East Asian Math. J. 24 (2008), No. 5, pp. 547-564

초등학교 5학년 학생의 자연수 혼합계산에서 나타난 오류에 관한 연구

백선수 · 김원경 · 문승호

ABSTRACT. The purpose of this study was to investigate 5th graders' performance for mixed operational problem. For this purpose, two kinds of studies were conducted: a descriptive study by pencil and paper tests(32 problems) and a clinical study by interviews. The conclusions drawn from the results obtained in this study were as follows: First, students were highly scored in pencil and paper tests(M=85.25%). But that score is not up to scratch. Because the problem was composed of simple calculations and if students calculate problems from only left side, they get 75% right answer, etc. Second, most of students solved mixed operational problems by text-based way, but some students solved flexibly. There are several error types. The main error type is students' following the wrong order of calculations. Some students have obstacles to express their thought with numerical expressions. So they make errors. Third, students solve mixed operational problems with various strategies. For examples, they solve problems by describing calculation procedures, drawing lines to indicate the order of calculations, carrying out two numerical expressions, etc.

1. 서론

기초적인 수학지식과 기능의 습득을 목표로 하는 초등 수학 교육과정에서 가장 핵심적인 영역은 '수와 연산' 영역이다. 수와 수를 이용한 계산은 일상생활에서 매일 사용되고 있고, 교육과정의 다른 영역 즉, 도형, 측정, 확률과 통계, 규칙성과 문제해결 영역과도 밀접하게 연관되어 있다. 그러므로 수와 연산 영역에서의 능통함(proficiency)[1]은 수학과 수학의 응용 분야에서 후속 교육을 위한 중요한 토대가

2008년 12월 투고, 2008년 12월 심사 완료
2000 Mathematics Subject Classification: 97D70
Key words: 자연수 혼합계산, 오류, 기호

1) 여기서의 능통함이란 개념적 이해(conceptual understanding: 수학적인 개념, 연산, 관계에 대한 이해), 절차적인 유창성(procedural fluency: 유연하고, 정확하며, 효율적이고, 적절하게 절차를 수행하는 기능), 전략적인 능력(strategic competence: 수학 문제를 만들고, 표상하며, 해결할 수 있는 능력), 적응적인 추론(adaptive reasoning: 논리적으로 사고하고, 반성하며, 설명하고, 정당화할 수 있는 능력), 생산적인 성향(productive disposition: 자신의 능력에 대한 민

된다(National Research Council, 2001, p. 2).

하지만, 교육현장에서는 수와 연산 영역의 내용을 지도할 때 수와 연산에 대한 근본적인 개념 혹은 원리의 이해 없이 단순히 기계적으로 알고리듬을 주입시키고, 깊은 사고 과정 없이 반복적인 계산을 통하여 정확한 답을 구하도록 하는 데에 초점을 맞추어, 학생들로 하여금 수학을 단순히 계산 기능을 익히기 위한 과목으로 인식되고 있다.

한편, 교사용 지도서(교육인적자원부, 2003)에서는 혼합계산 단원의 목표를 학생들이 혼합계산의 순서를 알고 계산할 수 있게 하는 것에 두고 있으며, 이를 지도하는 교사들도 수업시간의 많은 부분을 학생들이 혼합계산의 순서를 익혀서 바르게 적용하게 하는 것에 할애하고 있다. 그러나 교사들의 이러한 집중적인 지도에도 불구하고 혼합 계산을 학습한 학생들 중에서 많은 수가 혼합계산 문제를 어려워하고 있으며, 실제로 혼합계산 문제를 해결하는 데 있어서 이미 학습한 계산의 적용순서를 기억해 내지 못하여 문제해결에 실패하고 있다. 이러한 현상은 한국교육과정평가원에서 2003년에 초등학교 6학년들을 대상으로 시행한 국가수준 학업성취도 평가의 연구 결과 보고서에 나타난 다음과 같은 분석내용을 통해 더욱 명백하게 확인할 수 있다(조영미 외, 2004).

> 혼합계산 문제[2]의 결과를 보면, 전체 정답률이 46.3%로 낮은 가운데, … 성취수준별 정답률을 보면, 우수 학력은 86.5%로 높은 데 반해 보통 학력은 47.0%로 50%에 이르지 못하였다. 이는 보통 학력 학생들이 혼합계산 문제에서 이 부분에 상당히 취약하다는 것을 말해 준다.

혼합계산을 이해한다는 것은 계산 순서에 대한 이해, 각 계산에 대한 개념적 의미의 이해, 계산과 계산의 관계에 대한 논리적인 사고, 계산이 적용되는 상황에 대한 폭넓은 개념적 이해, 혼합계산과 실생활과의 관계에 대한 이해 등을 필요로 한다. 그러나 불행히도 학생들은 덧셈, 뺄셈의 단순 연산을 적용하는 문제를 구성할 때도 연산이 적용되는 상황에 대한 좁은 개념적 이해 때문에 다양한 상황을 구성하지 못한다고 한다(English, 1995). 또, 이와 같은 이유에 대하여 Rathmell & Huinker(1989)는 학생이 연산에 대하여 하나의 관점을 갖고 있기 때문이라고 한다. 예를 들어 덧셈은 합치는 것(합병)이고 빼기는 덜어내기, 감소시키는 것(구잔)이고, 곱셈은 반복되는 덧셈(동수누가)이고 나누기는 반복되는 빼기(동수누감)라고만 생각한다는 것이다.

음과 함께 수학을 사리에 맞고, 유용하며, 가치 있는 것으로 보는 습관적인 경향)의 5가지 요소로 구성된다.

