East Asian Math. J. 24 (2008), No. 5, pp. 465-476

수학교사를 위한 괴델정리의 소개 방안

신현용

ABSTRACT. Even though Gödel's theorem is remarkable to mathematics teachers, it is not simple to understand the proof in detail. It would be useful for us to understand the basic ideas and the proving process of the proof. In this note, we suggest a proposal for the purpose.

1. 서론

많은 사람들이 수학에 대하여 불만이 많다. 주로 '초・중・고등학교(이하, 학교) 국민기본공통과정(초등학교 1학년 - 고등학교 1학년)에서 수학을 그렇게 비중 있게 가르쳐야 하느냐?'라는 것이다. '언어로서의 수학', '수학의 유용성', 그리고 '논리적 사고능력 함양' 등은 이미 설득력 없는 진부한 변명이 되어 버렸다. 그들이 수학에 대하여 그러한 비판적인 시각을 가지는 데 중요한 역할을 하는 것은 수학을 오직 '하나의 기술' 즉, 수학을 인지적인 측면에서만 보는 데에 있다. 학교 수학의 상당 부분이 수학의 기술적 측면에 할애되고 있는 것은 분명하지만 '하나의 기술일 뿐' 이라는 인식은 초등학교 수학의 경우에도 옳다고 할 수 없다. 현행 제7차 교육과정에서 수학의 정의적 측면이 강조되는 것은 바람직하다. 그러나 교과서나 학교에서 수학의 정의적 측면을 위해 많은 시간을 할애하기는 어려운 실정이다. 따라서 수학의 정의적 측면은 교육과정의 기본 정신, 교과서 집필의 기본 철학, 그리고 교사의 수학에 대한 인식, 신념, 그리고 교수활동 등을 통하여 구현되어야 한다.

한편, 괴델의 정리(이하, 이 정리)가 가지는 수학 또는 수학교육적 의의로 보아, 이 정리를 예비 또는 현직 수학교사(이하, 교사)에게 소개할 필요가 있다. 그러나 보통의 교사양성대학[1)]이나 교육대학원에서는 이 정리를 충분히 설명할 수 있을 정도의 집합론 또는 관련 강좌를 확보하기가 현실적으로 어렵다.

이와 같은 여건과 상황을 고려할 때, 교사(특히, 수학교사)에게 이 정리를 소개할 수 있는 적절한 수준의 방안이 요구된다. 이때, 지나치게 전문적인(또는 기술적인)

2008년 11월 투고, 2008년 12월 심사 완료

2000 Mathematics Subject Classification: 97B50

Key words: 괴델정리, 수학교사교육

1) 사범대학 수학교육과나 교육대학 수학심화과정을 뜻한다.

용어를 사용하는 것을 자제해야 할 것이다. 문제는 이러한 경우 이 정리의 내용을 정확히 전달하기 어렵거나 또는 잘못 전달할 수 있는 위험이 따른다는 것이다.

이 글에서는 괴델 자신에 의한 논문 등 일차 자료가 아니라 하더라도 관련 전문가들의 인정을 받는 것으로 여겨지는 자료를 바탕으로 심각한 오류나 큰 오해의 소지가 없을 것으로 여겨지는 방안을 하나 제안한다.

2. 방안

1. 먼저, 다음과 같은 내용으로써 이 정리가 발표된 당시의 배경을 소개한다.

> 19세기 말부터 20세기 초에 이르는 시기에 걸쳐 칸토어에 의해 제시된 집합론은 체계를 갖추어 가고, 이와 함께 기존의 수학에서 야기된 역설을 제거하고 수학의 기초를 확실히 다지고자 하는 시도가 활발하였다. 힐베르트(D. Hilbert)가 주도한 형식주의(formalism)적 접근은 그러한 시도의 대표적인 예라고 할 수 있다.
>
> 그러한 노력에 의하여 수학기초에 관한 다양한 진전이 있었지만 새로운 문제 즉, 공리 체계의 무모순성(consistency)과 완전성(completeness)의 문제를 제기하였다. 힐베르트는 이 문제들에 관하여 낙관적이었다. '모든 수학 문제는 해결이 가능해야 한다.'라는 주장이나 '여기에 문제가 있다. 그 해답을 찾으라. 당신은 그 해답을 순수한 사고로 찾을 수 있다. 수학에는 우리가 알지 못하는 것이 없기 때문이다.'라는 선언에서 그의 의지와 희망을 볼 수 있다.

