韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2008. 11. 제 47권, 제 4호, 437-445

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
November. 2008, Vol. 47, No. 4, 437-445

일차변환 관점에서의 도형의 성질 이해 및 학교수학에의 시사점

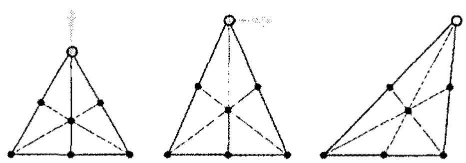
홍 갑 주 (서울대학교 과학영재교육센터)

I. 서 론

기하학을 일률적으로 전개하는 한 가지 관점으로서 변환개념의 중요성은 일찍이 강조되어 왔다. 그러나 학교수학에서 그러한 관점을 살펴볼 수 있는 구체적인 기회는 제공되지 않았다. 이전 6차 교육과정에서 일차변환이 다루어졌으나 그 기하학적 성질에 대한 체계적인 관찰은 다루어지지 않았으며, 현재의 7차 교육과정에는 일차변환이 빠져있다. 허은숙(2004)이 지적했듯이, 일차변환 관련 단원의 삭제로 인해 선형대수의 주제로 통합될 수 있는 개념 곧, 연립일차방정식, 행렬, 벡터, 이차곡선 등의 연결성은 7차 교육과정에서 더욱 약화된 측면이 있다. 2007년 개정 교육과정에서는 일차변환이 '기하와 벡터' 선택교과에 포함됨으로써 교육과정에 재등장하게 된 바(교육인적자원부, 2007), 일차변환의 의미에 대해 학교수학의 다른 교육내용과 연관하여 다시 고찰해 볼 필요성이 있는 시점이라 하겠다.

물체의 평형과 무게중심의 위치에 대한 최초의 수학적 연구는 고대 그리스의 수학자 Archimedes의 업적으로 알려져 있다. 자신의 논문 《평면도형의 평형》 I 권과 II 권에 걸쳐 Archimedes는 물체의 평형에 대한 가장 근본적이라고 생각되는 몇 가지 원리를 공리로 삼아 지레의 법칙을 유도해 냈으며, 삼각형과 사다리꼴 등의 다각형의 무게중심, 그리고 더 나아가 곡선으로 둘러싸인 도형의 무게중심 위치까지 구한다(Dijksterhuis, 1987). 무게중심에 대한 그의 공리계에서 공리 4와 5는 두 닮은 도형에 대해 각각의 무게중심은 서로 닮음의 위치에 있다는 것이었는데[1], 무게중심에 대한 그의 연구 전반에서 핵심적이었던 이 공리들은 현대적인 용어를 사용할 때 "평면도형 A의 무게중심을 $G(A)$라 하면, 임의의 닮음변환 S에 대해 $S(G(A))=G(S(A))$ 이다" 혹은 더욱 간략하게 "무게중심은 닮음변환에 의해 보존된다"라고 표현할 수 있다.

한편, 삼각형의 세 중선은 한 점에서 만나며 그 교점 즉 삼각형의 무게중심은 세 중선을 꼭지점으로부터 2:1로 내분한다는 성질이 모든 삼각형에 대해 성립함을 염두에 두면, 한 삼각형의 꼭지점을 끌어서 다른 삼각형 모양으로 변형시키는 과정에서 무게중심도 "그 변화를 따라서" 새로운 삼각형의 무게중심으로 점차 이동하는 모습을 상상할 수 있다(홍갑주, 2008). 이때 새로운 삼각형의 무게중심은 원래 삼각형의 무게중심이 두 삼각형 사이의 변형에 의해 옮겨간 것이다<그림 1>.



<그림 1> 삼각형의 변형과 무게중심의 이동

이상의 관찰에서 고려한 도형의 두 가지 변형과 그에 따른 무게중심의 이동은 수학적으로 일차변환에 의해 잘 설명될 수 있다. 또한 타원과 포물선의 성질 중 많은 것도 그러하다. 본 연구에서는 무게중심 및 곡선의 성질에 대한 일차변환 관점에서의 이해를 모색하고, 이를 통해 고등학교 교육과정에서 단편적으로 다루어졌던 일차변환의 성질들이 체계적으로 조합되어 다루어질 때 가지게 되는 수학적 힘을 부각시키는 한편, 이러한 고찰의 교육적 의의를 논의하고자 한다.

* 2008년 7월 투고, 2008년 8월 심사 완료
* ZDM분류 : G54
* MSC2000분류 : 97D30
* 주제어 : 타원, 포물선, 무게중심, 변환, 아르키메데스, 아핀변환, 일차변환

1) 공리 4는 두 도형이 합동인 경우에 대해, 공리 5는 합동이 아닌 경우에 대해 말한다.