2) 4+3×12-8÷2

이처럼, 혼합계산을 해결하는데 있어서 많은 학생들이 어려움을 겪고 있는데도 불구하고 이에 대한 상세한 실태 분석은 거의 이루어지지 않고 있다. 또한, 많은 교사들은 학생들이 혼합계산을 하지 못하는 주된 이유가 자신들이 가르쳐 준 혼합계산의 연산적용 순서를 기억해 내지 못했기 때문이라고만 생각하여[3] 학생들에게 연산적용의 순서를 되풀이해서 반복 암기하게 하는 것만을 대안으로 생각할 뿐, 그 외에는 다른 어떤 대안도 생각하지 못하는 실정이다.

따라서 본 연구에서는 학생들의 혼합계산 문제해결 실태와 오류를 분석하고자 한다. 오류는 잘못 학습된 것을 가지고 새로운 문제 상황에 확장함으로써 발생되는 것이고(Vanlehn, 1982), 새로운 절차에 선행지식을 통합하려는 시도에 대한 자연스러운 결과이므로(Resnick, et al., 1989), 교사는 학생의 오류를 파악함으로써 잘못 학습되어진 개념들과 문제해결과정에서 나타난 불완전한 해결 전략 등의 학생들의 사고 과정을 이해할 수 있을 것이다. 나아가 이러한 과정을 통해 교수·학습의 실태를 파악할 수 있음은 물론 새로운 교수 방법을 수립하는데 도움을 받을 수 있을 것이다.

따라서 본 연구에서는 초등학교 5학년 학생의 혼합계산에서 나타나는 오류를 분석함으로써 혼합계산과 관련된 아동의 지식과 수행 능력을 파악하여, 혼합계산의 바람직한 교수·학습에 대한 시사점을 제공하는데 그 목적이 있다. 이러한 연구 목적을 위해 설정한 연구 문제는 다음과 같다.

1. 초등학교 5학년 학생들의 혼합계산 문제를 해결하는 능력은 어떠한가?
2. 혼합계산 문제에 대한 초등학교 5학년 학생들의 올바른 풀이 유형과 오류 유형은 무엇인가?
3. 초등학교 5학년 학생들은 혼합계산 문제를 어떻게 해결하는가?

2. 이론적 배경

본 장에서는 혼합계산에 대한 이해와 수학교육에서 오류의 의의, 수학적 오류의 유형에 대하여 살펴본다.

(1) 혼합계산에 대한 이해

학생들이 혼합계산에 대하여 온전히 이해하기 위해서는 다음과 같은 것들을 알고 있어야 한다.

---

3) 한국교육과정평가원의 연구 보고서(조영미 외, 2004)에서도, 정답률에 가까운 수치인 44.6%의 학생들이 보인 실패의 원인을 주어진 혼합계산 문제일 경우에는 곱셈이나 나눗셈 계산을 먼저 해야 하는데, 그런 식으로 계산하지 않고 '앞에서부터 차례로 계산'하였기 때문으로만 분석하고 있다.

첫째, 혼합계산을 이루는 연산과 연산의 관계에 대한 이해의 하나로 혼합 연산식에서의 연산 순서를 파악하고 있어야 할 것이다. 혼합 연산의 순서는 덧셈, 뺄셈과 곱셈, 나눗셈이 섞여 있는 식에서 곱셈, 나눗셈을 먼저 생각해야 하고, ( )가 있는 식에서는 ( )안의 내용을 먼저 생각해야 한다. 이와 같이 사칙 연산의 각 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈이 섞여 있는 식이 만들어지고 연산 순서가 정해지는 이유는, 실제 생활 장면의 문제를 해결하기 위해서 필연적으로 그와 같은 식과 계산 규칙이 만들어질 수밖에 없기 때문이다. 따라서 연산 순서를 파악한다는 것은 연산과 연산의 관계를 파악한다는 것이고, 실생활에서 혼합 연산이 이루어지는 상황에 대해서 이해한다는 것이다. 따라서 생활 장면의 상황 속에서 아동에게 제시되어야 하고 기계적으로 아동에게 암기하도록 제시되어서는 안 될 것이다(교육인적자원부, 2003).

둘째, 혼합계산에 대한 이해를 위해서는 혼합계산을 이루는 각 연산에 대한 개념적 의미를 이해하는 것이다. 연산의 개념적 의미를 이해한다는 것은 각 연산의 형식적인 기호만이 아닌 구체적인 장면에서 연산이 적용되는 상황을 바르게 해석하고 추상적인 수의 모형을 통해 시각화하고 이를 연결시킬 수 있는 것을 말한다(구광조 외, 1988).

셋째, 혼합계산에 대한 이해를 위해서는 각각의 연산의 개념적 의미의 이해뿐만 아니라 혼합 연산을 이루는 연산과 연산의 관계에 대하여 논리적으로 사고할 수 있어야 한다. 예를 들어 혼합계산 '9+6×2'와 같은 문제를 해결하기위해서는 6×2의 곱과 9의 합이 이 혼합계산의 결과가 된다는 논리적인 관계를 이해하여야 할 것이다.

넷째, 혼합계산을 이해하기 위해서는 혼합 연산은 실생활에서 나타나는 장면의 계산적인 부분이고 혼합 계산식은 이런 계산적인 부분을 수식화 해 놓은 것(교육인적자원부, 2003)이라는 혼합 연산과 실생활과의 관계에 대한 이해가 있어야 한다.

이상으로 알 수 있는 것처럼 혼합계산을 이해한다는 것은 연산 순서에 대한 이해, 각 연산에 대한 개념적 의미의 이해, 연산과 연산의 관계에 대한 논리적인 사고, 연산이 적용되는 상황에 대한 폭넓은 개념적 이해, 혼합 연산과 실생활과의 관계에 대한 이해 등을 필요로 한다.

