East Asian Math. J. 24 (2008), No. 5, pp. 509-519

종이접기를 통한 패턴 탐구 활동

윤대원 · 김동근

ABSTRACT. In the article, we study on researching activity of the patterns through paper folding. A set of rules and patterns are found in this study based on folding paper of triangle and rectangle.

1. 서론

수학교육의 중요한 목표들 중의 하나는 수학적으로 사고하는 능력을 길러 학생들 스스로 관찰, 조작, 분석, 종합하는 활동을 통하여 수학적 원리나 법칙을 예측하고 추론할 수 있도록 하는 것이다. 추론 중에는 연역적 추론과 귀납적 추론이 있으나 후자가 인식에서 매우 중요한 기능을 한다. 연역적 추론은 발견 및 발명을 통해 새로운 수학적 지식을 찾아내지는 못하므로 우정호(2000)는 귀납추론이 법칙을 발견하고 패턴을 찾아서 일반화하고 추상화함으로써 지식을 확장시킨다고 한다.

NCTM(2007)에서는 규칙성을 파악하기 위해 패턴과 구조를 조사하고 관찰된 규칙성을 일반화하고 추측하는 등 이와 같은 활동을 통하여 다양한 수학적 추론 경험을 가져야 한다고 제시하고 있다. 이와 같은 수학적 경험을 통하여 패턴이나 규칙성을 인식하고 비교, 분석하는 것은 여러 가지 문제 상황을 수식으로 표현하고, 그들 사이의 관계를 탐구함으로써 문제를 형식화하거나 일반화 하는 능력을 기를 수 있도록 한다.

지금까지의 선행연구를 종이접기와 일반화 및 패턴과 관련하여 두 가지로 나누어 살펴보았다. 우선, 종이접기에 관한 연구에서 신현용 · 한인기 · 서봉건 · 최선희(2002)의 연구에서는 종이접기의 대수학적인 의미를 작도 가능성의 문제와 관련지어 살펴보고 있으며, 한인기 · 신현용(2002)의 연구는 종이접기 활동을 소개하고 엄밀한 논증의 연계 가능성에 대해 탐구하였고, 권영인 · 서보억(2006)의 연구에서는 종이학을 접고 펼친 흔적을 통하여 수학적 사실을 탐구하고 피타고라스 정리를 창의적인 방법으로 증명하여 보았다. 둘째로, 정수영(2001), 정한화(2007)는 학생들의 일반화하는 과정을 비교 · 분석하였고, 강현영(2007)은 시각적 패턴의 탐구 활동을

2008년 12월 투고, 2008년 12월 심사 완료
2000 Mathematics Subject Classification: 97D40
Key words: 종이접기, 패턴 탐구

통한 일반화 과정에서 학생들의 사고전략, 기호화 상태를 고찰하였다.

이상에서 살펴본 선행연구는 종이를 접고 다시 펼친 다음 그 흔적을 통해 수학적 사실의 탐구나 논증에 중점을 둔 연구가 대부분이었고 일반화하는 과정도 교과서를 중심으로 한 패턴 탐구나 성냥개비를 활용한 패턴의 탐구 활동에 그치고 있어 구체적인 활동 즉, 종이접기를 통한 패턴 탐구는 미흡한 실정이다. 또한, 최근에는 패턴을 탐구하는데 있어 구체적이고 비형식적인 활동을 많이 요구하고 있다. 따라서 본 연구에서는 다각형의 가장 기본이 되는 삼각형과 직(정)사각형의 종이를 접고 펼친 후 그 속에 숨겨진 다양한 패턴들을 탐구하는데 목적이 있으며, 이를 바탕으로 문제를 형식화하거나 일반화하는 능력과 수학적으로 사고하는 능력 즉, 귀납적 추론력을 길러주고자 한다.

