.kr

모형은 실제적으로 공간적인 불규칙성을 해결할 수 있으나, 문제를 시간과 공간에 대해 이산화하며, 해행렬이 매 시간단계에서 순차적으로 풀리므로 용질농도예측에 많은 시간이 걸리는 단점이 있고 오염원으로부터의 거리가 먼 경우에 대해서는 수치절단오차가 축적된다. 이를 보완할 수 있는 방법으로 방정식들을 분리하며, 공간적인 영역만을 이산화하는 방법을 제시할 수 있다. 즉, 해는 시간에 대해 정확해가 되며 이 해를 고유치기법을 이용하여 구할 수 있다. 이를 이용하면 각각의 격점에서 시간의 함수로서의 양해적 표현을 얻을 수 있으며 임의의 위치와 임의의 순간에 대한 용질농도를 바로 계산할 수 있다.

따라서 시간적분을 위해 많은 시간이 소요되지 않으며 해는 모형화하는 전 영역에 대해 풀지 않고도 공간 내의 한 점에 대해 풀 수 있게되며 이에 따라 계산시간이 적고 절단오차가 없어지는 장점을 가지게 된다. 고유치기법(固有値技法)을 이용한 반해석적기법은 Kuiper (1973)가 대수층에서 수두계산에 처음 적용하였고, Sahuquillo(1983)가 천이조건에 적용하여 고유치 기법으로 부정류문제를 양해적으로 시간연속으로 풀었다. Guymon(1970)은 등가 변분원리를 1차원 용질수송방정식에 적용하였는데, 그는 유한요소해를 공간영역에 대해서 구하였으며 변수의 특별한 지수변환을 이용하여 계수행렬을 대칭의 행렬로 전환시킬 수 있었다. 더 높은 차원에서는 계수행렬을 얻기 위해 Guymon이 사용한 것과 유사한 전환방법을 찾기가 매우 어려웠으나, 분산계수가 클 경우에는 용질이동이 대류항에 민감하지 않게 되고 계수행렬이 시간에 비종속적이며 대칭이 되었다.

지하수 용질수송문제에 대한 고유치기법의 일반화는 Argonne National Laboratory(Smith, 1976)에서 개발한 Eispack(Matrix Eigensystem Routine Package)에 의해 가능하게 되었다. 이 Eispack을 이용한 경우, 대칭성에 무관하게 어떤 실행렬이든 고유치와 고유벡터를 구할 수 있다. 비대칭 행렬의 고유치와 고유벡터는 복소수가 된다. Hwang 등(1984)은 고유치기법을 2차원 지하수 용질이동 해석에 적용하여 해석해와 비교한 바 있다.

본 연구에서는 공간에 대하여는 일반적인 수치근사방법을 이용하고, 시간에 대해서는 해석적 기법을 이용하는 고유치기법의 수치모형을 실제 용질이동문제에 적용하였다. 이 기법은 시간절단오차를 배제한 반해석적(半解釋的) 특성을 가지므로, 오염물이동 매개변수의 변화를 여러 가지로 고려하기 쉽고 임의의 위치에서 임의의 시간에 대한 농도를 바로 계산할 수 있어 모의발생에 특별히 오랜 시간이 필요한 경우인 핵폐기물 저장지 지

하수 흐름에 의한 핵종(核種)의 이동문제나 저투수성 암반내의 장기간에 걸친 오염원의 이동문제를 다루기에 적합하다고 판단된다. 본 연구에서는 지하유류저장공동 주변과 같이 저투수성 지반내의 오염물의 거동을 평가하기 위해서 고유치 수치기법을 적용하였다. 저투수암반층에 설치되는 유류저장 공동의 효율적인 유지관리를 위한 안전성 평가는 주로 수리학적인 기밀조건을 결정함으로써 수행되고 있다(조원철과 정일문, 1997; 정일문 등, 1998; Chung *et al.*, 2003; Kim *et al.*, 2007). 그런데 최근들어 공동주변의 토양 및 지하수 오염과 지하공동의 안전성과의 관계에 대한 문제가 제기되고 있다. 예를 들면 지하공동 인접지역에 매립지를 설치하고자 하는 경우 매립지의 오염물질이 공동으로 유입되는지의 여부에 따라 유류오염을 방지할 수 있는 방법을 검토해 보아야 한다. 지하수는 일단 오염이 되면, 회복하기가 어렵고 회복하기 위해서는 매우 오랜 시간이 소요되므로 지하공동의 장기적인 유지관리를 위해서는 인접한 환경 유해시설(環境有害施設)로부터의 안전성 또한 검토되어야 한다. 이와 관련하여, 한일영 등(1996)은 AQUA모형(1992)을 이용하여, 공동 인접매립지에서의 침출수의 이동예측을 통한 수리학적 안전거리를 설정한 바 있다.

공동주변의 매립은 저투수성으로 용질이동시간이 매우 느리며, 따라서 모의시간이 매우 오래 걸리는 단점이 있다. 이런 경우 용질이동방정식에 포함된 여러 가지 매개변수의 변화에 따른 수치실험에는 많은 계산시간이 소요될 뿐 아니라, 출력결과를 복원 정리하는 작업 또한 방대해 진다.

본 연구에서는 일반적인 불균일 유속장에 계산을 위해 유한요소정식화에서 분산행렬을 2계 텐서 성분으로 고려하여 이송행렬의 불균일 유속장에 대한 용질이동을 모의하고자 하며, 용질의 장기거동해석을 위한 고유치 수치모형을 적용하여 장시간의 모의에 소요되는 계산시간 및 결과값 저장을 위한 파일용량의 효율화를 도모하고자 한다.