2. 간단한 예를 통하여 공리계의 무모순성과 완전성의 의미를 다음과 같이 설명한다.

> '먼저 주어진 공리들로부터 모순된 명제가 유도되지 않는다.'는 공리계의 무모순성과 '주어진 공리계의 용어로 기술되지만 공리계로부터 증명도 반증도 되지 않는 그러한 명제는 없다.'는 공리계의 완전성을 설명하되 다음과 같은 결합기하(incidence geometry)공리계를 예로 활용한다.
>
> 결합기하공리계
>
> · 서로 다른 두 점을 지나는 선이 유일하게 존재한다.
>
> · 임의의 선 위에는 서로 다른 점이 적어도 두 개 존재한다.

· 모두가 한 선 위에 있지 아니하는 세 점이 존재한다.

세 점 결합기하 모형 또는 네 점 결합기하 모형을 통하여 결합기하공리계의 무모순성을 설명한다. 이제, 다음과 같은 명제를 생각하여 보자.

평행선명제

한 선과 그 선 위에 있지 아니하는 점 p 가 있을 때, p 를 지나 그 선에 평행한 선은 유일하다.

여기서 '두 선이 평행하다.'는 것은 '두 선이 만나지 않는다.'는 것을 뜻한다.

세 점 결합기하에서는 평행선명제가 성립하지 않지만, 네 점 결합기하에서는 평행선명제가 성립한다. 이로부터 결합기하공리계는 완전하지 않음을 알 수 있다. 즉, 평행선명제는 공리계 내의 언어로 표현된 명제이지만 결합공리계로부터 증명도 반증도 되지 않으므로 결합기하공리계는 완전하지 않다.

3. 결합기하공리계를 사용하여 각 공리들 상호간의 독립성(independence)을 설명한다. 물론, 공리계에서의 독립성은 이 정리와 직접적인 관련이 적다고 할 수 있다.

4. 다음을 유념하게 한다.

위의 모형들이 결합기하공리계를 만족시킴을 일일이 확인할 수 있기 때문에 결합기하공리계가 무모순적임을 확인할 수 있다. 그러나 유클리드 기하처럼 선과 점이 무한히 많을 때에는 그 공리계가 무모순적임을 구체적으로 확인하는 것은 용이하지 않을 수 있다. 좌표평면이나 좌표공간을 사용하여 유클리드 기하의 모형을 생각할 수 있지만 좌표도입에 따른 산술의 무모순성 확립 등 다른 문제를 수반하기 때문에 좌표 도입에 의한 모델을 통하여도 유클리드 기하의 무모순성을 주장하는 데에 문제를 제기할 수 있다.

5. 집합론이나 기하학에 관한 공리계의 무모순성과 완전성에 대하여 다음 사실이 알려져 있음을 설명한다.

· 괴델은 기존의 집합론 공리 체계가 무모순적이면 선택공리(axiom of choice)와 일반연속체가설(generalized continuum hypothesis)을 추가한 공리 체계도 무모순적임을 증명하였다. 한편, 코언(P. Cohen)은 선택공리는 기존의 집합론의 다른 공리들로부터 연역되지 않음(다른 공리들과 독립적임)을 증명하였다.

· 중립기하학은 완전하지 않다. 평행선 공준은 중립기하공리계로부터 증명도 반증도 할 수 없다. 사실, 보여이, 로바체브스키 등은 유클리드 기하에서 평행선 공준은 중립기하 공리들로부터 연역되지 않음(다른 공리들과 독립적임)을 보였다.

· 산술 공리가 무모순적이면 유클리드 기하가 무모순적이다. 유클리드 기하가 무모순적이면 쌍곡기하의 공리체계도 무모순적이다.