(2) 수학교육에서 오류의 의의

수학 교육에서 오류 연구가 시작된 초기에는 오류가 학습하는 과정에 무엇인가 잘못되어 교정을 필요로 하는 징후로만 여겨져 왔다(Borasi, 1987). 그러나 그와 같은 오류를 아동의 사고 과정을 드러내는 것으로 해석하는 학자들이 등장하게 되었다(Vanlehn, 1982).

아동의 오류의 발생 원인은 이미 형성된 지식과 새로운 지식의 연결의 관점에서 이해할 수 있다. Vanlehn(1982)은 아동이 잘못 학습된 지식을 가지고 새로운 문제

상황에 확장함으로써 발생된다고 하였으며, 아동이 저지르는 체계적인 오류 패턴은 아동이 자신들이 들은 것을 이해하고 주어진 문제를 수행하려는 시도에 대한 자연스러운 결과이며, 수학적인 개념을 이해하지 못한 채 상징적인 기호 측면에서 다루기 때문에 오류가 발생한다고 하였다(Resnick, et al., 1989).

위와 같은 이유로 수학교육자들에게 오류는 다양한 교육적 의의를 갖는다. 첫째, 수학의 다양한 주제에 대한 아동의 지식과 지식 구성방식을 이해할 수 있고 둘째, 문제 해결과정에 대한 아동의 사고 과정을 드러내어 그 원인을 진단할 수 있는 도구로 유용하게 사용될 수 있다. 특히 계산 과정에서의 오류는 아동이 형성한 부정확한 알고리즘의 원인을 규명할 수 있게 해 준다(이경아, 1996). 셋째, 오류 분석을 통하여 오류를 발생시키는 내용에 대한 교수 방법의 개선을 가져올 수 있다.

또한 Asulock(1982)은 아동이 무엇을 할 수 있고 무엇을 못하는지 교사는 관찰할 필요가 있으며, Radatz(1979)는 오류 분석이 아동의 문제 해결 과정에 나타나는 오류의 원인을 발견할 수 있는 절차로, 수학 학습 과정에 관한 다양한 연구 주제와 방법을 제공하며, 오류의 진단과 원인에 대한 사고 과정은 수학 교사들의 개인적인 지식과 교육 과정 내용을 통합시켜 학생들에게 아주 특별한 값진 도움을 줄 수 있다고 하며 오류 분석의 중요성에 대해 언급하고 있다.

수학교육에서 오류는 이러한 교육적 의의로 인해 중요한 이슈로서 오랫동안 연구되어져 왔다. 초기의 오류 연구는 주로 산술적인 계산 분야에서 30개 이상의 연구(Buswell & Judd, 1925; 오정현, 1996에서 재인용)가 있었으나 최근에는 계산 분야에만 제한되지 않고 다양한 범위에서 연구의 관심이 증가되었다. 나아가 최근의 연구에서는 오류를 아동의 인지 구조를 이해하고 미숙한 전략이나 잘못된 지식을 교정하는 단계를 지나, 탐구학습에서 탐구에 대한 자극과 촉진제로서 오류를 이용할 수도 있다고 한다(Borasi, 1987; 1994).

(3) 수학적 오류의 유형 분석

교수학습 과정에서 나타나는 오류는 실제로 매우 복잡한 과정에 대한 결과이며, 오류들 사이에는 서로 밀접한 관련이 있어 오류를 분석하여 명확히 분류라는 것은 어렵다. 이것은 오류가 여러 가지 원인에 의해 발생하고 같은 원인의 오류가 다른 문제 풀이 과정에서 발생할 수도 있으며, 똑같은 문제라 해도 다른 원인에 의해 오류가 발생할 수도 있기 때문이다(김옥경, 1991에서 재인용). 특히 계산상의 문제에서 오류는 문항의 형식과 밀접한 관련이 있어서 같은 아동이라 하더라도 문제의 형태에 따라 나타나는 오류유형이 다르다고 한다(Blando, et. al., 1989). 그러나 오류의 원인에 대한 인지적인 모델을 가진 오류 패턴을 설정, 이를 분석함으로써 아동의 인지에서 나오는 오류의 원인에 대한 풍부한 근거를 제공할 수 있다(이영숙, 1998). 이에 따라 오류 연구에서 오류 유형에 대한 연구는 많은 학자들에 의해 다

양한 영역에서 이루어져왔으며, 오류 연구에서 가장 많은 부분을 차지하는 것이 오류를 분류해서 범주별로 나누는 것이다. 이에 본 연구도 오류를 범주화하여 그 특징을 고찰하는 것이므로 본 장에서는 오류를 분석하여 범주화한 연구를 다음과 같이 두 부분으로 나누어 자세히 살펴보기로 하겠다.

가. 계산에서의 오류 유형 분석

계산에서의 오류는 부주의한 결과로 인해서, 혹은 시작하는 법을 알지 못하는 경우도 있지만, 그렇지 않고 체계적으로 나타나는 오류도 많은 부분을 차지한다. 질적으로 학생들의 계산적 오류를 분석한 Robert는 다음과 같은 4가지 오류 범주를 제안하였다(Asulock, 1982).

① 잘못된 연산: 학생들이 그 문제를 해결하는 데 필요한 연산보다는 다른 연산을 수행하여서 답하는 경우이다.

② 명백한 계산적 오류: 학생들은 올바른 연산을 사용했지만, 기본적인 수 구구(Basic number facts)를 생각하는데 오류를 발생시키는 경우이다.

③ 결함 있는(defective) 알고리즘: 학생들은 올바른 연산을 적용했지만 계산 과정에서의 오류보다는 받아올림을 하지 않았거나 곱하는 순서가 틀린 경우 등의 오류를 말한다.

④ 임의의 대답: 대답이 주어진 문제와 식별할 수 없는 경우이다.