기본이론

용질이동 방정식

포화다공매질에서 2차원 용질이동의 지배방정식은 다음과 같다(Yeh와 Ward, 1981).

$$R \frac{\partial c}{\partial t} = n \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(D_{xx} \frac{\partial c}{\partial x} + D_{xy} \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_{yx} \frac{\partial c}{\partial x} + D_{yy} \frac{\partial c}{\partial y} \right) \right] - \left[\frac{\partial}{\partial x} (V_x c) + \frac{\partial}{\partial y} (V_y c) \right] - n \lambda R c + c^* \quad (1)$$

여기서, c : 오염물의 농도(mg/L)

$R = 1 + \frac{\rho_s k}{n}$: 지연계수(retardation factor)

ρ_s : 다공매질의 bulk 밀도

k : 오염물의 분배계수(distribution coefficient)

n : 다공매질의 간극율

$D_{xx}, D_{xy}, D_{yx}, D_{yy}$: 분산텐서(dispersion tensor)의 성분

V_x, V_y : Darcy 속도성분

λ : 1차 소멸상수

c^* : 오염원유체(source fluid)의 질량

용질이동방정식의 유한요소정식화

용질이동해석을 위해 고유치기법을 이용하기 위해서는 수치모형을 이용한 공간의 이산화가 이루어져야 한다. 이 경우 어떤 수치기법이든지 사용이 가능하며, 본 연구에서는 유한요소법을 이용하여 공간을 이산화 하였다. 용질이동방정식에 대한 Galerkin 유한요소정식화는 다음과 같다. 지배방정식인 식(1)에 참해 c 대신 근사해를 대입하면 다음과 같은 잔차를 얻을 수 있다.

$$R(x,y,t) = -nR \frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} + n \left[\frac{\partial}{\partial x} D_{xx} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial x} + D_{xy} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} (D_{yx} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial y} + D_{yy} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial x}) \right] - \left[\frac{\partial}{\partial x} (V_x \tilde{c}) + \frac{\partial}{\partial y} (V_y \tilde{c}) \right] - n\lambda R \tilde{c} + \tilde{c}^* \neq 0 \quad (2)$$

임의의 요소에 대해 가중함수를 도입하면 다음 식과 같이 표현된다.

$$\int_{\Omega^e} R(x,y,t) N_i^e d\Omega = 0 \quad (3)$$

(3)을 적분하면, 행렬과 벡터의 표기로 나타낼 수 있다(Yeh와 Ward, 1981).

$$\tilde{c}^T [M\dot{\tilde{c}} + (K - A + E)\tilde{c} - p] = 0 \quad (4)$$

여기서, $\dot{\tilde{c}} = \frac{d\tilde{c}}{dt}$ 를 의미하며, 각 항은 다음 식(5)~식(9)와 같다.

$$K = \int_{\Omega^e} \left[nD_{xx} \left\{ \frac{\partial N^e}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial N^e}{\partial x} \right\}^T + nD_{xy} \left\{ \frac{\partial N^e}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial N^e}{\partial y} \right\}^T + nD_{yx} \left\{ \frac{\partial N^e}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial N^e}{\partial x} \right\}^T + nD_{yy} \left\{ \frac{\partial N^e}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial N^e}{\partial y} \right\}^T \right] d\Omega \quad (5)$$

$$A = \int_{\Omega^e} \left[V_x \left\{ \frac{\partial N^e}{\partial x} \right\} \{N^e\}^T + V_y \left\{ \frac{\partial N^e}{\partial y} \right\} \{N^e\}^T \right] d\Omega \quad (6)$$

$$E = \int_{\Omega^e} n\lambda R N^e N^{eT} d\Omega \quad (7)$$

$$M = \int_{\Omega^e} n R N^e N^{eT} d\Omega \quad (8)$$

$$p = \int_{\Omega^e} c^* N^e d\Omega + \int_{\Gamma} \left[\left(nD_{xx} \frac{\partial c}{\partial x} + nD_{xy} \frac{\partial c}{\partial y} - V_x c \right) n_x + \left(nD_{yx} \frac{\partial c}{\partial x} + nD_{yy} \frac{\partial c}{\partial y} - V_y c \right) n_y \right] N^e d\Gamma \quad (9)$$

식(9)에서 우변의 첫 항은 오염원의 부하를 의미하며, 두 번째 항의 선적분은 경계조건을 나타낸다. n_x, n_y 는 x, y 축에서 법선방향으로 나가는 방향코사인인 나타낸다. 식(4)는 다음 식(10)과 같이 나타내어도 무방하다.

$$M\dot{\tilde{c}} + (K - A + E)\tilde{c} - p = 0 \quad (10)$$

고유치 기법을 이용한 해법

유한요소법을 이용한 공간이산화를 거친 식 (10)은 다음 식과 같이 변형할 수 있다(Hwang 등, 1984).

$$\dot{\tilde{c}} = -Bc + Fp \quad (11)$$

로 나타낼 수 있으며, B 와 F 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$B = M^{-1}(K - A + E) \quad (12)$$

$$F = M^{-1} \quad (13)$$

식 (11)의 일반해는 Bellman (1960)에 의해 다음과 같이 제시되었다.

$$c = e^{Bt} c_0 - (B^{-1} e^{-Bt} - B^{-1}) F p \quad (14)$$

여기서, c_0 는 초기농도이다. 식 (14)를 보면 지수항이 행렬임을 주목할 수 있다. 매시간별로 이러한 지수항을 계산하는 것은 매우 어렵다. 일반적으로 지수항은 멱급수형태로 전환될 수 있으며, 확장된 계산이 요구되지만 만일 행렬 B 가 대각행렬이면, 각각의 고유치인 λ_i 는 대각선 요소가 되며, 계산은 매우 간단해 질 수 있다.