6. 괴델의 불완전성 정리의 내용을 소개한다.

괴델의 정리가 발표되기 이전에 무모순적이며 완전한 공리계가 제시되었다([11]). 이러한 일련의 성과는 모든 공리 체계에 대한 무모순성과 완전성의 증명에 관한 형식주의자들의 확신을 더욱 굳게 했다. 그러나 괴델은 그러한 계획은 실현가능하지 않음을 보였다. 보통, 괴델의 정리는 다음과 같이 두 가지로 기술된다.

(제 1 불완전성 정리)

산술을 포함하는 형식적 체계가 무모순적이라면 그 체계 내에서는 증명도 반증도 할 수 없는 명제가 있다.[2] 더 나아가 기존의 형식 체계에 새로운 명제를 첨가하여 무모순적인 체계로 보강한다 하더라도 그 체계 내에서는 여전히 증명도 반증도 할 수 없는 명제가 있다.

(제 2 불완전성 정리)

산술을 포함하는 형식적 체계가 무모순적이라면 그 무모순성을 그 체계 내에서는 증명할 수 없다.

7. 증명의 핵심 아이디어를 간략히 소개한다.

가. 리샤르(J. Richard) 역설

2) 괴델은 증명도 반증도 할 수 없지만 참인 명제를 구성하였다.

집합을 표현하는 방법으로서 원소나열법과 조건제시법이 있는데 조건제시법을 사용할 경우에는 조심하여야 한다. 예를 들어, 집합 X 를 'the set of all objects describable in exactly eleven English words' 이라고 정의하면 '$X \in X$ ' 라고 주장할 수 있다.

한편, 자기가 자기 자신의 성격을 묘사하는(특히, 부정적으로) 경우에는 역설적인 상황에 이를 수 있다. 위에서 언급한 X 의 경우에도 이러한 상황과 크게 다르지 않다. 또, 다음 '세비야의 이발사 역설'이나 '크레타인 역설'[3]도 비슷한 상황이다.

· Imagine the Barber of Seville who shaves every man in Seville who does not shave himself. Does the Barber of Seville shave himself?

· All Cretans are liars.

리샤르 역설도 이와 비슷한 성격을 가진다. 먼저, 기수들의 속성을 순수하게 산술적 성질들로 진술한 것들의 목록을 고려해 보자. 예를 들어 자연수, 소수, 홀수, 짝수 등을 다음과 같이 산술적 성질들로 표현하자.

• 소수 : 1과 자기 자신 외에 다른 수로 나누어지지 않는 수
• 홀수: 2로 나누었을 때 나머지가 1인 수
• 짝수: 2로 나누었을 때 나머지가 0인 수

이러한 방법으로 각 기수의 속성들의 목록을 설명하였다고 하고, 설명된 기수들의 속성들의 목록들 각각에 하나의 순서수를 대응시켜 보자. 순서수를 대응시키는 방법은 여러 가지 있겠지만 여기에서는 그 설명된 수가 몇 글자로 설명되었는지를 세는 것이다. 그러면 설명된 글자수는 동일한 것들도 생기므로 이럴 경우에는 가나다 순으로 다시 순서를 정하면 된다. 각 기수들의 속성의 목록들 중에 가장 적은 글자로 설명된 것을 순서수 1로 대응시키고, 그 다음을 순서수 2, 이러한 방법으로 계속해서 각각을 순서수로 대응 가능하다.

이제 목록의 내용과 대응된 수와의 관계를 생각해보자. 가령, 소수에 관한 설명 '1과 자기 자신 외에 다른 수로 나누어지지 않는 수'가 순서수 17에 대응되었다고 하면, 대응된 수 17은 소수이다. 즉 대응된 수가 자신에 관한 설명인 소수에 속하므로, 수 17은 소수를

3) 성경(신약) 디도서 1장 12-13절에 나오는 내용에 의한 것으로 'Epimenides paradox' 또는 'liar paradox' 라고도 한다. Epimenides 는 크레타 사람(Cretan)이다.

