經營科學
第25卷 第3號
2008年 11月

Levy-Swaption 가치 평가 모형*

†이준희** · 박종우***

Levy-Type Swaption Pricing Model

†Joonhee Rhee · Jongwoo Park

■ Abstract ■

The Swaption is one of the popular interest rates derivatives. In spite of such a popularity, the swaption pricing formula is hard to derived within the theoretical consistency. Most of swaption pricing model are heavily depending on the simulation technique. We present a new class of swaption model based on the multi-factor HJM Levy-mixture model. A key contribution of this paper is to provide a generalized swaption pricing formula encompassing many market stylize facts. We provide an approximated closed form solution of the swaption price using the Gram-Charlier expansion. Specifically, the solution form is similar to the market models, since our approximation is based on the Lognormal distribution. It can be directly compared with the traditional Black's formula when the size of third and fourth moments are not so large. The proposed extended Levy model is also expected to be capable of producing the volatility smiles and skewness.

Keywords : Levy Process, NIG Process, Swaption, HJM, Market Model

1. 서 론

최근의 리먼브라더스와 메릴린치등 해외 유수의 투자은행들의 도산을 보면 다양한 종류의 파생상품이 가지고 있는 위험이 우리가 알고 있었던 것보다는 매우 컸음을 알 수 있다. 즉 많은 공학박사들을 보유하고 있는 투자은행들은 자신들이 보유하고 있는 자산의 위험을 VaR(Value-at-Risk)와 같

논문접수일 : 2008년 09월 30일 논문게재확정일 : 2008년 11월 07일
* 본 연구는 숭실대학교 교내연구비 지원으로 이루어졌음.
** 숭실대학교 경영학부 교수
*** 숭실대학교 경영학부 교수
† 교신저자

은 최근 기법 등을 이용하여 어느 정도 감지하고 있었을 것으로 예상되며, 이에 대한 대비도 하였을 것으로 예상된다. 그런데, 작은 증권사나 은행도 아닌 이러한 투자은행들이 부실화는 어떻게 비롯된 것인가?

자산에 대한 위험의 측정이란 자산의 가치평가를 파악한 후에야 가능하며, 자산가치의 평가는 불확실성의 모형화에서 출발한다. 주지하는 바와 같이 간단한 유럽형 옵션의 경우 모든 금융기관에서는 Black-Scholes(BS, 1973) 모형을 사용하고 있다. 그런데 많은 실증 연구들에 의하면, BS의 로그노말 또는 GBM (Geometric Brownian Motion) 주가 가정에 대한 반증들이 나오고 있다. 따라서, BS의 모형에 따른 위험관리는 자칫 잘못된 결과를 줄 수 있으며, 위험관리에 실패하게 된다.

이러한 오류가 발생할 수 있는 대표적인 시장이 Cap과 Swaption 시장이다. 이 두 시장은 같은 기초자산인 LIBOR를 서로 다른 형태로 공유하며, 가치평가를 동일한 Black Formula (BF, 1976)를 사용하고 있다. 이를 실무자들은 시장모형(Market Model)이라 부른다. BF인 시장모형은 옵션시장의 BS모형과 같이 기초자산이 LIBOR를 모두 로그노말 또는 GBM으로 가정하는데. 사실상 Swaption의 기초자산인 Swap rate는 LIBOR의 선형결합으로 이루어진다. 따라서 Cap의 기초자산인 LIBOR가 로그노말일 경우 Swaption의 기초자산인 Swap rate는 로그노말이 될 수 없다.[1] 따라서 시장관행은 이론적으로 양립할 수 없게 된다.

다른 한편으로는 대부분 시장에서 사용하는 모형이 자산가격 또는 LIBOR와 같은 이자율이 연속적으로 움직임을 가정한다는 것이다. 실제로 자산가격이나 이자율은 외부의 충격에 따라 점프(jump)를 하게 되는데, 이러한 점프를 가정하지 않고 기존의 모형을 사용할 경우 자산 가격의 오류가 발생되며, 이로 인한 위험관리는 실제와 오차가 클 것이다.

본 연구는 여러 가지 목적을 달성하고자 한다.

첫째, Cap과 Swaption 시장에서 사용하는 BF를 그대로 사용하되 기초자산(과정) 일반 이자율에 점프를 가정하거나 단기금융시장의 대표적인 이자율인 LIBOR에 점프과정을 가정하여, LIBOR가 로그노말 일 경우라도 Swap rate를 로그노말로 근사하는 방법을 제시하고자 한다. 특히 본 연구의 점프는 Glassman and Merener(2003)와 포아송 점프와는 달리 Levy 형태의 점프를 가정한다. 이외에도 점프대신 Jackel and Rebonato(2000), Brigo, Mecurio and Morini(2002)등은 확률 변동성(stochastic volatility)을 추가하여 Swaption 가치를 평가한 바 있다.