B 행렬의 대각화를 위해 다음과 같은 가정을 한다.

$$c = \Gamma \xi \quad (15)$$

$$\dot{\tilde{c}} = \Gamma \dot{\xi} \quad (16)$$

식 (15)와 식 (16)은 유사변환과정에 의해 대각화가 가능하며, 이를 대입하면 식 (11)은 다음과 같이 변형된다.

$$\dot{\xi} = -\Gamma^{-1} B \Gamma \xi + \Gamma^{-1} M^{-1} p \quad (17)$$

또는,

$$\xi = -D\xi + Gp \tag{18}$$

여기서, D는 B의 고유치로 이루어진 대각행렬이다. Γ는 관련된 열고유치벡터로 구성된 고유벡터이다. 그리고,

$$G = \Gamma^{-1}M^{-1} \tag{19}$$

이다. 식 (18)은 다음과 같은 확장된 형태로 쓸 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_r \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \lambda_r \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_r \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_{1,1} G_{1,2} \cdots G_{1,r} \cdots G_{1,n} p_1 \\ G_{2,1} G_{2,2} \cdots G_{2,r} \cdots G_{2,n} p_2 \\ \vdots \\ G_{r,1} G_{r,2} \cdots G_{r,r} \cdots G_{r,n} p_r \\ \vdots \\ G_{n,1} G_{n,2} \cdots G_{n,r} \cdots G_{n,n} p_n \end{pmatrix} \tag{20}$$

시스템 방정식은 다음과 같이 독립된 방정식으로 분리된다.

$$\xi = -\lambda_r \xi_r + \sum_{i=1}^n (G_{r,i} p_i), r = 1, 2, \dots, n \tag{21}$$

식 (21)을 적분하면 다음과 같다.

$$\xi = A_r \exp(-\lambda_r t) + \left(\sum_{i=1}^n G_{r,i} p_i \right) / \lambda_r, r = 1, 2, \dots, n \tag{22}$$

A_r은 초기조건으로부터 구해지는 적분상수가 된다. 식 (15)로부터,

$$\xi_r = \sum_{i=1}^n (\Gamma_{r,i}^{-1} c_i), r = 1, 2, \dots, n \tag{23}$$

초기시간에 대해,

$$\xi_r = \sum_{i=1}^n (\Gamma_{r,i}^{-1} c_{i,0}), r = 1, 2, \dots, n \tag{24}$$

식 (22)로부터

$$\xi = A_r + \sum_{i=1}^n (G_{r,i} p_i) / \lambda_r, r = 1, 2, \dots, n \tag{25}$$

따라서, A_r은 다음과 같다.

$$A_r = \sum_{i=1}^n \Gamma_{r,i}^{-1} c_{i,0} - \frac{1}{\lambda_r} \sum_{i=1}^n G_{r,i} p_i, r = 1, 2, \dots, n \tag{26}$$

그리고,

$$\xi_r = \left(\sum_{i=1}^n \Gamma_{r,i}^{-1} c_{i,0} - \frac{1}{\lambda_r} \sum_{i=1}^n G_{r,i} p_i \right) \exp(-\lambda_r t) + \frac{1}{\lambda_r} \sum_{i=1}^n G_{r,i} p_i, r = 1, 2, \dots, n \tag{27}$$

식 (27)을 식 (15)에 대입하면, 각 절점에서 시간의 함수로 표현되는 식 (28)이 구해진다.

$$c_r = \sum_{i=1}^n \Gamma_{r,i} \xi_{i,t}, r = 1, 2, \dots, n \tag{28}$$

경계조건 중 일정플럭스 경계조건은 수학적으로 다음과 같이 표현된다.

$$-n_x \left(D_{xx} \frac{\partial c}{\partial x} + D_{xy} \frac{\partial c}{\partial y} \right) - n_y \left(D_{xy} \frac{\partial c}{\partial x} + D_{yy} \frac{\partial c}{\partial y} \right) = 0 \tag{29}$$

식(29)의 경계조건을 만족하는 경우는 일정한 플럭스가 통과하는 경계 또는 불투수경계에 해당한다. Dirichlet 경계조건은 Dirichlet 절점에 기지의 농도값을 주게 되며, 이를 이용하면 행렬 크기를 줄일 수 있다. 예를 들어 총 m개의 Dirichlet 절점이 주어진 경우 행렬형은 다음과 같이 된다.

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \\ \vdots \\ \dot{c}_m \\ \dot{c}_{m+1} \\ \dot{c}_{m+2} \\ \vdots \\ \dot{c}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \cdots & B_{1,m} & B_{1,m+1} & B_{1,m+2} & \cdots & B_{1,n} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \cdots & B_{2,m} & B_{2,m+1} & B_{2,m+2} & \cdots & B_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{m,1} & B_{m,2} & \cdots & B_{m,m} & B_{m,m+1} & B_{m,m+2} & \cdots & B_{m,n} \\ B_{m+1,1} & B_{m+1,2} & \cdots & B_{m+1,m} & B_{m+1,m+1} & B_{m+1,m+2} & \cdots & B_{m+1,n} \\ B_{m+2,1} & B_{m+2,2} & \cdots & B_{m+2,m} & B_{m+2,m+1} & B_{m+2,m+2} & \cdots & B_{m+2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{n,1} & B_{n,2} & \cdots & B_{n,m} & B_{n,m+1} & B_{n,m+2} & \cdots & B_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \\ c_{m+1} \\ c_{m+2} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \\ p_{m+1} \\ p_{m+2} \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \tag{30}$$

절점 1~m에서 농도는 전시간에 걸쳐 알 수 있고, $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_m$ 이 된다. Dirichlet 조건을 도입하면 식 (30)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \\ \vdots \\ \dot{c}_m \\ \dot{c}_{m+1} \\ \dot{c}_{m+2} \\ \vdots \\ \dot{c}_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & & & & \\ & 0 & 1 & \dots & 0 & & & \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ & 0 & 0 & \dots & 1 & & & \\ B_{m+1,1} & B_{m+1,2} & \dots & B_{m+1,m} & B_{m+1,m+1} & B_{m+1,m+2} & \dots & B_{m+1,n} \\ B_{m+2,1} & B_{m+2,2} & \dots & B_{m+2,m} & B_{m+2,m+1} & B_{m+2,m+2} & \dots & B_{m+2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{n,m+1} & B_{n,m+2} & \dots & B_{n,m} & B_{n,m+1} & B_{n,m+2} & \dots & B_{n,n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \vdots \\ \bar{c}_m \\ \bar{c}_{m+1} \\ \bar{c}_{m+2} \\ \vdots \\ \bar{c}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \\ p_{m+1} \\ p_{m+2} \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \quad (31)$$

식 (31)을 분리하면 다음 식 (32)와 같다.