설명하는 내용과 일치하는 경우이다. 한편, 홀수에 관한 설명 '2로 나누었을 때 나머지가 1인 수'는 순서수 14에 대응되었다고 하면, 대응된 수 14는 짝수이므로 자신의 설명인 홀수가 아닌 경우로, 대응된 수와 그에 관한 내용이 일치하지 않는 경우이다. 이처럼 부여된 순서수는 자신을 설명하는 내용에 일치하는 경우도 있고 일치하지 않는 경우가 생긴다. 이제, 새로운 정의를 하자. 부여된 순서수가 설명하는 내용과 일치하지 않는 경우를 'Richardian'이라고 정의하고, 부여된 순서수가 설명하는 내용과 일치하는 경우를 'not Richardian' 이라고 정의하자. 위의 예에서, 17은 not Richardian의 경우에 해당하고, 14는 Richardian의 경우에 해당하게 된다. 이를 일반화 하면 'x가 Richardian'이라는 것을 'x는 대응된 순서수 x를 설명하는 내용의 진술과 같은 성질을 갖지 않는다.'라고 정의할 수 있다. 그렇다면 어떤 수 x가 Richardian이라는 설명인 'x는 대응된 순서수 x를 설명하는 내용의 진술과 같은 성질을 갖지 않는다.' 역시 기수들의 속성들의 목록에 포함된다. 그러므로 그 설명 또한 고정된 특정한 정수형태의 순서수를 부여받게 되는 것이다. 그 수를 n이라고 가정해 보자. 그러면 그 수 n은 Richardian인가?

만일 n이 Richardian이라면, n은 자신을 설명하는 내용과 일치하지 않아야 하므로 n은 대응된 순서수 n을 설명하는 내용의 진술과 같은 성질을 가지게 된다. 그러면 Richardian의 정의에 의해, n은 not Richardian이 된다. 반대로 n이 not Richardian이라면, n은 자신을 설명하는 내용과 일치해야 하므로 n은 대응된 순서수 n을 설명하는 내용의 진술과 같은 성질을 갖지 않는다. 그러면 Richardian의 정의에 의해, n은 Richardian이 된다. 어떻게 가정하더라도 모순이 발생한다. 이 내용을 리샤르 패러독스라고 한다. 결국, 'n이 Richardian이기위한 필요충분조건은 n이 Richardian이 아닌 것'이다.

괴델은 그이 정리의 증명에서 이 역설의 구성 과정을 효과적으로 활용한다.

나. 괴델수 (Gödel number)

괴델이 괴델수를 도입하는 과정은 러셀(B. Russell)이 수학을 논리학으로 환원하였던 것이나, 힐베르트가 수학체계를 의미 없는 기호 논리로, 즉 형식적 체계로 변환시켜 생각한 것과 유사하다. 괴델은 형식적 기호, 논리식 또는 증명을 하나의 수로 바꾸어서 생각한 것

이다.

다. 초수학의 산술화 (arithmetization of meta-mathematics)

괴델이 괴델수를 도입함으로써 모든 논리식을 괴델수로 대응시킨 것처럼, 논리식에 관한 진술과 논리식 상호관의 관계에 관한 초수학적 진술도 괴델수와 논리식들 상호간의 산술적 관계에 관한 진술로 대응시켰다. 결국 모든 문제를 산술 문제로 환원시켰다.

8. 이 정리의 증명 절차를 간략히 소개한다.

정리의 증명 단계는 다음과 같다.

1단계

괴델은 산술적 논리식 G를 다음과 같이 초수학적 진술로 구성하였다.

G : 논리식 G는 증명 불가능하다.