Robert의 방법을 확장하여 Engelhart(1997)는 계산에서의 학생들의 오류 범주를 다음과 같이 8가지로 제안하였다(구미애, 1999 재인용).

① 기본적인 수 구구(basic facts) 오류: 기본적인 수 구구를 회상하는데 있어서 범한 오류로, 예를 들면 4+3을 7이 아닌 8로 착각하거나, 63÷7을 9가 아닌 8로 인식하는 경우이다.

② 결함 있는 알고리즘(defective algorithm): 체계적이고 잘못된 절차를 수행하는 경우인데, 이런 오류는 하나의 임의의 반응에서 규명할 수는 없고, 여러 유사한 계산 과제에 대한 반응을 통해 확인할 수 있다. 예를 들면 오른쪽 계산과 같은 경우인데, 이 예에서 학생은 곱셈 알고리즘을 이해하지 못하여 일의 자리 수와 일의 자리 수를 곱한 후, 십의 자리 수와 십의 자리 수를 곱했다. 그리고 백의 자리 수 1은 그대로 내려 주었다.

$$\begin{array}{r} 1\,2\,3 \\ \underline{\times\ 4\,2} \\ 1\,8\,6 \end{array}$$

③ 자리 수 계산 오류: 수 체계에 대한 잘못된 자리 수 계산 방법을 사용함으로써 발생한다.

④ 부적절한 전환(inappropriate inversion): 계산 과정에서 고착화된 반응이 나오는 경우이다. 예를 들면 43-19=36, 23×7=152 등이 있다.

⑤ 잘못된 연산: 알맞은 연산보다는 다른 연산을 사용한다. 예를 들면, 2×7=5, 13-1=14 등이 있다.

⑥ 항등식(identity)의 오류: 0과 1을 포함하는 문제를 계산하는 과정에서 항등 연산 원리를 혼동하는 경우이다.

⑦ 영(zero)의 오류: 0을 포함하는 문제를 계산하는 과정에서 영 개념을 어려워하여 발생하는 오류이다.

또한 산술 오류에 대한 연구는 실제적으로 다양한 학습 문제에서 필요하므로, Cox(1975)는 자연수에 대한 덧셈, 뺄셈, 나눗셈 알고리즘에서 발생되는 체계적인 오류를 다음과 같이 5가지 범주로 나누어 분석하였다(구미애, 1999 재인용).

① 체계적인 오류: 5문제 중 3문제를 놓치며, 그 알고리즘에서 똑같이 잘못된 형태로 반응하는 경우

② 임의의(random) 오류: 5문제 중 3문제를 놓치지만, 패턴 혹은 체계적인 잘못된 과정이 발견되지 않는 경우

③ 부주의한 오류: 5문제 중 하나 혹은 두 문제를 놓쳤지만, 기본적으로 알고리즘 수행하는 방법을 알고 있을 경우

④ 오류가 없는 경우: 5문제 모두 올바르게 해결한 경우

⑤ 불완전한 자료 오류: 5문제를 모두 풀지 못해 위의 범주에 분류되지 못하는 오류

나. 혼합 계산과 관련된 오류

혼합 계산과 관련하여 학생들이 보이는 오류의 유형을 구체적으로 분석한 연구는 없었다. 다만, 초등학교 4, 6학년 학생을 대상으로 혼합 연산을 적용하는 문제 만들기에서 나타나는 오류를 구미애(1999, p.75)는 아래와 같이 범주화하였다.

① 잘못된 연산 순서의 적용: 연산 순서에 대한 이해가 부족하여, 숫자의 제시 순서와 연산 순서가 다를 때, 숫자 순서대로 문제를 구성하거나 임의 순서로 문제를 구성하는 오류

② 1단계 연산 개념의 오류: 연산의 순서를 이해하고 문제를 구성하지만, 1단계 연산의 개념적 의미의 이해 부족으로, 연산이 적용되는 상황을 구성하지 못하는 오류

③ 2단계 연산 개념의 오류: 1단계 연산의 상황은 잘 구성하였으나, 연산과 연산의 관계에 대한 이해 부족과 연산이 적용되는 상황에 대한 제한적인 개념으로, 2단계의 연산이 적용되는 상황을 구성하지 못하는 오류

④ 질문 제시의 오류: 혼합 연산이 적용되는 상황은 잘 구성하였으나, 혼합 ㅇ녀산의 결과에 대한 논리적인 사고의 부족과 문제 만들기에 대한 경험의 부족으로, 혼합 연산의 결과를 질문으로 제시하지 못한 오류

⑤ 불합리한 상황 구성: 구성한 문제가 주어진 혼합 연산을 적용하는 문제이기는 하나, 혼합 연산과 실생활과의 관계에 대한 이해 부족으로, 현실적으로 불가능

한 상황을 구성하는 경우

⑥ 무응답: 혼합 연산을 적용하는 문제 만들기 문항에 대하여 응답이 없는 경우

3. 연구방법 및 절차

(1) 연구 대상 및 연구 방법

본 연구는 학생들의 학력수준과 가정의 사회경제적 수준이 중간 정도에 속하는 대구 소재의 한 초등학교에서 5학년 1개 반(32명)을 임의로 선정하여 연구대상으로 삼았다. 5학년 학생을 연구대상을 삼은 이유는 자연수 혼합계산능력을 조사하기 위해서는 그것을 학습하고 난 후 1년 정도의 시간이 경과한 후가 적절하다고 공동연구자들이 판단하였기 때문이다.

연구 방법은 초등학교 5학년 학생의 혼합계산 능력에 대한 실태를 분석하기 위해 검사 도구를 통한 조사연구방법과 조사된 결과를 심층 분석하기 위한 면담의 방법을 병행하였다.