두 번째로, 본 연구는, 기존의 단요인(single factor)이 아닌 다요인 모형으로 확장하고자 한다. 흔히 말하는 옵션(option), swaption, cap 상품등의 변동성 스마일(volatility smile)과 자산 가격의 두터운 꼬리(fat tail)등의 현상은 단요인 만으로는 설명이 불가능하다. 다요인 모형으로는 Jagannathan, Kapline and Sun(2003, JKS)의 다요인 모형이 있는데, JKS의 연구는 본연구와는 두 가지 측면에서 차이가 있다. 첫째 JKS의 경우 기초자산의 상태변수(state variable)를 CIR 과정(process)로 가정하였으나 본 연구는 점프모형이며, 둘째, JKS의 Swaption 가격의 근간이 되는 할인채권 가격이 아파인(affine) 형태이나 본 연구는 로그노말의 시장모형으로 도출된다.

세 번째로는 모형의 조정성(calibration)의 향상에 있다. Cap 시장과 Swaption 시장은 채권시장에 비해서는 유동성이 매우 떨어진다. 만기가 다양한 Cap이나 Swaption이 거래가 되지 않는다. 그 이유는 이 두 상품이 장외에서 거래가 이루어지고 있기 때문이다. 모형을 이용하여 가격을 제시하고 위험관리를 위하여 소위 "Greek"을 계산하기 위하여서는 무엇보다도 모수의 정확한 추정이 필수적이다. 그러나 Swaption의 가격을 계산하기 위해서는 Cap 시장으로부터 모수의 조정이 이루어지는데, 유동성 저하로 조정된 모수의 정확도가 상당히 떨어

---

1) Normal 분포의 합은 Normal이지만 logNormal 분포의 합은 logNormal이 아니다.

지게 된다. 따라서 채권시장과 같이 유동성이 풍부한 상품으로부터 모수를 조정한다면, 상대적으로 더욱 정확한 값으로 Swaption 가격을 제시할 수 있을 것이다. 따라서, 본 연구는 LIBOR의 모형으로부터 Swaption 가격을 얻기보다는 금리의 기간구조로부터 모형을 시작하고자 한다. 그리고 금리의 기간구조 모형 중 HJM(Heath-Jarrow-Morton)을 사용하도록 한다.

본 연구의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서 Levy 형태의 Swaption을 설명한다. 그리고 제 3장에서는 Swap 가격을 로그노말 형태의 근사해(approximation solution)로 제시한다. 제 4장에서는 3요인(three-factor) 모형의 Swaption 모형을 3요인 Gaussian 경우와 Wiener-Levy(NIG) Mixture의 모형의 경우에 Swaption 가격을 제시한다. 그리고 마지막 장에서는 결론을 맺고자 한다.

2. Swaption과 Levy Process

2.1 연속형(Continuous Case) 모형

우선 본 연구의 대상인 Swaption의 평가에 앞서 이에 기초가 되는 금리의 기간구조에 대하여 언급하도록 한다.

모형의 출발은 EMM(Equivalent Martingale Measure), Q에서 시작한다. 이 경우 HJM 모형에 의하면 만기 T인 t시점의 할인채권의 가격은 다음과 같다.

$$P(t,\ T) = P(0,\ T)\exp\left\{\begin{array}{l}\int_0^t r_s - \psi(\sigma(s,\ T))ds \\ + \sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i(s,\ T)dW_i\end{array}\right\} \qquad (1)$$

여기서 $W=(W_s)_{s \geq 0}$는 n-벡터의 표준 Brownian Motion 이며, $W_0 = 0$ a.s.를 만족한다. 그리고 r_t는 현도이자율(spot rate)를 의미한다. 또한 본 연구에서 다루는 모든 확률과정은 $(\Omega,\ \Im,\ (\Im_u)_{u \in [0,T]},\ Q)$인 확률측도공간에서 정의된다. 모든 자산가격의 움직임(dynamics)은 Cadlag(right continuous and left limt)과정이다. Brownian motion의 경우 로그 적률함수를 다음과 같이 정의하자.

$$\log E[e^{hW_1}] = \psi(h)$$

위의 HJM에 의한 금리의 기간구조를 바탕으로 행사이자율이 k인 Payer Swaption을 정의하도록 하자.