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_{m+1} \\ \dot{c}_{m+2} \\ \vdots \\ \dot{c}_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_{m+1,m+1} & B_{m+1,m+2} & \dots & B_{m+1,n} \\ B_{m+2,m+1} & B_{m+2,m+2} & \dots & B_{m+2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{n,m+1} & B_{n,m+2} & \dots & B_{n,n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_{m+1} \\ C_{m+2} \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{m+1,1} p_1 - \sum_{j=1}^m F_{m+1,j} \bar{c}_j \\ F_{m+2,1} p_1 - \sum_{j=1}^m F_{m+2,j} \bar{c}_j \\ \vdots \\ F_{n,1} p_1 - \sum_{j=1}^m F_{n,j} \bar{c}_j \end{pmatrix} \quad (32)$$

$P_{m+1}, P_{m+2}, \dots, P_m$ 은 경계조건을 대입하므로써 구할 수 있다.

식 (31)로부터 다음 식 (33)이 얻어진다.

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \\ \vdots \\ \dot{c}_m \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \vdots \\ \bar{c}_m \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} F_{1,1} & F_{1,2} & \dots & F_{1,m} \\ F_{2,1} & F_{2,2} & \dots & F_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{m,1} & F_{m,2} & \dots & F_{m,m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} \quad (33)$$

한편, 위 식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m F_{1,j} p_j &= \bar{c}_1' + \bar{c}_1 = f_1 \\ \sum_{j=1}^m F_{2,j} p_j &= \bar{c}_2' + \bar{c}_2 = f_2 \\ \sum_{j=1}^m F_{m,j} p_j &= \bar{c}_m' + \bar{c}_m = f_m \end{aligned} \quad (34)$$

식 (34)에서 F_{ij} 는 일정한 계수이고, f_1, f_2, \dots, f_m 은 시간에 대한 기지의 함수이다. 행렬(F_{ij})는 삼각행화 될 수 있고, 곱해지는 요소는 삼각행화하는 동안에 결정된다. 즉 p_1, p_2, \dots, p_m 는 후진대입에 의해 결정되며, f_1, f_2, \dots, f_m 의 선형조합으로 시간의 함수이다. 식 (32)에서 행렬의 크기는 $n \times n$ 에서 $(n-m) \times (n-m)$ 으로 줄어든 것을 알 수 있다. 동일한 변환을 통하여 식 (15), (17)과 (32)는 다음과 같은 선형독립방정식으로 분리된다.

$$\xi_r = -\lambda_r \xi_r + \sum_{i=m+1}^n \Gamma_{ri}^{-1} \left(\sum_{j=1}^n F_{kj} p_j - \sum_{j=1}^m B_{ij} \bar{c}_j \right) \quad (35)$$

$r = m+1, m+2, \dots, n$

본 연구에서는 기존의 균일유속장에 대한 적용성을 불균일 유속장으로 확장하기 위해 식 (12)의 B행렬을 수정하였으며, 이는 유한요소 공간 이산화과정에서 수행된다. 즉, 요소 이송-확산 행렬에서 분산계수의 2계 텐서 성분과 함께 이송과정에서 x, y방향의 유속을 모두 고려할 수 있도록 하였다.

고유치기법의 검증

해석해와의 비교

본 연구에서 용질이동 수치모의에 적용할 고유치모형

의 검증을 위해 균일유속장을 갖는 식 (36)의 2차원 용질이동방정식의 해석해와 비교검토를 수행하였다.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - V \frac{\partial c}{\partial x} - \lambda c \quad (36)$$

오염원이 가우스 농도분포를 가지는 경우 Cleary와 Ungs(1978)가 제안한 해석해의 경계조건은 다음과 같다 (Gureghian *et al.*, 1980).

$$c = c_m \exp\left[-\frac{(y - Y_c)^2}{2\sigma^2}\right], \text{ at } x = 0 \text{ (mg/L)} \quad (37)$$

$$c = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial y} = 0, \text{ at } x = y = \pm \infty \quad (38)$$

여기서,

c_m : 오염원의 중심에서 최대 농도

Y_c : $x = 0$ 에서 오염원 중심의 y 좌표

σ : 가우스 분포의 표준편차

고유치기법을 검증하기 위해 상기한 가우스 농도분포를 경계조건으로 갖는 해석해와 비교하였으며, Table 1 과 같은 모형매개변수와 식(39)-(41)의 초기 및 경계조건에 대해 고유치 기법의 결과는 해석해의 결과와 좋은 일치치를 나타내고 있다(Fig. 1, Fig. 2).

$$c(x, y, 0) = 0.0 \quad 0 \leq x \leq 1800 \quad 0 \leq y \leq 900 \text{ (m)} \quad (39)$$

$$c(0, y, t) = \exp[-(y-400)^2/2 \cdot 130^2]$$

Table 1. Parameters for calibration of Eigenvalue Technique.

x (m)	y (m)	V _x (m/day)	V _y (m/day)	αL (m)	αT (m)
200	100	4.0	0.0	20.0	1.0

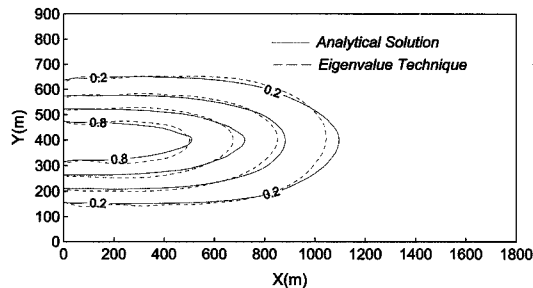


Fig. 1. Results of analytical solution and Eigenvalue Technique (t = 200 days, c/c_0).