(2) 검사 도구

본 연구의 목적은 혼합계산 문제에 따른 학생들의 해결 실태를 분석하는데 있으므로 다양한 혼합계산 문제를 출제하여 학생들의 반응을 살펴야겠지만, 연산자가 2개만 포함된 유형만으로도 본 연구의 목적을 달성할 수 있다고 판단하였기에, <표 1>과 같은 문제 유형을 각각 2문제 개발하였다. 이때, 왼쪽이나 오른쪽의 연산자를 먼저 계산하여도 결과가 자연수가 되도록 하여, 계산의 난이도에 따른 계산 순서의 선택에 영향을 미치지 않도록 하였다.

<표 1> 자연수 혼합계산능력 검사 문제 유형

문제 유형			
A+B+C	A−B+C	A×B+C	A÷B+C
A+B−C	A−B−C	A×B−C	A÷B−C
A+B×C	A−B×C	A×B×C	A÷B×C
A+B÷C	A−B÷C	A×B÷C	A÷B÷C

(3) 검사의 실시 및 자료 수집

1) 예비 검사 실시

예비검사는 본 연구 대상 학교와 비슷한 수준의 경기도 고양시 소재의 H초등학교 5학년 1개 반을 대상으로 자연수 혼합계산에 대한 제반 정보(검사시간, 검사 문

항의 진술 형태와 난이도, 검사 문항 수, 검사 실시 상 유의점)를 확인하기 위해서 예비 검사를 실시하였다.

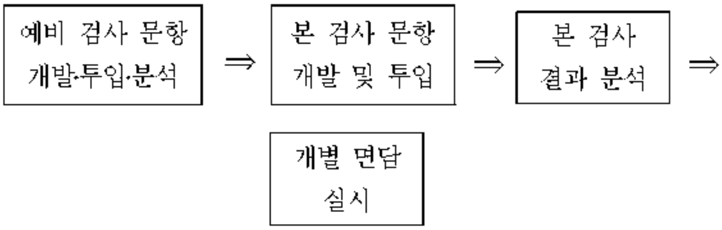
2) 본 검사 실시

1차의 예비 검사를 실시하여 나온 문제점을 수정한 뒤, 본 검사를 2008년 4월 14일에 담임교사가 아침 자습 시간을 이용하여 실시하였고, 검사시간은 30분이 주어졌다. 그리고 문제를 다 해결하지 못한 학생에게는 추가적인 시간을 3~5분간 더 주었다.

3) 학생 개별 면담

본 검사 결과를 분석하는데 있어서 2가지의 틀을 사용하였다. 하나는 전체 학생의 반응 경향을 분석하는 것이 하나이고, 다른 하나는 개별학생의 반응 경향이 그것이다. 특히 후자의 경우, 독특하게 반응하는 학생이 3명이 있었는데, 각각의 학생에 대하여 6월 3일 개별면담을 실시하였다. 개별 면담 방법은 학생들에게 예전의 문제를 그대로 주고, 독특하게 반응을 보인 문제만 다시 해결하도록 하면서 자신의 해결방법을 크게 말하면서(Think aloud) 풀도록 하였고, 그것을 녹음하였다.

이상의 과정을 그림으로 나타내면 다음 [그림 1]과 같다.



[그림 1] 연구 과정

(4) 자료 분석

1) 지필 검사 분석

지필 검사 결과를 총점과 평균, 표준편차, 정답률(%)을 각각 구하였고, 개인별 득점 분포도 분석하였다. 그리고 문항별로 정답 유형과 오류 유형을 범주화하여 분석하였으며, 학생들의 다양한 문제해결 방법에 대해서도 분석하였다.

2) 개별 면담 분석

특이한 반응을 보였던 3명의 학생들을 대상으로 면담을 실시했으며, 그것을 녹음하여 그러한 반응을 보였던 원인이 무엇인지에 초점을 두고 기술 형식으로 분석하였다.

(5) 연구결과

1) 연구 문제 1의 결과

연구 문제 1을 해결하기 위해서 32문항의 검사 문항을 개발하여 32명에게 검사를 실시하였으며, 문항별로 1점을 배점하였다. <표 2>에서 보는 바와 같이 정답률이 85.25%로 비교적 높은 성취도를 보였다고 볼 수 있다.

<표 2> 본 검사 결과

검사 도구	N	T	M	SD	정답률(%)
혼합계산 평가지	32	873	27.28	4.15	85.25

하지만, 계산 결과가 두 자리 수 이하의 자연수로 나타나는 비교적 간단한 문제들로 구성되었다는 점과, 계산 순서에 상관없이 계산 결과가 같은 경우가 8문제인 점[4], 그리고 계산 순서를 고려하지 않고 무조건 앞에서부터 차례대로 계산하더라도 예상 정답률이 75%인 점 등을 고려한다면 85.25%가 결코 높은 성취도라고 볼 수 없다. 더욱이 약 1/4의 학생들(8명)이 9+7-4를 9+7=16-4=12와 같이 해결했는데, 이와 같이 등호를 잘못 사용한 풀이를 오답 처리할 경우에는 정답률이 훨씬 떨어질 것이다.

한편, 학생들의 개인별 득점 분포를 조사한 결과는 아래 <표 3>과 같았다.