2단계

괴델은 G가 증명 가능하다는 것은, 그것의 부정 $\sim G$가 증명 가능하다는 것과 동치임을 보였다. 1단계에 의해, 논리식 G가 증명 가능하면, 그것을 의미하는 '논리식 G는 증명 불가능하다'는 참이 되므로, 논리식 G는 증명 불가능하게 된다. 반대로, 논리식 G의 부정이 증명 가능하면, 그것의 부정을 의미하는 '논리식 G는 증명 가능하다'가 참이 되므로, 논리식 G가 증명 가능하게 된다. 따라서 논리식 G가 증명 가능하다는 것은, 그것의 부정 $\sim G$가 증명 가능하다는 것과 동치가 되는 것이다. 그러나 하나의 논리식과 그것의 부정이 동시에 형식적으로 증명 가능하면, 그 산술체계에는 모순이 있다. 따라서 산술체계가 무모순적이면, G뿐만 아니라 $\sim G$도 산술적 공리로부터 연역되지 않는다. 따라서 산술체계가 무모순적이면, G는 형식적으로 결정 불가능한 논리식이 된다.

3단계

G가 형식적으로 증명 불가능함에도 불구하고, 그것은 참인 산술적 논리식이다.[4] 이것은 산술체계의 공리들이 무모순이므로 논리식 G가 결정 불가능함에도 불구하고, 초수학적 추론에 의해 G는 참이

4) 마찬가지로 $\sim G$ 는 거짓이지만 형식적으로 거짓임을 증명할 수 없다.

되는 것이다.

4단계

G가 참이면서 동시에 형식적으로 결정 불가능하므로, 산술의 공리들은 불완전하다. 즉, 산술적 공리들로부터 모든 산술적으로 참인 것들을 모두 다 연역할 수 있는 것은 아니다. 더 나아가, 괴델은 본질적으로 산술적 체계가 불완전하다는 것을 주장하였다. 즉, G에 몇 개의 공리를 더 추가하더라도, 여전히 모든 산술적 참인 명제들을 형식적으로 증명함에는 충분하지 않다는 것이다. 이 내용이 바로 괴델의 제 1불완전성 정리다. 산술적 체계가 무모순적이면 그 체계 내에는 참이지만 결정 불가능한 명제가 존재한다는 것이다.

마지막으로, 하나의 산술적 논리식 A를 다음과 같이 초수학적 진술로 표현하였다.

A: 산술은 무모순적이다.

그리고 논리식 '$A \supset G$' 가 형식적으로 증명가능함을 증명하였다. 마침내, 괴델은 논리식 A가 증명 불가능하다는 것을 보였다. 즉, 괴델은 산술체계가 무모순적이라 하더라도 그 무모순성을 그 체계 내에서는 증명할 수 없다는 것이다. 이것이 괴델의 제 2불완전성 정리의 내용이다.

9. 괴델의 정리에 관한 다음과 같은 문제를 제기한다.

가. 이 정리는 수학은 물론 철학 등 학문의 전 분야에 시사하는 바가 적지 않을 것이다. 이 정리로부터 형식적인 수학의 한계를 주장할 수 있을까? 더 나아가 형식적 수학의 한계로부터 컴퓨터 인공지능 등에 관한 능력의 한계를 주장할 수 있을까?

나. 수학기초론에서의 형식주의 접근은 수학적 진리를 위한 완벽한 기초를 제공하는데 실패하였다고 할 수 있을 것이다. 그렇다면 형식주의적 접근이 수학에 공헌한 면은 무엇일까? 이와 동일한 문제를 논리주의(logicism)적 접근이나 직관주의(intuitionism)적 접근의 경우에 제기하면 어떨까?

다. '수학은 의심의 여지가 없는 여러 개의 정리를 차곡차곡 쌓아 놓듯이 발전하는 것이 아니라, 사고의 비평에 따라 끊임없이 새로운 추측으로 대치되면서 발전한다.'는 라카토스(I. Lakatos)의 입장은 괴델의 정리와 일맥상통한다고 할 수 있을까?

라. 괴델은 플라톤주의자(Platonist)라고 할 수 있을까?
마. 다음과 같이 주장하면 어떨까?

(1) 괴델의 정리는 인간 정신의 한계를 말하는 것이 아니라 인간 정신의 형식적 모델의 한계를 말하는 것이다. 완벽한 수학적 체계는 있을 수 없고 항상 더 나은 수학적 체계가 가능하다는 것을 알 수 있다.