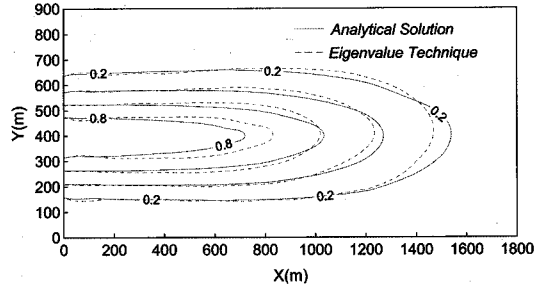


Fig. 2. Results of analytical solution and Eigenvalue Technique (t = 300 days, c/c_0).

$$0 \leq y \leq 900 \text{ (m)} \quad (40)$$

$$D \nabla c \cdot \bar{n} = 0 \quad y = 0 \text{ and } 0 \leq x \leq 1800$$

$$y = 900 \text{ and } 0 < x < 1800$$

$$x = 1800 \text{ and } 0 \leq y \leq 900 \quad (41)$$

수치모형과의 비교

고유치기법의 해와 수치모형 FEMWASTE(Yeh 등, 1981)의 해를 비교하기 위하여 Fig. 3과 같은 2차원 대수층에서 3년 후의 오염물의 상대농도를 계산하였다. 입력된 매개변수는 다음 Table 2와 같다.

동일한 조건에서 유한요소법을 이용한 수치모형과 고유치기법을 이용한 용질이동의 예측을 실시한 결과 Fig. 3과 같이 검증된 수치모형의 해와도 잘 적합하는 것으로 나타났다.

또한 시간변화에 따른 농도변화를 비교하기 위해 Fig. 3

Table 2. Parameters for comparison of Eigenvalue Technique and FEM.

V _x (m/day)	V _y (m/day)	n (porosity)	αL (m)	αT (m)
0.04	0.0	0.3	10.0	2.0

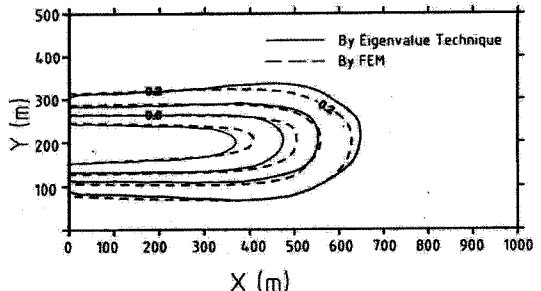


Fig. 3. Results of FEM and Eigenvalue Technique in horizontal 2D aquifer (t = 3 years, $C/C_0 = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$).

의 $x = 300 \text{ m}$, $y = 200 \text{ m}$ 지점에서의 시간에 따른 상대 농도를 Fig. 4에 도시하였다. 수치모형을 이용한 경우에는 원하는 모의기간에 대해 매시간 단계마다 전영역에 대한 계산을 수행해야 하므로 저장용량이 커지게 되나 고유치기법을 이용할 경우에는 원하는 모의기간이 시간 단계가 되어 한 번의 계산으로 임의의 모의기간에 대한 농도를 계산할 수 있다. 결과는 두 방법에 의한 농도값이 잘 적합하는 것으로 나타났다.

Fig. 5에는 두 방법의 상대적인 계산 시간을 비교하였다. 그림에서 나타난 것과 같이 수치모형은 모의시간이 커질수록 매시간단계마다 전영역에 대한 계산을 수행하게 되므로 계산시간이 증가하는 반면 고유치기법은 시간단계에 관계없이 원하는 시간에 대해 계산을 한번에 수행할 수 있으므로 모의시간과 무관하게 계산시간이 일정함을 나타내고 있다.

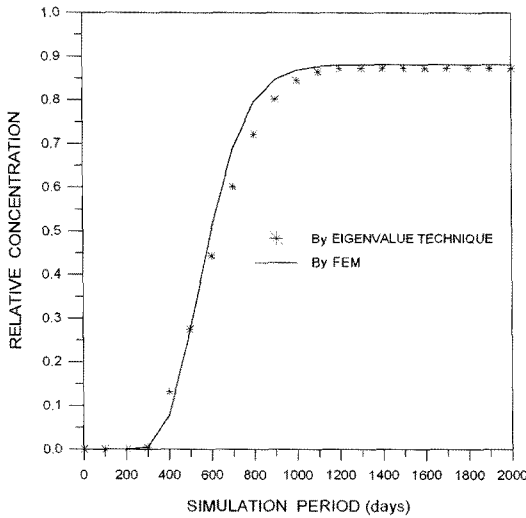


Fig. 4. Time variant solutions of FEM and Eigenvalue Technique.

수평2차원에서의 비교에서 적용된 것과 같은 매개변수를 사용하여 연직2차원의 대수층의 좌측상부에 오염원이 있는 경우를 고려하였다. Fig. 6과 같이 연직 대수층에 대해서도 두 기법의 결과가 잘 적합하는 것을 볼 수 있다.

고유치 기법의 적용

공동주변 부지의 수리지질학적 조건

공동주위 오염물 이동으로 인한 공동의 안정성 문제를 모의하기 위해 A저장공동을 선택하였다(한국석유개발공사, 1991). 암반내 LPG저장시설을 설치하기 위한 기본조건은 기반암의 압질, 풍화대의 심도, 적절한 지하수면의 높이 등이며 이러한 조건들이 만족되면 LPG와 지하수의 불용해성, 불혼합성 및 비중차에 의하여 저장된다. 기본조사시 시추공에서 구간별 수압시험이 실시되어 기반암 상부구간 및 기반암의 수리전도도가 측정되

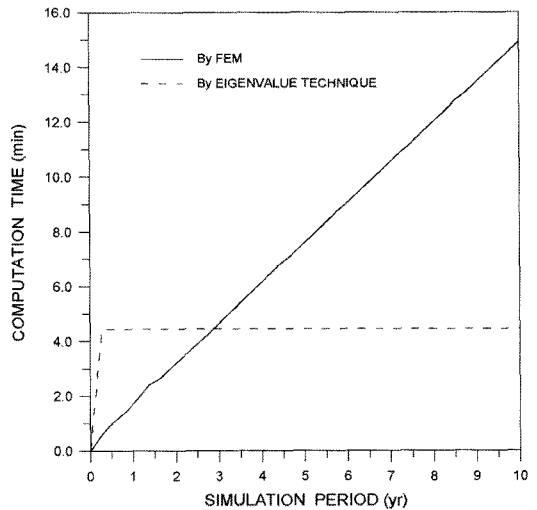


Fig. 5. Computation time of FEM and Eigenvalue Technique.