2. 시각적 패턴 탐구

Dienes는 자유로운 놀이 과정 속에서 규칙성을 파악함으로써 수학적 개념 형성 과정을 강조하고 있다. 이에 우정호(2000, pp.262-263)는 패턴화는 수학적 사고의 본질이며, 확립된 패턴은 곧 수학적 대상이 되어 새로운 패턴을 찾게 되고, 그 새로운 패턴은 다시 친근해지면서 수학적 대상으로 간주된다고 언급하고 있다. 또한 NCTM(2007)에서는 패턴 탐구를 통해 수학적 관계를 찾는 과정에서 귀납적 추론을 사용할 수 있다고 했으며 추론을 통하여 삼각수의 수열 구조를 탐구하였다. 그 추론 과정을 살펴보면 교사가 학생들에게 그 수열의 100번째 항을 찾도록 하였을 때, 학생들은 <그림Ⅱ-1>과 같이 관찰한 내용을 반영하여 나타내기 시작하였고, 어려웠지만 교사의 도움으로 결국 학생들은 일반적인 규칙, 즉 $\frac{(수)(수+1)}{2}$와 같이 표현하였다. 즉, 학생들은 삼각수가 만들어지는 패턴의 규칙성을 관찰하고 추측을 통하여 문제를 형식화하고 일반화 하는 능력을 기를 수 있음을 알 수 있다.

[그림Ⅱ-1]

수학자가 다루는 패턴에는 수 패턴, 모양의 패턴, 움직임의 패턴, 행동의 패턴 등 추상적인 패턴이 포함된다(김상미, 1997). 그 중 우리가 받아들이는 정보의 90%이상을 시각을 통하여 받아들이므로 가장 기초적이고 실제적인 패턴이 시각적인(모

양) 패턴이라고 볼 수 있다. 그렇다면 위 삼각수가 만들어지는 패턴은 모양의 패턴이고 이것은 곧, 시각적인 패턴임을 알 수 있다. 또한 강현영(2007)에 따르면, 패턴에는 수의 열 또는 표에서 규칙을 찾는 패턴, 그림으로 표현되는 맥락에서 규칙을 찾는 패턴, 계산 절차에서의 패턴, 1차식이나 2차식으로 표현되는 패턴 등 여러 가지 종류가 있으며 특히 그림으로 표현되는 맥락에서 규칙을 찾는 시각적인(모양) 패턴에는 다음 [그림Ⅱ-2]와 같이 점으로 된 패턴, 타일 패턴, 성냥개비 패턴 등을 대표적으로 제시하고 있다.

[그림Ⅱ-2]

하지만 본 연구에서는 시각적인 패턴 탐구 활동으로 대표되는 점, 타일, 혹은 성냥개비를 활용한 패턴 탐구에서 벗어나 학생들이 실제로 종이를 접고 펼친 흔적을 관찰함으로써 그 속에 숨겨진 패턴을 탐구하고자 한다.

3. 연구 방법

가. 연구 대상

본 연구에 참여한 학생들은 2008년 9월 대구광역시에 소재한 일반계 고등학교의 인문계 1개 반(36명)과 자연계 1개 반(38명)으로 이들은 '수학Ⅰ'의 수열 단원을 다 배운 학생들이며 방과 후 수업을 통하여 실험을 수행하였다. 특히 방과 후 수업 때 인문계 1개 반은 전체 인문계 6개 반 중에서 1학기 수학 성적이 상위 20%에 해당하는 학생들을 선별하여 편성하였고, 자연계 1개 반은 정규수업 반 그대로 이다.

나. 연구 과제

본 연구에서는 다각형에서 가장 기본이 되는 삼각형과 직(정)사각형 종이를 접고 펼친 흔적을 탐구 할 수 있도록 활동지를 만들어 사용하였고, 그 연구과제는 다음과 같다.

1) 삼각형의 한 변에 평행하도록 계속해서 접으면 어떤 패턴을 찾을 수 있는가? 그리고 한 꼭짓점을 지나고 그 꼭짓점에 대응하는 변을 지나도록 계속해서 접으면 어떤 패턴을 찾을 수 있는가?

2) 직(정)사각형의 한 변에 평행하도록 계속해서 접으면 어떤 패턴을 찾을 수 있

는가? 그리고 각 변에 수직이 되도록 계속해서 접으면 어떤 패턴을 찾을 수 있는가?

다. 자료수집 및 분석

본 실험이 실시되는 동안 인문계 1개 반과 자연계 1개 반의 학생들에게 총 5회의 활동지를 제시하였으며, 매 활동지마다 50분에 걸쳐 독립적으로 과제를 수행하였고 종이를 접고 펼친 흔적을 통하여 탐구한 학생들의 활동지를 수집하였다.