II. 이론적 배경

1. 변환 관점에서의 기하학적 개념과 증명

기하학에서 변환 개념의 역할에 대한 가장 대표적인 논의는 1872년 F. Klein이 제창한 에르랑겐 프로그램을 통해 이루어졌다. 기하학을 서술하기 위한 도구로서, 에르랑겐 프로그램은 여러 기하학에 대한 일률적인 전개와 여러 기하학 사이의 비교를 가능하게 한다(Henle, 2001). 기하학을 통합하는데 있어서 Klein이 사용한 핵심적인 개념은 '합동'인데, 이때 합동의 정의는 측정에 의존하는 고전적 정의와는 달리, 변환의 개념에 의존한다[2]. 즉, 어떤 변환을 통해 한 도형이 다른 도형과 겹쳐질 때 두 도형을 합동이라 정의한다. 기호를 사용하자면, "어떤 변환 f에 대해 $A=f(B)$일 때 A와 B가 합동이다"라고 적을 수 있다. 그러면 두 도형이 합동인지의 여부는 그 기하학에서 어떤 변환들을 합동을 정의하는 변환으로 선택하느냐에 따라 달라진다. 예컨대, Euclid변환 하에서 임의의 두 삼각형은 일반적으로 합동이 아니지만 곧 언급할 일차변환 하에서 모든 삼각형은 합동이며 임의의 두 평행사변형에 대해서도 그러하다.

에르랑겐 프로그램에서 기하학의 주된 연구대상인 '불변량(invariant)'은 합동변환에 의해 변하지 않는 개념 혹은 측정값을 말한다. 예를 들어, '직사각형'은 Euclid변환에 대한 불변량이며, 도형의 '둘레'나 '넓이'도 그러하다. 그러나 이것들은 일차변환에 대해서는 불변량이 아니다. 에르랑겐 프로그램에서 불변량이 아닌 개념이나 측정값의 사용을 금하는 것은 아니지만, 어떤 명제가 특정한 기하에 속한다고 말하기 위해서는 그 명제가 그 기하의 합동변환군[3] 하에서의 불변량의 용어로만 표현될 수 있어야 한다고 주장한다. 수학문제의 해결에 있어서 에르랑겐 프로그램의 체계적인 적용은 실용적으로 중요한 기술 하나를 제공한다. 즉, 어떤 합동변환군 하에서 서로 합동인 도형들의 집합 A와, A에 속하는 도형 전체에 대한 어떤 주장 W가 있을 때, W에서 언급된 모든 도형 및 측정들이 그 기하학의 불변량이라면 A에 속하는 특정한 한 도형에 대해서 W를 증명하는 것만으로 모든 경우에 대한 증명이 완결된다(Henle, 2001). 이러한 사고는 학교수학의 증명에서도 암묵적으로 쓰이고 있다. 예를 들어 10-나 단계 교과서에서 '삼각형의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만남을 좌표평면을 이용하여 증명하라'는 문제의 풀이(양승갑 외, 2002: 197)를 보면, 계산을 편하게 할 수 있는 특정한 위치와 방향의 삼각형에 대한 증명을 임의의 위치 및 방향으로 놓인 도형에 대한 증명으로 간주하는데, 이것이 수학적으로 정당화될 수 있는 것은 그 증명에서 언급된 도형과 측정값들이 Euclid 기하학에서의 불변량이기 때문이다.

2. 일차변환의 기하학적 성질

일차변환은 상수 a, b, c, d에 대해 $T(x, y) = (ax+by, cx+dy)$ 로 정의되는, 행렬로 표현할 때는 $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 로 정의되는 평면상의 변환이다. 원점을 기준으로 하는 닮음변환은 일차변환의 특수한 한 경우이다. 일차변환에 평행이동을 합성하여 $T(x, y) = (ax+by, cx+dy)+(e, f)$로 정의할 때의 변환 T를 아핀변환이라 하는데, 설명의 일반성을 위해 앞으로 T는 아핀변환이라 가정하기로 한다. Stein(1999)이 보여주었듯이 아핀변환은 고등학교의 수준을 벗어나지 않고 증명할 수 있는 흥미로운 성질을 가지고 있다. 앞으로의 논의와 관련하여 아핀변환의 성질은 다음과 같이 정리할 수 있다. 단, 아래에서 $ad-bc$는 0이 아닌 것으로 가정하는데, 이는 T가 일대일대응임을 보장한다.

[1] 임의의 서로 다른 세 점 A′, B′, C′에 대해 $T(\mathrm{A})=\mathrm{A}'$, $T(\mathrm{B})=\mathrm{B}'$, $T(\mathrm{C})=\mathrm{C}'$ 인 어떤 아핀변환 T가 존재한다.

---

2) 합동과 측정이 수학체계의 전개과정 속에 놓이는 선후관계는 전통적인 기하와 Klein의 기하를 구별해 준다. 전통적인 기하에서는 측정이 먼저 주어지고, 측정값이 일치하는 두 도형을 합동이라 말한다. 반면 Klein의 기하에서는 합동이 먼저 정의되고, 합동인 도형에 대해 같은 값을 가지는 함수를 측정이라 부른다. 예를 들어 도형의 넓이는 Euclid 변환 하에서 불변이므로 Euclid 기하학에서의 측정이다(Henle, 2001).

3) 합동은 동치관계이어야 의미가 있다. 즉, 항등함수는 합동변환이어야 하고, 합동변환의 역변환과 합동변환들의 합성변환 역시 합동변환이어야 한다. 따라서 합동변환 전체의 집합은 군 구조를 가지게 되며, 여기에서 변환군의 정의가 유도된다.