<표 3> 개인별 득점 분포

점 수	⋯	20	21	22	23	24	⋯	30	31	32	합계
학생 수	0	1	0	2	4	9	0	2	6	8	32

<표 3>을 보면 학생들을 크게 두 부류 즉, 22~24점에 속한 학생들(15명)과 30~32점에 속한 학생들(16명)로 나눌 수 있다. 나중에도 언급하겠지만, 22~24점에 속한 학생들은 검사 도구에 사용된 문항들 중에 A-B×C와 같이 우측에 있는 두 수를 먼저 계산해야 하는 문제들(8문제)을 잘 해결하지 못하였다. 이는 약 50%의 학생들이 혼합계산의 순서를 제대로 알지 못한다는 것과 일맥상통한다고 할 수 있다. 반면에 약 50%의 학생들이 30~32점에 속한다는 것은 우수한 학생들은 거의

4) 1번 문항인 9+7-4는 계산 순서를 달리한 (9+7)-4의 결과와 9+(7-4)의 결과가 같다. 이와 같이 계산 순서에 상관없이 계산 결과가 같은 경우는 A+B+C, A+B-C, A×B×C, A×B÷C의 4종류로 총 8문항이 검사 도구에 포함되었고, 이들 문제를 제외하여 정답률을 구할 경우엔 80.99%로 정답률이 떨어졌다.

완벽하게 혼합계산 문제를 해결할 수 있다는 것으로 해석할 수 있다.

2) 연구 문제 2의 결과

예비 검사와 본 검사 결과를 토대로 채점 기준을 정하면서 학생들의 반응을 여러 번 관찰함으로써 다음 <표 4>와 같은 올바른 풀이와 오류 유형을 구성할 수 있었다.

<표 4> 올바른 풀이와 오류 유형

올바른 풀이 유형	오류 유형
1-1. 교과서에 제시된 계산 순서대로 계산한 경우 1-2. 오른쪽부터 먼저 계산하여 정답을 구한 경우: 예) $A+B+C$, $A+B-C$, $A\times B\times C$, $A\times B\div C$에서 B와 C를 먼저 계산하여 정답을 구한 경우 1-3. 그 밖의 독특한 방법으로 정답을 구한 경우: 예) $5\times3\times4=5\times3\times2\times2=(5\times2)\times(3\times2)=60$	2-1. 계산 순서를 잘못 적용한 경우 2-2. 계산에 있어서 실수를 한 경우 1. (1) 수 구구(Number Facts)를 잘못 회상한 경우 2. (2) 연산자를 잘못 인식한 경우 3. (3) 정답을 옮겨 적을 때의 실수 4. (4) 전체적인 계산 순서의 망각 5. 2-3. 수식 표현의 어려움으로 인한 오류 2-4. 계산의 미완성 혹은 무응답

특히, 예은이의 경우에는 혼합계산 문제를 아주 유연한 전략을 사용하여 효과적으로 해결했는데, 보기의 예 이외에도 사후 면담에서 $16\div4\div2=16\div(4\times2)=2$와 같이 해결하였다. 이와 같은 방법을 어떻게 알게 되었는지 질문하자, 학원이나 다른 사람으로부터 배우기보다는 스스로 사고 실험을 통해 더 쉬운 방법을 찾다보니 찾게 되었다고 한다. 즉, $16\div4\div2$를 순서대로 계산하면 정답이 2가 된다는 것을 알고, 두 수의 나눗셈으로 만들면 더 쉽겠다는 생각에 4와 2를 괄호로 묶었는데, 4에다 2를 나누어서 다시 나누면 결과가 달라지기 때문에 나눗셈을 곱셈으로 바꾸어 계산하였다고 한다.

한편, 위와 같은 범주에 따라 각 문항별로 학생들의 반응을 분석해 보면 <표 5>와 같다. 문항별 분석에서 두드러진 점은 오른쪽의 두 수를 먼저 계산해야 하는 문제에 대한 정답률이 약 50%로써, 다른 정답률에 비하여 상대적으로 매우 낮다는 점이다. 이들 문항에 대한 학생들의 오류를 분석해 보면 그 원인이 계산 순서를 잘못 적용했기 때문임을 알 수 있다. 이에 반하여 수 구구를 잘못 회상하거나, 연산자를 잘못 인식한 경우 등의 오류는 <표 6>에서 알 수 있는 바와 같이 체계적인 오류이기보다는 부주의한 오류라고 볼 수 있다.

<표 6> 오류 유형 분석

오류 유형		대표적인 예	반응 수
2-1. 계산 순서를 잘못 적용한 경우		9-4× 2=10 9-4=5 5×2=10	127
2-2. 계산에 있어서 실수를 한 경우	6. (1) 수 구구(Number Facts)를 잘못 회상한 경우	6× 5-3 6×5=35 35-3=32 답 32	6
	7. (2) 연산자를 잘못 인식한 경우	5+9+5 5+9=45 45+5=50 답 50	10
	8. (3) 정답을 옮겨 적을 때의 실수	8-3× 2=10 3×2=6 8-6=2	1
	9. (4) 전체적인 계산 순서의 망각	9-4× 2=4 4×2=8 8-4=4	1
10. 2-3. 수식 표현의 어려움으로 인한 오류		9-6÷ 3=4 6÷3=2 2-9=-7	3
2-4. 계산의 미완성 혹은 무응답		생략	1

계산 순서를 잘못 적용하는 대부분의 학생들은 주로 왼쪽에서 오른쪽으로만 계산하려고 하였다. 하지만, 경문이의 경우에는 왼쪽에서 오른쪽과 오른쪽에서 왼쪽으로 혼동하여 계산하는 반응을 보였다. 따라서 사후 면담을 하게 되었는데, 그 면담에서는 다시 왼쪽에서 오른쪽으로만 계산하려는 경향으로 바뀐 것을 발견할 수 있었다.