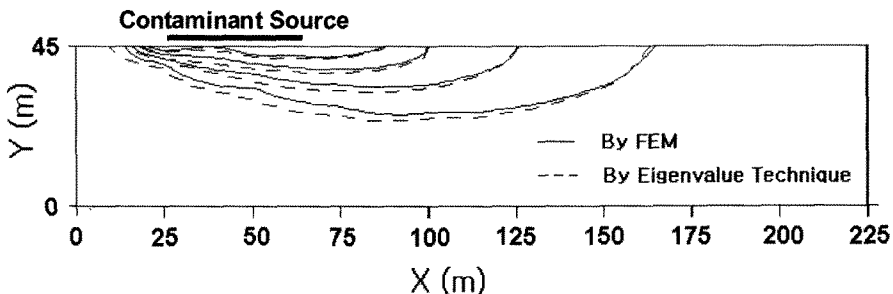


Fig. 6. Results of FEM and Eigenvalue Technique in vertical 2D aquifer ($t=200 \text{ days}$, $C/C_0 = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$).

었다. 이러한 측정 및 조사를 통해 LPG 저장공동이 장시간동안 저장기능을 유지하는가를 판단하는데 필요한 기본적 설계자료로 삼으며, 이를 위하여 조사구역내의 암석학적 및 구조지질학적 특성을 규명하고 지하수의 부존상태, 대수층의 수평적, 수직적 분포상태 및 경계조건과 대수층의 수리지질학적 특성 및 지하수의 충전, 배출상태가 공동주변 지하수체에 미치는 영향을 조사하고 분석한다(한국석유개발공사, 1985).

공동주변의 흐름장 계산

정상흐름상태에서의 용질이동을 모의하기 위해서 먼저 흐름의 해석을 수행하였다. 흐름방정식은 식(42)와 같고 해석단면은 다음 Fig. 7과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = 0 \quad (42)$$

Fig. 7에 나타난 바와 같이 저장공동은 2개가 존재한다. 그중에서 우측공동에서 오른쪽으로 150m 지점의 지표면(El. 18.0m)에 오염원이 존재한다고 가정하였다. 지하공동은 오염유해 지역으로부터 보호되어야 하며 수리학적 안전거리를 설정하므로써 이를 보호해야 한다. 공동상부에는 수막(water curtain)시설이 설치되어 있어 일정수두 조건($\Phi = \text{El.}5.0\text{m}$)이 적용되며, 공동경계상부와 하부에는 위치수두인 $\Phi = \text{El.}-115.0\text{m}$, $\text{El.}-135.0\text{m}$ 가 각각 적용되며 상부의 경계조건은 자유수면의 높이를 주었으며, 가장 낮은 곳은 좌측상부로서 El. -4.0m이며, 상부 중앙의 가장 높은 지하수위는 El. 24.0m 이고, 오른쪽 상부는 El.18.0m로서 지하수위는 중앙에서 좌우측으로 동수경사가 존재하며, 좌측으로의 흐름이 더 발달된 상태이다.

유한요소망은 1050개의 격점과 962개의 요소로 구성하였으며, 단면에 대한 불균일 유속장의 계산은 기확립된 흐

름수치모형(정일문 등, 1997)을 이용하였으며, Fig. 8에 나타내었다. Fig. 8에 나타난 바와 같이 유속은 수막위치에서 공동쪽으로 매우 크게 나타나며 공동내로 유입되는 형상을 나타내고 있다. 현재 상태는 공동에 유류가 저장되어 있지 않아 수막과의 입력차가 가장 크게 나타나는 경우이다. 즉, 유류가 저장되어 있는 경우에 비해 유속이 빨라짐에 따라 오염원이 도달하는 시간도 상대적으로 빨라져서 도달 시간 측면에서는 안전측으로 계산되기 때문이다. 또한 좌측상부에는 유속의 양상이 다소 불규칙하게 표현되며 수막의 직상부에서 유속방향이 상향인 지점도 나타나는데 이는 공동상부의 수두값이 수막의 수두값보다 작아서 오히려 상부쪽으로 유황(flow pattern)이 발달되기 때문이다.

공동상부의 오염원의 거동해석

예측에 사용한 매개변수로 간극율은 0.005로 가정하여 매질 내의 유효유속을 계산하였으며, 흡탈착을 무시하였다. 용질이동문제에서 불확실성이 가장 큰 분산지수의 선정에는 현장에서 얻은 추적자(tracer)시험자료가 필요하나 대상지역인 A공동주변에서는 이에 대한 자료가

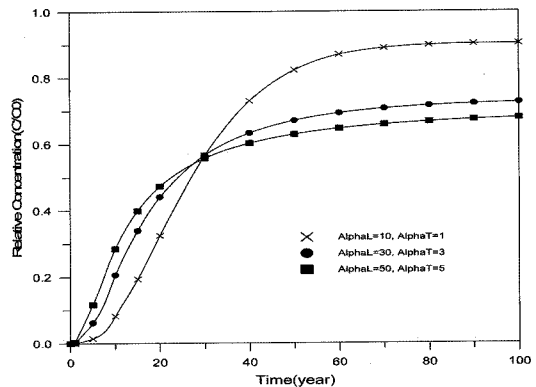


Fig. 8. Time variations of Relative concentration.

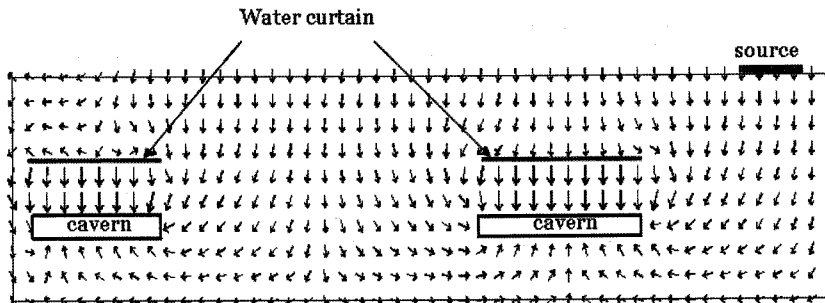


Fig. 7. Velocity vectors of simulation field (Max. velocity: 2.906E-03 m/sec, Min. velocity: 7.321E-08 m/sec).