[2] 아핀변환은 직선을 직선으로 옮긴다. (즉, T가 아핀변환이고 L이 직선이라고 할 때, $T(L)$ 역시 직선이다.)

[3] 아핀변환은 평행한 두 직선을 평행한 두 직선으로 옮긴다. 그리고 한 점에서 교차하는 n 개의 직선을 한 점에서 교차하는 n 개의 직선으로 옮긴다.

[4] 아핀변환은 임의의 평행한 두 선분을 같은 배율로 확대(축소)시키며, 그 배율은 오직 선분의 방향에 따라 결정된다. 따라서 특히, 아핀변환에 의해 선분의 내분비가 보존한다.

[5] 아핀변환 $T(x,y)=(ax+by+e,\ cx+dy+f)$는 주어진 영역의 넓이를 $|ad-bc|$ 배로 만든다.

[6] 아핀변환의 역변환도 아핀변환이다. 따라서 역변환 역시 위의 모든 성질들을 갖는다.

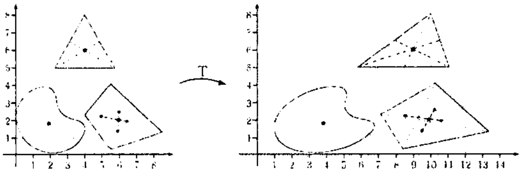
Ⅲ. 일차변환 관점에서의 도형의 성질 이해

1. 무게중심과 일차변환

세 중선의 교점으로 정의되는 삼각형의 무게중심의 기하학적 정의는 세 중선의 교점이 반드시 한 점에서 만난다는 것을 전제로 하고 있다. 또 한편으로, 무게중심은 세 중선 각각을 2:1로 내분한다는 성질이 이 정의로부터 증명된다. 변환의 관점에서 이 두 가지 사실은 삼각형의 무게중심을 정의하는데 사용되는 삼각형, 중선, 선분들의 교점, 선분의 내분 비 등의 개념이 아핀변환 하에서의 불변량임을 파악함으로서 다음과 같이 증명될 수 있다 (홍갑주, 2008).

증명. 정삼각형 ABC에 대해 세 중선이 한 점에서 만나며, 그 교점 G는 세 중선을 꼭지점으로부터 2:1로 내분한다는 사실은 정삼각형이 가진 특별한 대칭성에 의해 쉽게 보일 수 있다. 이제 임의의 삼각형 A′B′C′를 생각하자. [1]에 의해, $T(\mathrm{A})=\mathrm{A}'$, $T(\mathrm{B})=\mathrm{B}'$, $T(\mathrm{C})=\mathrm{C}'$ 인 어떤 아핀변환 T가 존재한다. [2]에 의해, 삼각형 A′B′C′는 정삼각형 ABC의 T에 의한 상이다. [4]에 의해, 삼각형 ABC의 세 변의 중점들은 T에 의해 삼각형 A′B′C′의 세 변의 중점에 대응되며, 따라서 삼각형 ABC의 세 중선들은 삼각형 A′B′C′의 세 중선에 대응한다. [3]에 의해 삼각형 A′B′C′의 세 중선 역시 한 점에서 만나며, 그 교점 G′는 T에 의한 G의 상이다. [4]에 의해 G′는 삼각형 A′B′C′의 세 중선을 2:1로 내분한다. □

즉, 세 중선의 교점(=중선을 꼭지점으로부터 2:1로 내분하는 점)은 아핀변환에 의해 보존된다. $n>3$일 때 n각형은 두 가지 이상의 방법으로 $n-1$각형과 3각형으로 분할됨을 이용하면 작도를 통해 일반적인 다각형의 무게중심을 구할 수 있는데, 이 사실을 이용하여 위의 증명을 확장하면 일반적인 다각형의 무게중심 역시 아핀변환에 의해 보존됨을 보일 수 있다<그림 2>.



<그림 2> 아핀변환 $T(x,\ y)=(2x+y,\ y)$에 의한 도형들의 상 및 그 무게중심의 상의 예

한편 물리적인 관점에서는, 도형의 무게중심은 양쪽의 회전력의 크기를 일치시키는 서로 다른 방향의 두 직선의 교점으로 정의된다. 따라서 좌표평면 위에 놓인 도형 R의 무게중심 $(\bar{x}.\ \bar{y})$은 두 직선 $x=\bar{x}$, $y=\bar{y}$에 대한 회전력의 합이 각각 0이라는 조건 즉, $\iint_R (x-\bar{x})dxdy=0$, $\iint_R (y-\bar{y})dxdy=0$ 으로부터 R의 넓이 $m=\iint_R 1dxdy$ 에 대해 $\bar{x}=\frac{1}{m}\cdot\iint_R x\,dxdy$, $\bar{y}=\frac{1}{m}\cdot\iint_R ydxdy$ 로 구해진다(Hecht, 1996). 물리적인 정의에 의한 무게중심에 대해서도 그것이 아핀변환에 의해 보존됨을 다음과 같이 보일 수 있다(홍갑주, 2008)[4].