<표 5> 문항별 분석결과

문항 번호	문항	올바른 풀이 유형			오류 유형				정답률
		1-1	1-2	1-3	2-1	2-2	2-3	2-4	
<1>	9+7-4	30	1			1			96.9
→2	6×5-3	29				3			90.6
3←	9-4×2	16			16				50
→4	20÷5×4	32							100
5←	4+6÷2	16			16				50
<6>	5×6÷3	28	3			1			96.9
→7	15-8-5	30		1		1			96.9
→8	8÷4+4	30			1	1			93.8
9←	8+2×5	16			16				50
<10>	5×3×4	31		1					100

11←	9-6÷3	18			13		1		56.3
→12	24÷6÷2	30		1	1				96.9
<13>	5+4-3	31	1						100
→14	7×6+4	31			1				96.9
→15	9-6+2	28			1	2	1		87.5
→16	15÷5-2	31			1				96.9
<17>	7+6+4	31	1						100
<18>	3×4÷2	27	5						100
→19	12÷3×2	29			1	1		1	90.6
20←	8-3×2	16	1		14		1		53.1
21←	6+9÷3	17			14	1			53.1
<22>	2×6×5	30		1		1			96.9
→23	9-6-2	30		1	1				96.9
→24	9÷3+6	32							100
25←	4+3×2	17			15				53.1
→26	7×5-4	31				1			96.9
27←	8-4÷2	17			14		1		53.1
→28	8÷4-2	29			2	1			90.6
<29>	5+9+5	29		1		2			93.8
→30	3×5+2	31				1			96.9
→31	7-2+3	30				1	1		93.8
→32	16÷4÷2	31		1					100
합계		854	12	7	127	18	5	1	

※ <1>: 양쪽에서 계산 가능, →2: 왼쪽부터 계산해야 함, 3←: 오른쪽부터 계산해야 함

3) 연구 문제 3의 결과

학생들의 올바른 풀이와 오류 유형뿐만 아니라, 학생들이 혼합계산 문제를 어떻게 해결하는지를 아래 <표 7>에 분석하였다.

<표 7> 혼합 문제 풀이 유형

혼합문제 풀이 유형	대표적인 예	반응 수
정답만 기재	9+7-4=12	3
서술형으로 해결	9와 7을 더하면 16이 되고 그거에 4를 빼면	4

	4가 됩니다.	
계산 순서를 선으로 연결하여 해결	9 + 7 − 4 = 12 16 12	2
2개의 등식으로 분리하여 해결	9+7-4 9+7=16 16-4=12	11
괄호를 이용한 해결	9+7-4=9+(7-4)=9+3=12	1
등호를 잘못 사용한 연쇄식으로 해결	9+7-4 9+7=16-4=12	8
두 수의 연산으로 변형하여 해결	9+7-4=16-4=12	3
합 계		32

위의 표에서 대표적인 경향은 학생들이 혼합계산을 해결하는 과정에서 그 과정을 식으로 나타내는데 어려움을 많이 겪는다는 것이다. 따라서 계산의 과정을 차례대로 말로 적은 서술형으로 해결하거나, 그것을 좀더 단축시켜 계산 순서를 선으로 연결한 방법을 사용하기도 하였다. 그 밖에도 2개의 등식으로 분리하여 해결하거나, 괄호를 이용하여 해결하기도 하였다. 가장 형식화된 방법은 세 수의 연산을 두 수의 연산으로 변형하여 해결해야 하는데, 학생들은 등호를 올바르게 사용하여 계산 과정을 나타내는데 어려움이 있었다. 특히 학생들은 “등호(=)”를 “양변의 값이 같다”는 의미보다는 “연산의 결과”를 적는 기호로 인식하고 있었다. 따라서 전체 학생의 1/4이 위에서 보는 바와 같이 등호를 잘못 사용한 연쇄식으로 해결하였다. 이와 같은 등호를 잘못 사용한 연쇄식의 경우에는 학생의 사고에 영향을 미쳐 아래와 같이 잘못된 해를 구하도록 만들었다.

<표 8> 동익이의 반응(1)

8−3×2
3×2=6-8=-2 답: -2

동익이의 경우에는 3×2를 먼저 계산해야 함을 알고 있지만, 등호를 연산의 결과를 적는 기호로 인식함에 따라 3×2의 결과인 6을 등호 옆에 적고, 8에서 6을 빼는 것이 아니라 6에서 8을 빼는 것으로 식을 세우고, −2라는 결과를 얻었다. 동익이의 경우에는 등호의 의미를 제대로 모를 뿐만 아니라 뺄셈에서는 교환법칙이 성립하지 않는다는 사실을 모르는 것 같았다.

동익이의 경우에는 사후 면담에서 “-2”라고 음수로 반응한 것은 과외나 아버지

로부터 정수에 대해 배웠다고 한다. 그리고 본 검사가 끝난 후에 혼합계산에 대하여 아버지로부터 지도를 받았다고 한다. 그래서 대부분의 문제를 정확하게 해결할 수 있었지만, 주입식으로 학습을 받아서인지 혼합계산의 순서를 ÷, ×, +, −의 순서로 계산해야 한다고 믿고 있었다. 따라서 아래 <표 9>와 같이 잘못된 반응을 보였다.

<표 9> 동익이의 반응(2)

9−6+2=9−8=1

4. 결론

본 연구 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 초등학교 5학년 학생들의 혼합계산에 대한 능력은 정답률의 평균이 85.25%로 뛰어난 것처럼 보였지만, 비교적 간단한 계산 문제였다는 점과 계산 순서에 상관없이 계산 결과가 같은 문제가 8문제 포함되어 있다는 점, 또한 무조건 앞에서부터 차례대로 계산하더라도 예상 정답률이 75%인 점 등을 고려한다면 결코 높은 점수는 아니었다. 더욱이 전체 학생들의 1/4이 풀이 과정에서 등호를 잘못 사용하여 해결하였는데, 그 문제들을 모두 오답으로 처리한다면 평균 점수는 그것보다 훨씬 떨어질 것이다.