(2) 이 정리는 산술의 무모순성을 산술의 형식적 연역으로 증명할 수 없다는 것이지, 어떠한 초수학적 증명이 불가능하다는 것은 아니다. 즉, 산술의 무모순성에 관한 증명 가능의 여지는 있다. 사실, 겐첸(Gerhard Gentzen)은 1936년에 산술(arithmetic) 체계의 무모순성(consistency)과 완전성(completeness)을 초한 귀납법(무한 단계)을 적용하면 증명 가능함을 보였다.[5] 그러나 자연수의 산술공리계가 힐베르트가 요구하는 유한논증(finitary proof)에 의하여 무모순이 증명되지 않을 것으로 여겨진다. 겐첸의 결과로부터 다음과 같이 주장할 수 있을 것이다: 형식주의적 입장을 옹호하기 위해서는 직관주의적 관점인 유한(finitary) 논리에서 초한적(transfinite) 논리로 바뀌어야 한다.

(3) 앙드레 베유(A. Weil)는 다음과 같이 말할 바 있다. '신은 존재한다. 왜냐하면 산술은 모순이 없기 때문이다. 악마도 존재한다. 왜냐하면 우리들은 산술의 무모순성을 증명할 수 없기 때문이다.' 이는 베유가 괴델의 정리에 큰 의의를 부여한 것으로 볼 수 있다.

(4) 학교 수학과 교육과정에서는 수학의 정의적(affective) 측면보다 인지적(cognitive) 측면이 더 강조된다고 할 수 있다. 그러나 제7차 교육과정과 제7차 교육과정을 개정하여 2006년에 공포된 교육과정[6]에서는 정의적 측면도 강조할 것을 요구하고 있다. 이때의 문제는 교과서나 익힘책을 통한 정의적 측면의 구현은 인지적 측면에 비해 용이하지 않다는 것이다. 결국 정의적 측면의 구현은 교사의 수학에 대한 인식이나 신념에 크게 좌우된다. 이는 교사로 하여금 수학사, 수학교육사, 그리고 수학철학 등에 관한 폭 넓은 지식을 요구한다. 이렇게 볼 때, 수학 교사에게 괴델의 정리에 대한 이해는 의미가 있다고

5) 겐첸의 방법으로도 수학 전체의 무모순성을 증명할 수는 없다.
6) 국민공통기본과정(1-10학년)을 말한다. 선택과정(11-12)은 2007년도에 공포되었다.

할 수 있다.

바. 다음 주장의 타당성에 관하여 논의하여라.

· 모순적인 공리체계는 완전하다.

· 공리체계가 불완전하면 무모순적이다.

· 괴델의 제1 불완전성 정리에 의하여 산술공리를 포함하는 공리체계는 불완전하다. 따라서 산술공리를 포함하는 공리체계는 무모순적이다.

사. 이 정리의 내용을 다양한 그림으로 나타내는 경우가 있다(예를 들어, [9]). 다음 그림에 관하여 논의하여라. 이 그림은 증명가능한(provable) 명제와 증명불가능한(unprovable) 명제 사이의 구분이 모호할 수 있고, 마찬가지로 참명제(fact)와 거짓명제(non-fact) 사이의 구분이 모호할 수 있음을 나타내는 것이다.

10. 괴델의 정리와 관련하여 다음과 같은 사실을 언급한다.

가. 골드바흐 추측은 산술적 체계 내에는 참이지만 결정 불가능한 명제가 아닐까? 미해결 문제들 중 어떤 것은 증명 가능한 것이고, 어떤 것은 영원히 증명 불가능한 것인지를 구분할 수 있다면 수학자들은 보다 효율적으로 연구를 수행할 수 있을 것이다. 그러나 이 또한 불가능함이 1936년에 처치(Church)에 의해 밝혀졌다.

처치의 정리

자연수 체계를 포함하는 무모순인 임의의 형식적인 체계에 대해서, 그 체계의 어떤 명제들이 그 체계 안에서 증명될 수 있는지를 결정하는 효과적인 방법은 존재하지 않는다.