4) 무게중심의 물리적 정의에 비추어 삼각형 무게중심의 기하학적 정의에서 중선이 가지는 의미에 대해서는 홍갑주(2005)가 논의한 바 있다. 즉, 모든 방향에 대해, 자신의 양쪽 영역이 만드는 회전력의 크기를 일치하게 만드는 직선이 존재하며 이 직선들은 한 점에서 만난다. 중선은 바로 이 직선들 중 하나이다. 중선은 작도가 용이하므로 물리적인 의미의 삼각형 무게중심을 찾는데 이용하면 편리하지만, 이때 세 중선의 작도는 무게중심의 위치를 찾는 편리한 수학적 방법일

증명. 아핀변환 $T(x,y)=(ax+by+e,\ cx+dy+f)$에 대해, $(u,v)=\mathrm{T}(x,y)$ 라 하고, $\mathrm{T}(R)=R'$이라 두자. R'의 무게중심을 $(\bar{u}, \bar{v})$라 하면,

$$\bar{u}=\frac{\iint_{R'} u\,du\,dv}{\iint_{R'} 1\,du\,dv}, \quad \bar{v}=\frac{\iint_{R'} v\,du\,dv}{\iint_{R'} 1\,du\,dv}$$

인데,

$$\iint_{R'} u\,du\,dv = \iint_{R} \{(ax+by+e)\cdot|ad-bc|\}\,dx\,dy,$$

$$\iint_{R'} v\,du\,dv = \iint_{R} \{(cx+dy+f)\cdot|ad-bc|\}\,dx\,dy,$$

$$\iint_{R'} 1\,du\,dv = \iint_{R} |ad-bc|\,du\,dv = |ad-bc|\cdot m$$

이므로, $\bar{u}=a\bar{x}+b\bar{y}+e$, $\bar{v}=c\bar{x}+d\bar{y}+f$. 즉, $T(R)$의 무게중심$=(\bar{u}, \bar{v})=T(\bar{x}, \bar{y})=T(R$의 무게중심$)$이다. □

대학의 미적분학이나 물리 교재에서 도형의 평형을 찾아주는 두 직선의 교점으로서 무게중심을 구할 때 일반적으로 x-축과 y-축 각각에 평행한 직선들만 고려하는데, 이 증명은 이때 고려하는 직선의 방향은 상관없다는 증명을 포함한다. 직선의 방향을 회전시키는 것은 도형을 역으로 회전시키는 것과 같은데, 회전변환 역시 하나의 아핀변환이기 때문이다.

2. 이차곡선과 일차변환

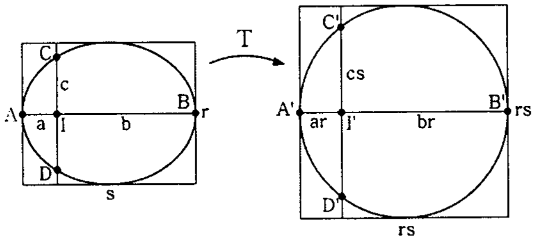
Archimedes는 그의 연구에서 포물선, 타원, 쌍곡선 등 이차곡선의 성질을 여러 곳에서 이용하고 있는데, 그가 이용한 성질 중 많은 것은 아핀변환을 통해 간단하게 설명될 수 있다. 먼저 타원에 대한 예를 살펴보자. Archimedes는 《The Method》에서 타원회전체의 부피를 구하는데 다음의 명제를 이용하였다.

> 타원의 장축 AB에 대해 그것과 수직인 현 CD를 생각하고 그 교점을 I라 하자<그림 3>. 타원의 단축의 길이를 r, 장축의 길이를 s, AI의 길이를 a, BI의 길이를 b, CI의 길이를 c라 할 때 $ab:c^2=s^2:r^2$ 이다.

뿐이며, 중선의 의미는 그 물리적인 의미를 통해 해석되어야 한다는 것이다.

타원의 한 특수한 경우인 원(즉, $s=r$ 인 경우)에 대해서는 삼각형 ACI와 CBI가 닮은 삼각형이라는 사실로부터 $a:c=c:b$ 즉, $ab=c^2$ 임이 쉽게 증명된다. 이 사실에 착안하여 위의 명제를 다음과 같이 증명할 수 있다.

증명. 주어진 타원은 $\frac{4x^2}{s^2}+\frac{4y^2}{r^2}=1$ 이라 둘 수 있다. x축 방향으로 r 배, y축 방향으로 s 배 확대하는 아핀변환 $\mathrm{T}(x,y)=(rx, sy)$에 의해, 이 타원은 원점을 중심으로 하는 원 $x^2+y^2=\frac{r^2s^2}{4}$로 옮겨진다.