본 연구의 분석 과정은 학생들이 작성한 활동지에 드러난 결과를 바탕으로 패턴 탐구를 분석하였다.

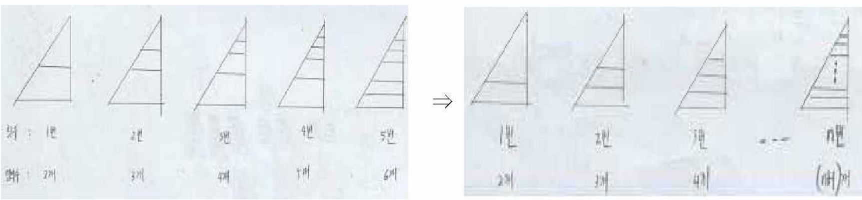
4. 연구 결과

본 연구의 과제가 같더라도 삼각형이나 직(정)사각형의 종이를 접는 방법에 따라 다른 패턴을 발견할 수 있었다. 즉, 접은 다음 펼칠 것이냐 아님 접은 상태에서 그대로 계속해서 접느냐에 따라 다양한 패턴을 발견할 수 있었고 학생들이 발견한 패턴은 다음과 같다. 여기서 종이를 접는 방법 중 종이를 접고 펼치고 접고 펼치는 방법을 ‘접는 방법 A’라 하고, 종이를 접은 상태에서 계속해서 접어가는 방법을 ’접는 방법 B’라 하겠다.

과제 1. 삼각형의 한 변에 평행하도록 계속해서 접으면 어떤 패턴을 찾을 수 있는가? 그리고 한 꼭짓점을 지나고 그 꼭짓점에 대응하는 변을 지나도록 계속해서 접으면 어떤 패턴을 찾을 수 있는가?

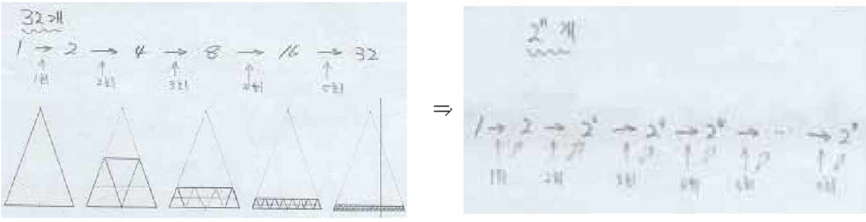
우선 삼각형의 한 변에 평행하도록 종이를 접으면 어떤 규칙성이 있는지 살펴보자. 우선 ‘방법 A’와 ‘방법 B’로 각각 삼각형의 한 변에 평행하도록 5번 접었을 때와 n번 접었을 때, 아래 [그림Ⅲ-1. 방법 A] 및 [그림Ⅲ-2. 방법 B]와 같은 규칙성을 발견할 수 있었다.

[5번] [n번]



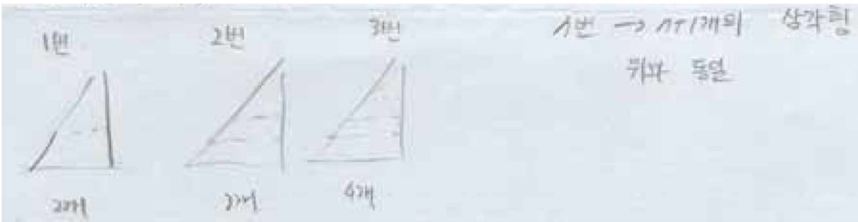
[그림Ⅲ-1. 방법 A]

[5번] [n번]

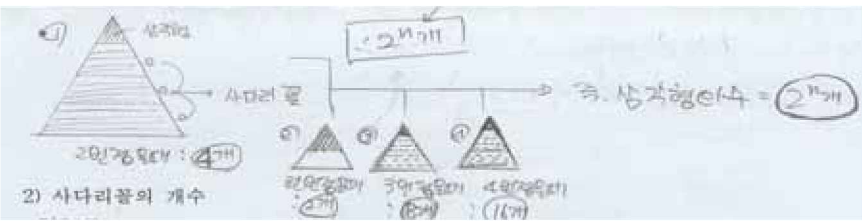


[그림Ⅲ-2. 방법 B]