둘째, 초등학교 5학년 학생들은 교과서에 제시된 절차대로 혼합계산 문제를 해결하는 것이 아니라, 다양하고 유연한 방법으로 문제를 해결하기도 하였다. 또한, 오류 유형을 살펴보면 수 구구를 잘못 회상하거나 연산자를 잘못 인식하는 등의 오류를 보였는데, 이러한 오류는 상대적으로 빈도수가 적어 부주의한 오류라 생각되며, 계산 순서를 잘못 적용한 오류는 반응수가 많고 체계적으로 나타나는 오류라 할 수 있다. 한편 혼합계산을 등식으로 해결할 때, 등호를 "계산의 결과"를 쓰는 기호로 인식하여 수식을 제대로 나타내지 못함에 따라 오류를 범하기도 하였다.

셋째, 초등학교 5학년 학생들은 혼합계산 문제를 서술적으로 풀이하여 해결하기도 하고, 계산 순서를 선으로 연결하여 해결하거나, 2개의 등식으로 분리하여 해결하기도 하였다. 또한, 괄호를 사용하거나 두 수의 연산으로 변형하여 해결하는 등 다양하게 해결하였다.

이상의 연구를 바탕으로 다음과 같은 시사점을 얻을 수 있었다.

첫째, 초등학교 5학년 학생들은, 특히, 성취수준이 중하위권인 학생들에게는 혼합계산이 어려운 과제이므로 교사들은 더욱 주의를 기울여 지도할 필요가 있겠다.

둘째, 그 지도 방법으로는 교과서에서 제시하고 있는 복잡한 수준의 문제뿐만 아

니라, 연산자가 2개인 혼합계산에 대해 계산 순서를 철저히 내면화할 수 있는 기회를 제공해야 할 것이다.

셋째, 똑같은 혼합계산 문제를 계산의 순서를 달리하여 계산해보게 함으로써 결과가 달라짐을 인식시키고, 인지적 갈등을 유발할 필요가 있다. 혼합계산의 정답은 학생들이 맥락이나 상황에 비추어 정당화할 수 있도록 맥락문제를 제시해야 할 것이다.

넷째, 학생들이 계산과정 혹은 사고과정을 식으로 표현하는 능력이 부족하여 문제를 해결하지 못하는 경우가 있으므로, 등호의 의미를 다시 한번 강조하여 지도할 필요가 있다. 교육과정상에서는 저학년에서 등호의 의미를 지도하도록 되어 있지만, 학생들은 등호의 의미를 "같음"으로 인식하기보다는 "결과를 적는 기호"로 인식할 가능성이 크기 때문에 혼합계산이 도입되는 시기에 재지도할 필요가 있다.

참고문헌

[1] 교육인적자원부(2003). **초등학교 교사용 지도서 수학 4-가.** 서울: 대한교과서 주식회사.

[2] 구광조, 김진식, 신성균, 신현성, 전평국, 정은실(1988). **수학과 교육**. 서울: 갑을출판사.

[3] 구미애(1999). 초등 수학 교과의 혼합 연산을 적용하는 문제 만들기에서 나타나는 오류 연구. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[4] 김옥경(1991). 고등학교 수학에서 발생하는 수학적 오류의 분류모델에 대한 연구. 이화여자대학교 석사학위 논문.

[5] 오정현(1996). 중학교 함수영역에서 발생하는 수학적 오류에 대한 연구. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[6] 이경아(1996). 유리수 계산에서 나타나는 오류의 현상적 분석: 초등학교 6학년을 중심으로. 이화여자대학교 석사학위 논문

[7] 이영숙(1998). 비례 문제 해결 전략과 오류에 대한 분석: 초등학교 5, 6학년을 대상으로. 한국교원대학교 석사학위논문.

[8] 조영미, 이대현, 이봉주(2004). **2003년 국가수준 학업성취도 평가 연구:수학.** 한국교육과정평가원, 연구보고 RRE 2004-1-4.

[9] Asulock, R. B. (1982). *Error patterns in computation.* London: Charles E.

Merrill Publishing Co.

[10] Blando, J. A., A. E. Kelly, G. R. Schneider, and D. Sleeman (1989). Analyzing and modelling arithmetics errors. *Journal for Research in Mathematics Education, 20(3),* 301-308.

[11] Borasi, R. (1987). *Exploring mathematics through the analysis of errors.* Montreal: PLM Publishing Association.

[12] Borasi, R. (1994). Capitalizing on Errors as "springboards for inquiry": A teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education,* 25(2), 166-208.

[13] English, L. D. (1995). *Children's problem posing in computational context.* Paper presented at the Annual Meeting of the American Education, San Francisco(ED 391 639).

[14] National Research Council. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* J. Kilpatrick, J. Swafford, and B. Findell (Eds.) Mathematics Learnig Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.

[15] McCormick, S. (1999). *Instructing students who have literacy problems (3rd ed.).* New Jersey: Person Education.

[16] Radatz (1979). Error znzlysis in Mathematics education, *Journal for Research in Mathematics Education, 10(1),* 163-172.

[17] Rathmell, E. C., and D. M. Huinker(1989). *Using "part-whole" language to help children represent and solve word problems.* In P. R. Trafton & A. P. Shulte(Eds). New Direction for Elementary School Mathematics 1989 Yearbook, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

[18] Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S. & Peled, I. (1989). Conceptual based of arithmetic errors: The case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 20(1),* 8-27.

[19] Vanlehn, K. (1982). Bugs are not enough: Empirical studies of bugs impasses and repairs in procedural skills. *The Journal of Mathematical Behavior, 3(2),* 3-71.

Baek, Seonsu
Daegu Daegok Elementary School
E-mail: ss-baek@daum.net

Kim, Wonkyung
Korea National University of Education, Cheongju, Korea
E-mail: wonkim@knue.ac.kr

Mun, Seungho
Goyang Hwajeong Elementary School
E-mail: m0603c@hanmail.net