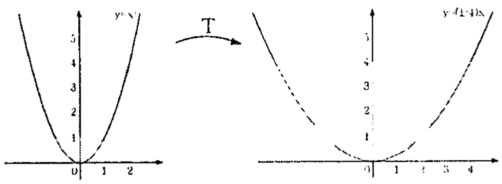


<그림 3> 타원은 원의 아핀변환에 의한 상이다

T에 의해 원 위로 옮겨간 점들을 A′, B′, C′, D′, I′라 할 때 A′I′의 길이는 ar, B′I′의 길이는 br, C′I′의 길이는 cs이다. 이때 $\mathrm{A'I'}\cdot\mathrm{B'I'}=\mathrm{C'I'}^2$이므로 $ar\cdot br=(cs)^2$ 즉, $ab:c^2=s^2:r^2$ 이다□[5].

이제 포물선에 대해 살펴보자. 우선, 변환의 관점에서 쉽게 파악할 수 있는, 간단하면서도 쉽게 발견하기 어려웠던 포물선의 성질이 하나 있는데, 임의의 두 포물선은 닮음이라는 사실이다. 이는 포물선 $y=ax^2$은 닮음변환 $T(x,y)=\left(\frac{1}{a}x, \frac{1}{a}y\right)$에 의한 포물선 $y=x^2$의 상이라는 사실로부터 알 수 있다.

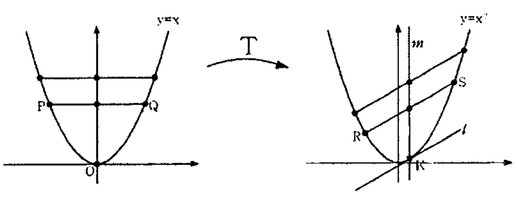
5) 사실 아핀변환을 이용하면 더욱 일반화된 명제를 증명할 수 있다. 즉, "타원의 중심을 지나는 임의의 직경 AB에 대해, AB를 가로지르는 타원의 절단선분 CD와 AB와의 교점을 I라 하면, CI = DI이고, $\mathrm{CI}^2/(\mathrm{AI}\cdot\mathrm{BI})$는 상수이다"(Stein, 1996).



<그림 4> 모든 포물선은 닮음이다. 예를 들어, 포물선 $y=(1/4)x^2$은 닮음변환 $T(x,y)=(4x,4y)$에 의한 $y=x^2$의 상이다

Stein(1999)은 Archimedes가 포물선조각[6]의 넓이와 무게중심을 구할 때 사용했던, 《포물선의 구적》 앞부분에 제시된 포물선의 성질들이 아핀변환의 성질을 통해 어떻게 간단하게 증명될 수 있는지를 보였다. 그 증명에서 이용되는 핵심적인 성질은, [a] 임의의 포물선 P를 그 자신으로 옮기되, P 위의 임의의 서로 다른 두 점 P, Q을 P 위의 임의의 서로 다른 두 점 R, S로 옮기는 아핀변환이 유일하게 존재한다는 것, 그리고 [b] 이 아핀변환은 y-축에 평행한 직선을 y-축에 평행한 어떤 직선으로 옮긴다는 것이다. 예를 들어, 《포물선의 구적》의 명제 1은 이 성질을 이용하여 다음과 같이 간단히 증명될 수 있다.

명제1. RS를 포물선의 하나의 현이라고 하고 l을 RS에 평행하고 포물선에 접하는 직선이라고 하자. 또, K를 l과 포물선의 접점이라고 하자. 그러면 K를 지나서 포물선의 축에 평행한 직선은 현 RS, 그리고 RS에 평행한 모든 현을 이등분한다.



<그림 5> 아핀변환을 이용한 《포물선의 구적》 명제1의 설명

증명. 포물선 $y=x^2$에 대해서만 증명하면 된다. 먼저, x-축에 평행한 현 PQ에 대해서는 대칭성에 의해 자명하다[7]. 성질 [a]에 의해, 이 포물선을 그 자신으로 옮기되, P를 R로, Q를 S로 옮기는 아핀변환 T가 존재한다. 이 아핀변환은 현 PQ를 RS로 옮기며, 현 PQ에 평행한 접선(즉 x축)을 현 RS에 평행한 접선 l로, 원점을 접점 K로 옮긴다. 또한 [b]에 의해 y-축을 y-축에 평행한 직선 m으로 옮긴다. 아핀변환은 선분의 중점을 보존하므로 m은 RS와 평행한 모든 현을 이등분한다. □

이제, <그림 5>에서와 같이 정해진 K를 포물선조각 RKS의 꼭지점, 직선 m을 포물선조각 RKS의 축이라 부르기로 하고, 포물선조각의 무게중심에 대해 생각해 보자. 우선 좌우 대칭인 특정한 어떤 포물선조각을 생각해 보면, 그 무게중심은 자신의 대칭축을 어떤 특정한 비 $a:b$로 내분하는 위치에 있을 것이다[8]. 도형의 무게중심과 선분의 내분 비가 아핀변환에 의해 보존된다는 사실과 앞의 성질 [a], [b]를 이용하면, 모든 포물선조각의 무게중심이 그 포물선조각의 축 위에, 그 축을 $a:b$로 내분하는 위치에 있음을 곧바로 알 수 있다. 실제로 Archimedes는 《평면도형의 평형》 II권에서 임의의 포물선조각의 무게중심은 그 포물선조각의 축 위에, 그 축을 포물선조각의 꼭지점으로부터 3:2로 내분하는 위치에 있음을 자신의 공리들로부터 증명했는데(Dijksterhuis, 1987), 포물선조각의 무게중심 위치에 대한 Archimedes의 표현 속에는 이와 같이 아핀변환의 성질이 내재해 있었음을 알 수 있다.