특히 ‘방법 A’로 n번 접었을 때 삼각형이 나눠지는 영역의 개수는 $n+1$개이며, ‘방법 B’로 접었을 때 나눠지는 영역의 개수는 2^n개가 됨을 알 수 있으며, 여기서 주목할 만한 것은 같은 문제 상황에서 종이를 접는 방법에 따라 다른 패턴이 발견되었다. 더 나아가 삼각형의 종이를 접을 때마다 늘어나는 삼각형의 개수뿐만 아니라 사다리꼴의 개수에도 새로운 규칙성을 발견할 수 있었다. 먼저 종이를 접을 때 생기는 삼각형의 개수에는 아래 [그림Ⅲ-3. 방법 A]와 [그림Ⅲ-4. 방법 B]와 같은 패턴이 있다.



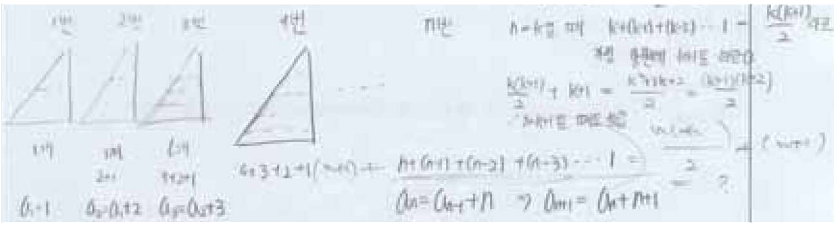
[그림Ⅲ-3. 방법 A]



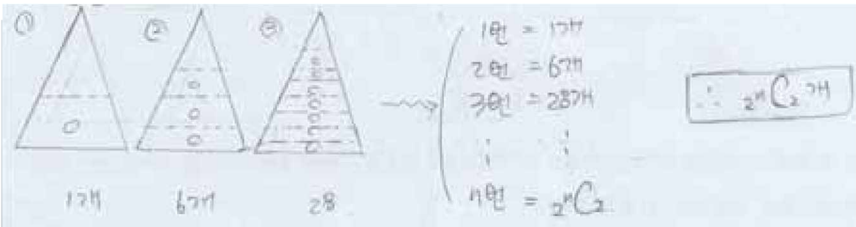
[그림Ⅲ-4. 방법 B]

여기서 [그림Ⅲ-3. 방법 A]와 같은 방법으로 종이를 접을 때 생기는 삼각형의

개수는 나눠지는 영역의 개수와 같음을 알 수 있다. 다음으로 사다리꼴의 개수에는 아래 [그림Ⅲ-5. 방법 A]와 [그림Ⅲ-6. 방법 B]와 같은 패턴이 있다.

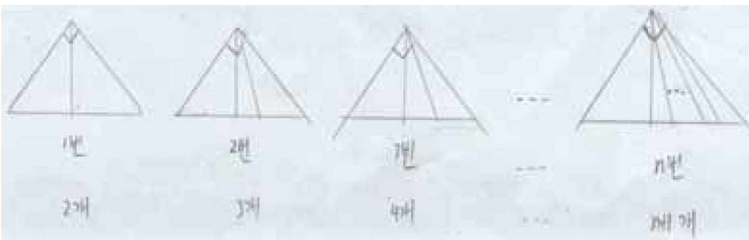


[그림Ⅲ-5. 방법 A]

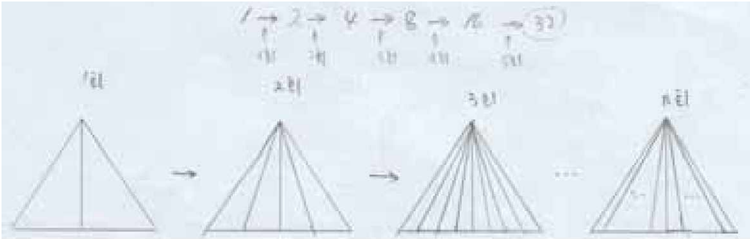


[그림Ⅲ-6. 방법 B]

다음으로 삼각형의 한 꼭짓점을 지나고 그 꼭짓점에 대응하는 변을 지나도록 접으면 어떤 규칙성이 있는지 알아보자.