나. 괴델의 정리 이후 나온 처치의 정리는 결정가능성에 대한 효과적인 알고리즘 또한 존재하지 않는다는 것을 증명하였다. 이와 같은 결정문제(decision problem)에 대해 처치의 정리와 동일한 결과는 튜링(Turing)에 의해서도 밝혀졌다. 튜링은 결정문제를 해결하기 위

해 튜링기계(Turing machine)라는 것을 고안하였다. 튜링은 튜링기계를 이용하여 다음과 같은 정지정리를 발표한 것이다.

정지(Halting) 정리

모든 튜링 프로그램의 정지 여부를 밝히는 것을 목적으로 하는 임의의 튜링기계 프로그램 H에 대하여, 입력자료 I를 처리할 때 프로그램 P가 정지할 것인지 여부를 프로그램 H가 결정할 수 없는 프로그램 P와 입력자료 I가 존재한다.

3. 나오는 말

학교 교사는 수학에 대하여 얼마나 깊이 알아야 하는가? 이 질문에 대한 답은 자명하게 '가급적 깊이' 일 것이다. 특히, 수학교사는 교육학적 지식과 탁월한 교수법은 물론이고 전문 수학자 수준의 지식을 겸비하여야 한다는 데에는 이의가 없을 것이다.

문제는 교사양성대학의 교육연한도 4년이고, 이 기간에 교과내용학(수학), (일반)교육학, 교과(수학)교육학, 교육실습을 필수적으로 이수하여야 한다는 것이다. 따라서 교사양성과정에서 수강할 수 있는 교과내용학의 강좌 시수는 일반 수학과 과정에 비해 현저히 적을 수밖에 없다.

괴델의 정리가 가지는 수학적, 수학교육적 의의가 크다는 것에 대해서는 쉽게 동의할 수 있다. 그러나 사범대학 수학교육과에서 이 정리를 다룰 수 있는 강좌로서 개설되는 것은 보통 3학점 정도의 '집합론'이다. 이러한 현실은 괴델의 정리를 만족스럽게 다룰 수 없게 한다.

이 정리의 중요성을 감안하여 볼 때, 적절한 수준으로 이 정리를 소개할 수 있는 방안은 필요하다고 할 수 있다. 그러한 방안에서는 결정적인 오류나 큰 오해의 소지가 없는 범위에서는 용어의 부정확성이나 논리의 비약을 어느 정도는 감내해야 할 것이다. 이 글에서 제시되는 방안이 괴델 정리의 내용을 일목요연하고 정확하게 소개한다고는 볼 수 없다. 그러나 정리의 내용이나 의의 그리고 증명의 핵심 아이디어를 개략적으로 이해하는 데에는 도움이 될 것이다.

참고문헌

[1] 박여성 옮김, 괴델, 에셔, 바흐 : 영원한 황금 노끈(상)(하), 까치, 2001.

[2] 박정일 옮김, 괴델, 몸과 마음, 2002.

[3] 배식한 옮김, 괴델의 삶, 사이언스북스, 1997.

[4] 서봉건, 괴델의 불완전성 정리의 수학교수학적 의의와 활용, 한국교원대학교 석사학위 논문, 2003.

[5] 우정호 옮김, 수학적 발견의 논리, 아르케, 2001.

[6] 임승원 옮김, 괴델 불완전성 정리, 전파과학사, 2000.

[7] Goldstein, R., *Incompleteness: The proof and paradox of Kurt Gödel*, Atlas Books, 2005.

[8] Greenberg, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean geometries,* W. H. Freeman and Company, 1972.

[9] Hofstadter, R., *Gödel, Escher, Bach: an Eternal* Golden Braid, 1979.

[10] Lakatos, I., *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery,* 1976.

[11] Nagel, E. & Newman, R., *Gödel's Proof,* New York University Press, 1958.

Shin Hyunyong
Dept. of Mathematics Education,
Korea National University of Education, 363-791, Korea
E-mail: shin@knue.ac.kr