IV. 아핀변환을 이용한 문제 해결

이 절에서는 모 과학고 2007년도 R&E 프로그램 참여 학생들의 작도문제 해결을 중심으로 아핀변환의 성질이 문제 해결에 적용되는 예를 살펴보고자 한다. 이 학생들은 '그리스 수학의 현대수학적 접근'이란 주제로 연구했으며, 아핀변환의 성질과 그 활용을 소주제중 하나로서 탐구하였다. 학생들이 설정하여 해결한 세 문제와 그들

6) 포물선과 그 현에 의해 갇힌 도형.

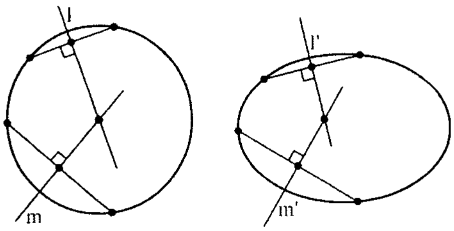
7) PQ에 평행한 접선은 x-축이고 접점은 원점이므로 접점을 지나서 포물선의 축, 즉 y-축에 평행한 직선은 y-축 자신이기 때문이다.

8) 좌우 대칭인 도형의 무게중심은 그 대칭축상에 놓인다는 사실은 Archimedes의 공리계로부터 간단하게 증명될 수 있다.

의 해결방법은 다음과 같다.

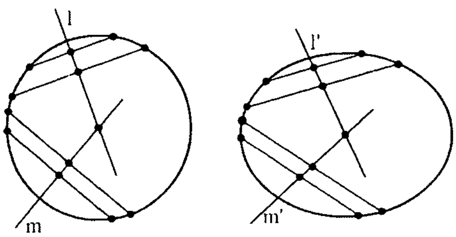
문제1. 주어진 타원의 중심을 작도하라.

이 문제는 모 대학의 입시 예시 문제로도 출제된 바 있는 것이다. 학생들은 원의 특수한 경우에 대해 문제를 해결하는 것으로부터 출발했다. 즉, 학생들은 원에 대해서 그 중심은 단지 임의의 두 현에 대한 수직이등분선 l, m의 교점으로서 찾을 수 있음을 확인하였다<그림 6-左>. 그러나 학생들은 타원에 대해서는 이 방법을 적용할 수 없음을 곧 발견하였다<그림 6-右>. 이는 아핀변환에 의해 직교성은 보존되지 않는다는 사실을 통해 이해할 수 있다.



<그림 6> 직교성을 이용한 타원의 중심 작도(실패)

따라서 학생들은 원의 중심을 지나는 위의 두 직선 l, m을 직교성이 아닌, 아핀변환에 의해 보존되는 어떤 성질로서 표현하는 방법을 모색하였으며 결국 이를 통해 정확한 풀이에 이르렀다. 즉, 학생들은 원에 대해서 임의 방향의 두 평행한 현을 그린 다음 그 중점을 연결한 직선으로서 l을 작도하고, 또 다른 방향의 두 평행한 현을 그린 다음 그 중점을 연결한 직선으로서 m을 작도하였다. 이 두 직선의 교점은 원의 중심이다<그림 7-左>.

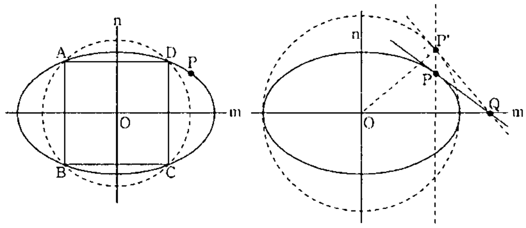


<그림 7> 선분의 내분 비를 이용한 타원의 중심 작도(성공)

이 작도 방법은 타원의 중심을 찾는 데에도 그대로 적용된다<그림 7-右>. 이는 다음과 같이 증명된다. 즉, 아핀변환에 의해 직선들의 평행성과 평행한 선분들의 길이 비가 보존되므로, 이 원을 주어진 타원으로 보내는 아핀변환에 의해 원의 평행한 두 현은 타원의 평행한 두 현으로, 원의 현들의 중점은 타원의 현들의 중점으로 간다. 그리고 원의 평행한 두 현의 중점들을 연결한 두 직선 l과 m은 각각 타원의 대응하는 두 현의 중점들을 연결한 두 직선 l'와 m'로 간다. 원에 대해 l과 m의 교점은 원의 중심이고 원의 중심은 타원의 중심으로 가므로 타원에 대해 l'와 m'의 교점은 타원의 중심이다.

문제2. 타원의 주어진 점 P에서 접선을 작도하라.