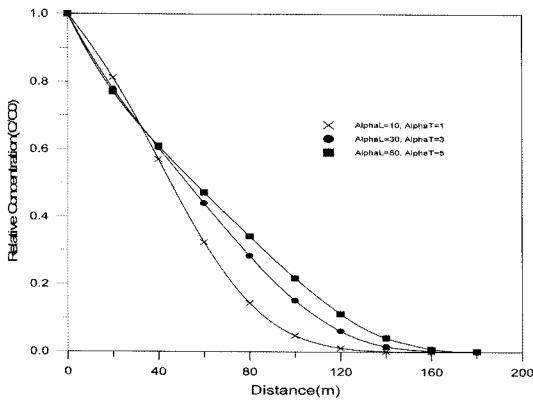


Fig. 9. Distance variations of Relative concentration.

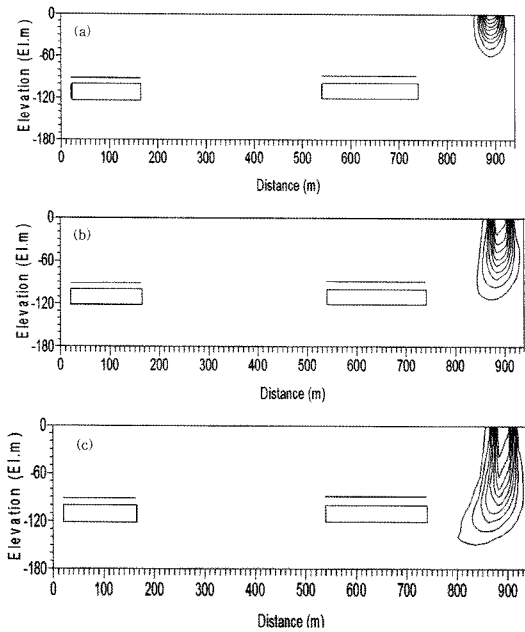


Fig. 10. Simulation of contaminant distribution ($\alpha_L = 10, \alpha_T = 1$) (a) T = 10 years, (b) T = 30 years, (c) T = 50 years).

전무하여 종분산지수(α_L)가 10 m, 30 m, 50 m, 횡분산지수(α_T)는 각각의 1/10인 1 m, 3 m, 5 m인 세가지 경우에 대하여 민감도 분석을 실시하였다.

민감도분석에서는 오염원의 하부 60 m 지점에서 각각의 분산지수에 대하여 시간에 따른 농도변화를 모의하였고, 오염원의 하부 방향으로 200 m에 걸쳐 20년이 경과된 후의 거리에 따른 농도변화를 분석하였으며 그 결과는 Fig. 8-9와 같다.

Fig. 8에 나타난 바와 같이 상대농도가 약 0.6 이상일 경우에는 분산지수가 클수록 농도의 도달시간이 빨라지며 그

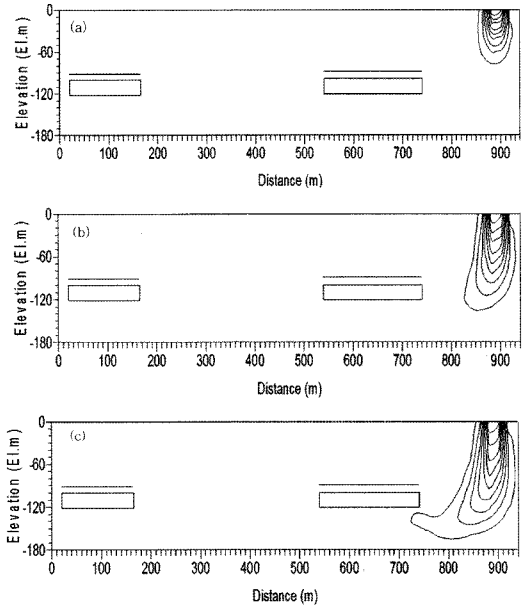


Fig. 11. Simulation of contaminant distribution ($\alpha_L = 30, \alpha_T = 3$) (a) T = 10 years, (b) T = 3 years, (c) T = 50 years).

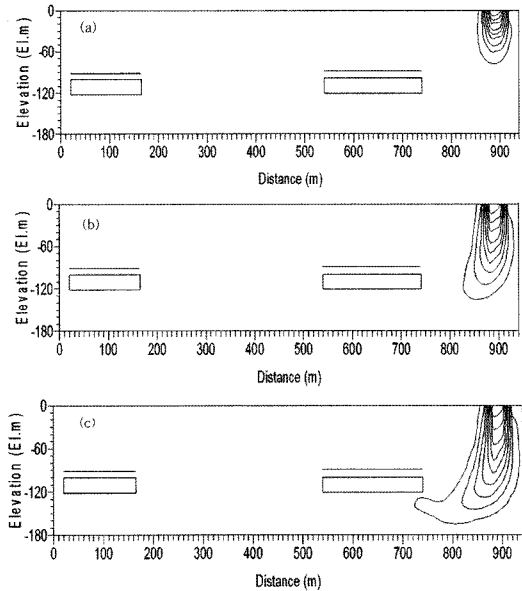


Fig. 12. Simulation of contaminant distribution ($\alpha_L = 50, \alpha_T = 5$) (a) T = 10 years, (b) T = 30 years, (c) T = 50 years).

이하일 경우에는 분산지수가 작을수록 도달시간이 빨라지는 것으로 나타났다. 또한 Fig. 9에서도 고농도범위에서는 분산지수가 큰 경우의 상대농도가 높고 저농도범위에서는 분산지수가 작을수록 상대농도가 높은 것을 알 수 있다.

공동주변의 오염물 이동을 모의한 결과를 Fig. 10~12에 나타내었다. 공동으로부터 150 m 위치에 오염원이 존재하는 경우 분산지수가 따른 농도분포의 변화를 도시하였으며 민감도분석의 결과와 같이 상대농도가 0.6보다 큰 경우에는 분산지수가 작은 경우가 빨리 도달하고 그보다 작은 경우에는 분산지수가 큰 경우가 빨리 도달하는 것으로 나타났다. 따라서 중분산지수가 50 m인 경우에 가장 빨리 공동에 도달하여 50년이 경과된 후에 공동이 오염되기 시작되는 것으로 확인되었다.