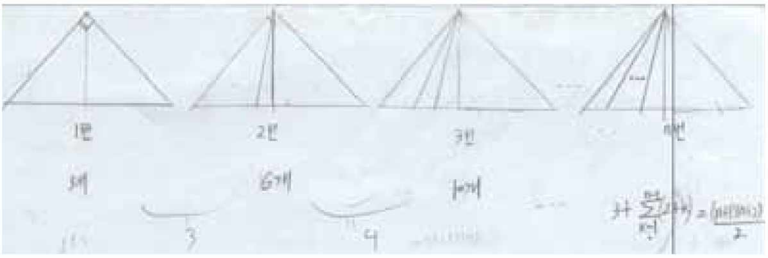


[그림Ⅲ-7. 방법 A]

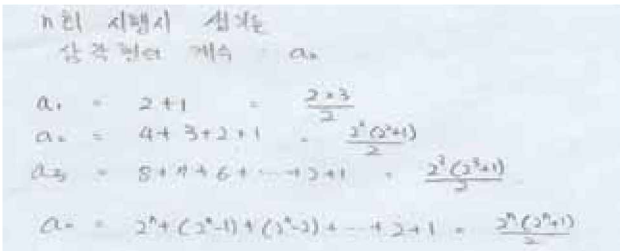


[그림Ⅲ-8. 방법 B]

[그림Ⅲ-7. 방법 A]과 같은 방법으로 종이를 접으면 나눠지는 영역의 개수는 $n+1$개가 생기고, [그림Ⅲ-8. 방법 B]과 같은 방법으로 접으면 나눠지는 영역의 개수는 2^n개가 됨을 알 수 있다. 더 나아가 위와 같은 방법으로 접었을 때 생기는 삼각형의 개수를 조사하여 보면 아래 [그림Ⅲ-9. 방법 A]와 [그림Ⅲ-10. 방법 B]과 같은 규칙성이 있음을 알 수 있다.



[그림Ⅲ-9. 방법 A]



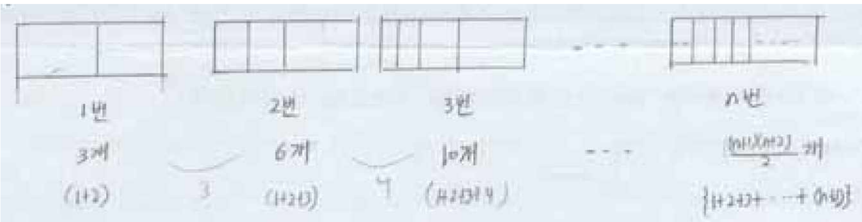
[그림Ⅲ-10. 방법 B]

[그림Ⅲ-9. 방법 A]과 같은 방법으로 종이를 접으면 삼각형의 개수는 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$개가 생기고, [그림Ⅲ-10. 방법 B]과 같은 방법으로 접으면 나눠지는

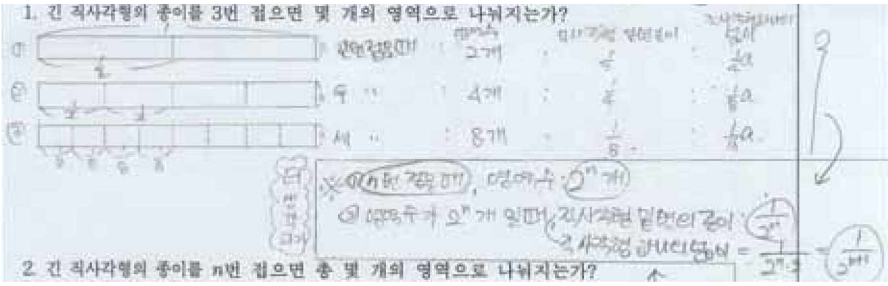
영역의 개수는 $\frac{2^n(2^n+1)}{2}$개가 됨을 알 수 있다. [그림Ⅲ-10. 방법 B]에서 찾은 규칙성은 [그림Ⅲ-8. 방법 B]를 바탕으로 찾은 패턴임을 알 수 있다.