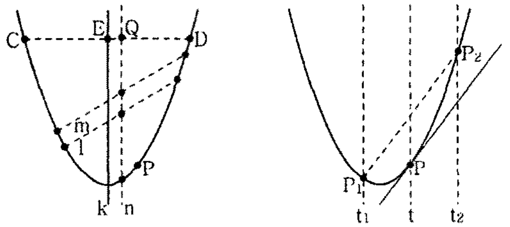
학생들이 제시한 작도법은 다음과 같다. 먼저, 타원의 중심 O를 문제1에서와 같이 작도한다. 다음으로, 타원의 축을 작도하기 위해 O를 중심으로 하고 타원과 네 점 A, B, C, D에서 교차하는 원을 작도한다<그림 8-左>. 이때 직사각형 ABCD의 두변 AB와 BC의 수직이등분선을 각각 m, n이라 하면 m과 n은 각각 타원의 장축과 단축을 포함하는 직선이 된다. 이제 O를 중심으로 하고 타원의 장축 길이의 절반을 반지름으로 하는 원 O를 그린다<그림 8-右>. 점 P를 지나며 직선 m에 수직인 직선과 원 O와의 교점을 P′라 하자. 원 O에 대한 점 P′의 접선을 작도하여 직선 m과의 교점을 Q라 하면 바로 직선 PQ가 타원 위의 점 P의 접선이 된다. 이 사실은 <그림 8>의 오른쪽 그림의 원 O를 타원 O로 옮기는 아핀변환에 의해 직선 P′Q가 PQ로 옮겨짐을 확인함으로써 증명된다.



<그림 8> 타원의 주어진 점에서의 접선 작도

문제3. 포물선의 주어진 점 P에서 접선을 작도하라.

학생들이 제시한 작도법은 다음과 같다. 우선 포물선의 축을 작도하기 위해, 먼저 임의의 평행한 두 현 l, m를 작도한다. l, m 각각의 중점들을 지나는 직선 n은 앞에서 보았듯 포물선의 축과 평행하다. n 위의 임의의 점 Q에서 n과 수직인 직선을 그려 포물선과 만나는 두 점을 C, D라 하자. 선분 CD의 중점 E을 지나며 n과 평행한 직선 k가 포물선의 축이다<그림 9-*가*>.



<그림 9> 포물선의 주어진 점에서의 접선 작도

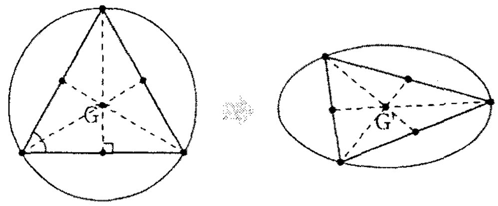
다음으로, 포물선의 축에 평행하며 점 P를 지나는 직선 t의 양쪽에 t로부터 같은 간격만큼 떨어진, t와 평행한 두 직선을 각각 t_1, t_2라고 하고, t_1, t_2와 포물선과의 교점을 각각 P_1, P_2라 하자<그림 9-*나*>. 이제 P를 지나며 현 P_1P_2와 평행한 직선이 P에서의 접선이다. 이는 앞 절의 <그림 5>를 통해 살펴본 포물선의 성질에 대한 명제1의 역을 바탕으로 증명된다.

R&E 참여 학생들이 다루었던 이상의 문제들은 작도방법을 발견하고 정당화 하는데 아핀변환의 성질을 어떻게 이용할 수 있는지를 보여준다. 마지막으로, 아핀변환의 성질을 이용하여 넓이와 관련된 문제를 해결하는 예를 살펴보고자 한다.

문제4. 원의 내접삼각형 중 최대 넓이를 가지는 삼각형이 정삼각형임을 이용하여 타원의 내접 삼각형 중 최대 넓이를 가지는 삼각형의 특성을 규정하라.

아핀변환은 각 영역의 넓이를 보존하지는 않지만 넓이의 비는 보존하므로, 원을 주어진 타원으로 보내는 아핀변환에 의한 원의 내접 정삼각형의 상이 바로 문제에서 찾는 삼각형이다. 따라서 타원에서 그러한 삼각형을 판별할 수 있는 기준을 찾아야 한다.

삼각형의 무게중심은 삼각형에 대한 선분의 길이비를 통해 정의되므로 앞에서 보았듯 아핀변환에 의해 보존된다[9]. 따라서 원의 내접 정삼각형의 무게중심 G는 타원의 대응하는 내접 삼각형의 무게중심 G'로 간다. 정삼각형의 무게중심은 곧 원의 중심이고 원의 중심은 아핀변환에 의해 타원의 중심으로 가므로 G'는 바로 타원의 중심이다. 그러므로 이 문제의 답은 '그 무게중심이 타원의 중심에 위치한 삼각형'임을 알 수 있다.