이상의 공동주변의 용질이동 예측결과로 볼 때 오염물의 이동은 수리전도도와 간극율에 의한 유효속도에 영향을 받는 흐름장에서 분산지수에 민감하게 반응하는 것을 확인하였다.

결 론

본 연구에서는 2차원 대수층내의 오염물 이동해석을 위해 고유치기법을 이용한 모형을 확립, 해석해와 수치모형의 결과와 비교검증하였으며, 본 연구를 통하여 얻은 결론은 다음과 같다.

(1) 고유치기법은 시간에 대한 이산화를 하지 않고 각 격점에 대하여 독립적으로 시간적분을 하므로 시간의 합수를 양해적으로 구할 수 있고 절단오차가 누적되지 않은 정확해를 구할 수 있었다.

(2) 고유치기법과 해석해와의 비교검증을 통해 고유치기법이 해석해를 이용한 결과에 매우 근접함을 확인하였고 임의의 위치, 임의의 시간에 대한 농도를 한 번의 계산으로 구할 수 있는 장점을 나타내었다.

(3) 고유치기법을 이용한 용질이동해석은 계산시간의 단축으로 다양한 매개변수 변화를 고려하는 민감도 분석에 편리하게 사용될 수 있으며, 본 연구에서와 같이 공동에 인접한 오염원의 도달시간을 모의하는 데 유리한 기법으로 확인되었다. 고유치기법을 이용한 오염이동의 모의는 시간에 대해서 해석적으로 계산되므로, 임의의 위치와 시간에서의 농도를 한 번의 계산으로 구할 수 있어 계산시간 및 결과치 추출에 매우 유리하다고 판단된다.

사 사

본 연구는 21세기 프론티어 연구개발 사업인 수자원

의 지속적 확보기술개발사업단의 3단계 연구사업(과제번호 2-2-3)의 연구비 지원에 의해 수행되었으며 이에 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

- 정일문, 조원철, 배덕효, 1997, 지하공동주변의 지하수 흐름해석을 위한 수치모형의 확립. 한국수자원학회 논문집, 30(1), 63-73.
- 정일문, 조원철, 허준행, 1998, 지하저유공동의 기밀성을 위한 수막시설의 수리학적 분석, 대한토목학회 논문집, 18(II-2) 131-139.
- 조원철, 정일문, 1997, 지하공동의 기체누출방지를 위한 수막시설 설치에 따른 지하수 흐름해석, 97년 비축기지 건설기술 세미나 논문집. 한국석유개발공사.
- 한국석유개발공사, 1985, A사업조사설계용역 기본설계보고서.
- 한국석유개발공사 1991, A비축기지 기본설계보고서.
- 한일영, 서일원, 오경택, 1996, 수치모의를 통한 지하 LPG저장시설에 인접한 폐기물 매립지에서의 침출수 이동예측 및 제어공법검토. 한국지하수환경학회지, 3(2), 51-59.
- Bellman, R. E. 1960, Introduction to Matrix Analysis, McGraw Hill.
- Chung, I. M., Cho, W. C., and Heo, J. H. 2003, Stochastic hydraulic safety factor for gas containment in underground storage caverns, Journal of Hydrology, Volume 284, Issues 1-4, 77-91.
- Guymon, G. L. 1970, A finite element solution of the one-dimensional diffusion-convection equation. Water Resources Research, 6(1), 204-210.
- Hwang, J. C., Cho, W. C., and Yeh, G. T. 1984, An eigenvalue solution continuous in time to the spatially discretized solute transport equation in steady groundwater flow. Water Resources Research, 20(11), 1725-1732.
- Kim, J. T., Cho, W. C., Chung, I. M., and Heo, J. H. 2007, On the stochastic simulation procedure of estimating critical hydraulic gradient for gas storage in unlined rock caverns, Geosciences Journal, 11(3), 185-270.
- Cleary, R. W. and Unger, M. J. 1978, Analytical models for groundwater pollution and hydrology, Water Resources Program Report, 78-WR-15.
- Gureghian, A. B., Ward, D. S., and Cleary, R. W., 1980, A finite element model for the mitigation of leachate from a sanitary landfill on Long Island, New York, Water Resources Bulletin, 16(5) 900-906.
- Kuiper, L. K. 1973, Analytical solution of spatially discretized groundwater flow equations. Water Resources Research, 9(4), 1094-1097.
- Pickens, J. F. and Lennox, W. C. 1976, Numerical simulation of waste movement in steady groundwater flow systems. Water Research, 12(2), 171-180.
- Sahuquillo, A. 1983, An Eigenvalue numerical technique for solving unsteady linear groundwater models continuously in time. Water Resources Research, 19(1),

87-93.

Smith, B. T. 1976, Matrix Eigensystem Routines-EIS-
PACK Guide, 2nd Edition, Springer-Verlag.

Yeh, G. T. and Ward, D. S. 1981, FEMWASTE : A Finite-
Element Model of Waste Transport through Satu-
rated-Unsaturated Porous Media, Oak Ridge National
Laboratory Environmental Science Division Publi-
cation ORNL-5601.

조원철

연세대학교 토목환경공학과

120-749 서울시 서대문구 정산로 262

Tel: 02-2123-2802

Fax: 02-364-5300

E-mail: woncheol@yonsei.ac.kr

2008년 11월 3일 원고접수, 2008년 11월 29일 게재승인

정일문

한국건설기술연구원 수문연구실

411-712 경기도 고양시 일산서구 대화동 2311

Tel: 031-910-0334

Fax: 031-910-0251

E-mail: imchung@kict.re.kr

김지태

한국건설기술연구원 수문연구실

411-712 경기도 고양시 일산서구 대화동 2311

Tel: 031-910-0529

Fax: 031-910-0251

E-mail: jtkim@kict.re.kr

김남원

한국건설기술연구원 수문연구실

411-712 경기도 고양시 일산서구 대화동 2311

Tel: 031-910-0256

Fax: 031-910-0251

E-mail: nwkim@kict.re.kr