과제 2. 직(정)사각형의 한 변에 평행하도록 계속해서 접으면 어떤 패턴을 찾을 수 있는가? 그리고 각 변에 수직이 되도록 계속해서 접으면 어떤 패턴을 찾을 수 있는가?

우선 직(정)사각형의 한 변에 평행하도록 접으면 어떤 규칙성이 있는지 알아 보자.



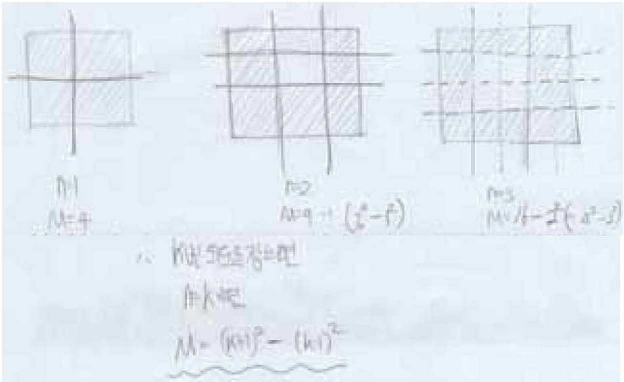
[그림Ⅲ-11. 방법 A]



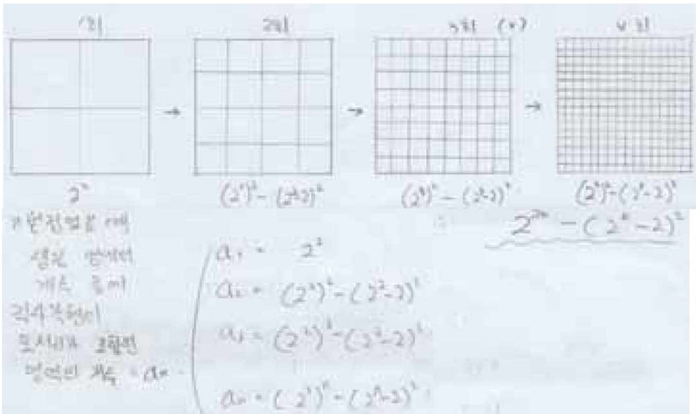
[그림Ⅲ-12. 방법 B]

[그림Ⅲ-10. 방법 A]과 같은 방법으로 직사각형의 종이를 n번 접으면 나눠지는 영역의 개수는 $n+1$개 이고, 직사각형의 개수는 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$개가 됨을 알 수 있다. 또한, [그림Ⅲ-11. 방법 B]와 같은 방법으로 직사각형의 종이를 접으면 나눠지는 영역의 개수는 2^n이고, 직사각형의 개수는 $\frac{2^n(2^n+1)}{2}$개가 됨을 알 수 있다. 여기서 흥미로운 것은 '과제1'에서 삼각형의 한 꼭짓점을 지나고 그 꼭짓점에 대응하는 변을 지나도록 접을 때 '방법 A'로 접었을 때와 '방법 B'로 접었을 때 생기는

영역의 개수나 삼각형의 개수와 같은 패턴을 가짐을 알 수 있다. 또한 [그림Ⅲ-11. 방법 B]에서처럼 한 개의 직사각형의 넓이에도 새로운 패턴이 있음을 발견하였고, 그 규칙성은 $\frac{1}{2^n}$이 됨을 알 수 있다. 다음으로 각 변에 수직이 되도록 종이를 접으면 어떤 규칙성이 있는지 알아보자.



[그림Ⅲ-13. 방법 A]



[그림Ⅲ-14. 방법 B]

[그림Ⅲ-12. 방법 A]와 같은 방법으로 종이를 n번 접었을 때 직(정)사각형의 모서리가 포함된 영역의 개수는 $(n+1)^2-(n-1)^2$가 됨을 알 수 있다. 그리고 [그림Ⅲ-13. 방법 B]와 같은 방법으로 종이를 n번 접었을 때 직(정)사각형의 모서리가 포함된 영역의 개수는 $(2^n)^2-(2^n-2)^2=4(2^n-1)$개가 됨을 알 수 있다.