<그림 10> 정삼각형의 아핀변환에 의한 상

V. 결 론

'의미'가 형성되는 맥락에 대한 이견은 있을 지라도, 학생들에게 수학을 의미 있게 전달해야 한다는 주장 자체에는 많은 사람들이 공감하고 있다. 무게중심과 이차곡선의 성질에 대해 본 연구에서 살펴본 논의는 학교수학의 교육내용들을 변환과 불변량이라는 현대적 개념과 연결시켜 이해할 수 있는 통로를 제공한다. 일차변환의 기하학적 성질들에 대한 단계적인 증명과정은 학생들에게 방정식과 기하학을 관련시키는 흥미로운 도전이며, 문제풀이에 그 성질들을 활용하는 것은 여러 개별적 현상이 하나의 수학적 개념을 통해 통합적으로 다시 파악될 수 있음을 보여주는 학교수학 수준에서의 좋은 예이다. 또한, 일상용어를 이용할 때 불변량이란 "변하는 가운데 변하지 않는 어떤 성질"이라 묘사할 수 있는데 이러한 특별한 성질의 발견과 활용은 학생들에게 수학의 심미적인 측면을 보여주는데 있어서도 유익한 경험이 될 것이다.

9) 정삼각형의 중심은 세 내각의 이등분선의 교점(내심)이면서, 세 변의 수직이등분선의 교점(외심)이면서, 각 중선을 꼭지점에서부터 2:1로 내분하는 점(무게중심)이기도 하다. 그러나 이 중 아핀변환에 의해 보존되는 것은 마지막 성질뿐이다<그림 10>.

한편, 변환 개념의 수학적 효용이 불변량 및 보존의 개념을 통해 확연히 드러나는 것을 고려하면 이전의 교육과정에 포함되었던 일차변환의 지도가 그 핵심을 놓치고 있었던 것이 아니었는지 생각해 볼 필요가 있다. 일차변환의 기하학적 성질과 그 활용을 다루기 위한 기초지식 대부분은 이전 6차 교육과정 뿐 아니라 이번 2007년 개정 교육과정의 '일차변환과 행렬' 단원에 이미 포함되어 있다. 특히, '기하와 벡터' 선택교과에서 포물선과 타원 등을 다루는 '이차곡선' 단원이 '일차변환과 행렬' 단원에 이어 제시되므로, 포물선과 타원의 성질에 대한 일차변환 관점에서의 관찰이 자연스럽게 도입될 여지는 충분히 있다. 단, 이를 위해서는 이전 교육과정에서 연습문제의 형식으로 단편적으로 제시되었던 일차변환의 기하학적 성질들[10]을 본 연구에서 요약한 바와 같이 체계화시켜 종합적으로 관찰하는 시간이 필요할 것이다. 본 연구에서는 R&E 참여 학생들의 탐구내용을 주로 소개하였으나, 새 교육과정 하에서는 교실수업의 틀 내에서도 본 연구에서 살펴본 바와 같은 수학적 탐구가 일정 수준 이루어지기를, 그리고 이를 위해 교과서에서도 읽기자료의 형식 등으로 이러한 내용을 다루어주기를 기대한다.

참 고 문 헌

교육인적자원부 (2007). 교육인적자원부 고시 제 2007 - 79호 [별책 8] 수학과 교육과정.

허은숙 (2004). 고등학교에서 선형대수 개념 지도에 관한 연구 -수학적 연결을 중심으로-. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

양승갑 · 배종숙 · 이성길 · 박원선 · 박영수 · 홍우철 · 신준국 · 성덕현 · 김대희 (2002). 고등학교 수학 10-나, 서울: 금성출판사

홍갑주 (2005). 도형의 무게중심과 관련된 오개념 및 논리적 문제, 학교수학, **7(4)**, 391-402.

홍갑주 (2008). 아르키메데스 수학의 교육적 연구, 서울대학교 대학원 박사학위논문.

Dijksterhuis, E. J. (1987). *Archimedes*. New Jersey: Princeton university press.

Hecht, E. (1996). *Physics*, CA: Brooks/Cole.

Henle, M. (2001). *Modern geometries*. Prentice Hall.

Stein, S. (1996). Exactly how did Newton deal with his planets?. *The Mathematical Intelligencer, 18*(2).

Stein, S. (1999). *Archimedes: What did he do beside cry eureka?*. Mathematical Association of America.

10) 예를 들어, 대부분의 6차 교육과정 교과서에서 특정한 일차변환이 직선을 직선으로 옮기며 따라서 삼각형을 삼각형으로 옮긴다는 사실의 증명, 특정한 일차변환에 의한 삼각형의 넓이 변화율 계산 등을 연습문제로 포함하고 있다.

Understanding the properties of geometric figures through the linear transformation and its implication for school mathematics

Hong, Gap ju
Science-Gifted Education Center, Seoul National University, Seoul 151-748, Korea
E-mail: gapdol@empal.com

On the basis of the meaning and general process of geometric proof through transformation concept and understanding the geometric properties of linear transformation, this study showed that the centroid of geometrical figure and certain properties of a parabola and an ellipse in school mathematics can be explained as a conservative properties through linear transformation.

From an educational perspective, this is a good example of showing the process of how several existing individual knowledge can be reorganized by a mathematical concept.

Considering the fact that mathematical usefulness of linear transformation can be revealed through an invariable and conservation concept, further discussion is necessary on whether the linear transformation map included in the former curriculum have missed its point.

* ZDM Classification : G54
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D30
* Key Words : affine transformation, Archimedes, centroid, ellipse, linear transformation, parabola