5. 결론

본 연구에서 다각형에서 가장 기본이 되는 삼각형과 직(정)사각형의 종이를 접는 방법 즉 ‘방법 A’와 ‘방법 B’에 따라 나타난 흔적들을 관찰하여 새로운 패턴을 발견할 수 있었고, 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, ‘과제1’과 ‘과제2’에서 같은 문제 상황이라도 종이를 접는 방법에 따라 다른 패턴을 발견할 수 있었고, 이런 개방형(Open-ended) 문제는 학생들의 창의적 사고력을 신장시킬 수 있을 것이다.

둘째, 주어진 과제를 해결한 후 종이에 남겨진 흔적들을 관찰함으로써 또 다른 규칙성을 발견할 수 있었다. 예를 들어, 삼각형과 직(정)사각형의 종이를 접었을 때 나눠지는 영역의 개수를 구할 수 있었을 뿐만 아니라 삼각형의 개수 및 직(정)사각형의 개수도 구할 수 있고, 특히 ‘과제2‘에서 ‘방법 B‘로 종이를 접는다면 직(정)사각형의 넓이에도 또 다른 패턴이 있음을 알 수 있었다. 이것은 학생들의 통찰력을 길러줄 수 있을 것이라고 본다.

셋째, ‘과제1’과 ‘과제2’에서 삼각형이나 직(정)사각형 종이를 ‘방법 A‘로 접었을 때나 ‘방법 B‘로 접을 때 영역의 개수뿐만 아니라 삼각형 및 직(정)사각형의 개수가 각각 같음을 알 수 있었다.

지금까지의 연구에서는 시각적 패턴의 탐구 활동에 성냥개비 및 삼각수 등이 많이 활용 되었지만 본 연구에서는 학생들이 직접 종이를 접고 펼쳐진 흔적들을 관찰하는 등의 종이접기 활동을 하였다. 이러한 측면에서 볼 때 패턴 탐구활동에 종이접기가 새로운 교수-학습자료로 제공될 수 있을 것이다. 또한, 최근에는 패턴을 탐구하는데 있어 구체적이고 비형식적인 활동을 많이 요구하고 있으므로 학생들이 직접 종이를 접는 활동을 함으로써 기존의 강의식 수업에서 벗어나서 학생들 스스로 관찰하고 다양한 패턴을 탐구할 수 있다는 측면에서 의미가 있다. 앞으로 다른 다각형 종이에서도 새로운 패턴 탐구가 많이 요구된다.

참고문헌

[1] 강현영, 패턴탐구를 통한 일반화와 기호표현-시각적 패턴을 중심으로-, 대한수학교육학회지 <학교수학> 제9권 제2호, 313-326, 2007.

[2] 권영인, 서보억, 종이학을 접고 펼친 흔적을 통한 수학탐구활동, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 제20권, pp.469-482, 2006.

[3] 김상미, 수학적 패턴에 관한 학습 프로그램 개발 연구, 한국교원대학교 교육대학원, 석사학위논문, 1997.

[4] 신현용, 한인기, 서봉건, 최선희, 종이접기의 대수학적 의미와 교수학적 활용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 제13권, pp.457-475, 2002.

[5] 우정호, 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울대학교출판부, 2000.

[6] 정수영, 고등학교 학생의 대수적 사고 중 일반화의 사고에 대한 연구, 이화여자대학교 교육대학원, 석사학위논문, 2001.

[7] 정한화, 수학 교과서에 나타난 일반화와 고등학생의 일반화과정 비교, 이화여자대학교 교육대학원, 석사학위논문, 2007.

[8] 한인기, 신현용, 삼각형 접기 활동과 논증의 연계 가능성에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈A <수학교육 논문집> 제41권, pp.79-90, 2002.

[9] NCTM, 학교수학을 위한 원리와 규준(류희찬 외 5명 옮김), 경문사, 2007.

Yoon, Dae Won
Department of Mathematics Education and RINS,
Gyeongsang National University, Jinju 660-701, Korea
E-mail : dwyoon@gnu.ac.kr

Kim, Dong Keun
Cheonggu high school, Daegu 701-823, Korea
E-mail : xfile9513@tgedu.net