Swaption이란 미래 $T(>t)$시점에 시작하여 n기간 동안의 기초자산이 되는 미래의 Swap(forward swap)거래를 할 수 있는 상품이다.[2] 이때 t시점에서의 미래의 Swap rate는 다음과 같이 결정된다.

$$k(t,\ T,\ n) = (P(t,\ T) - P(t,\ T_n))(\tau\sum_{j=1}^{n} P(t,\ T_j))^{-1}$$

여기서 $T_j = T + j\tau,\ j = 1,\ 2,\ \cdots\ n$는 현금흐름의 교환시점을 의미한다. 그리고 $T = t$인 현도 Swap(spot swap)의 Swap rate는 아래와 같이 정의 될 것이다.

$$k(T,\ T,\ n) = (1 - P(T,\ T_n))(\tau\sum_{i=1}^{n} P(T,\ T_i))^{-1}$$

Payer Swaption은 매 $T_j = T + j\tau$, 여기서 $j = 1,\ 2,\ \cdots\ n$시점에 다음의 현금흐름이 발생된다.

$$\tau(k(T,\ T,\ n) - k)^+$$

따라서 t시점의 Swaption의 가격은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} swaption_t &= \tau\sum_{j=1}^{n} P(t,\ T_j)E^{T_j}[(k(T,\ T, n) - k)^+ | \Im_t] \\ &= P(t,\ T)E^{T}\left[\left(1 - \sum_{j=1}^{n} c_j P(T,\ T_j))^+\right) | \Im_t\right] \end{aligned}$$

---

2) 정확히 표현하면 T시점에 swap 거래를 할지 말지를 결정할 수 있는 option 상품이다.

여기서 $c_j = k\tau$ for $j \le (n-1)$, and $c_n = 1 + k\tau$. 그리고 기댓값 위에 있는 상첨자 T는 만기가 T인 할인 채권을 numeraire로 사용한 forward measure에서의 기댓값을 의미한다. 위식을 식 (1)을 이용하면, Swaption 가격은 아래와 같이 표현 할 수 있다.

$$swaption_t = P(t,\ T)E^T\left[\left(1 - \sum_{j=1}^{n} a_j \exp X_j\right)^+ |\Im_t\right] \qquad (2)$$

여기서

$c_j = k\tau$ for $j \le (n-1)$, and $c_n = 1 + k\tau$

$$a_j = c_j P(0,\ T_j)P(0,\ T)^{-1}\exp\left\{\int_0^T (\psi(\sigma(s,\ T)) - \psi(\sigma(s,\ T_j))ds\right\}$$

$$X_j = \sum_{i=1}^{n}\int_0^T (\sigma_i(s,\ T_j) - \sigma_i(s,\ T))dW_i$$

본 연구는 식 (2)의 Swaption 가격공식을 이용하도록 한다.

2.2 Levy 형태의 점프(Levy-Type Jump)

우선 Levy process에 대한 간단한 정리를 하도록 한다. Levy process $L = (L_s)_{s \ge 0}$은 Brownian motion과 같이 증분이 안정적이며 독립적이다(stationary and independent increment). 본 연구에서 다루는 levy process도 앞서 설명한 Brownian motion과 마찬가지로 $(\Omega,\ \Im,\ (\Im_u)_{u \in [0,T]},\ Q)$인 확률측도공간에서 정의되며, cadlag과정을 따른다. Levy process는 소위 "Characteristic Function" 또는 "Moment Generating Function"으로 특정 지어지는데, 다음의 Theorem을 통해 기본적인 특성을 파악 해보도록 하자. X_t가 Pure jump의 Levy process라면 다음을 만족한다.

Theorem 1 : (Levy Khintchine formula) : *$t \in R^+$, 그리고 $\lambda \in R$일 때, $\theta :]-\infty,\ +\infty[\to R$가 존재하여 다음을 만족한다.*

$$E[e^{i\lambda X_t}] = e^{t\ \theta(\lambda)}$$

여기서, $\theta(\lambda) = -\int_R (1 - e^{i\lambda x} i\lambda x I_{(|x|<1)} K(dx))$, *$K$는 Levy measure라 부른다. 그리고* $\int_R Min(1,\ x^2) K(dx) < \infty$.

Proof : Bertoin(1997) 참조.

특히 함수 θ를 "Levy-Khintchine exponent"라 부르며, 다음의 식은 martingale process이다.

$$Y(t) = e^{i\lambda X(t) - t\psi(\lambda)}$$

위의 Theorem에서, X_t가 pure jump가 아닐 경우에는 Levy-Khintchine exponent에 추가적인 항이 들어가게 된다. 특히 위에서 정의한 Levy measure의 형태에 따라 Levy process의 형태가 결정되는데[3], 이중 hyperbolic Levy process는 통계적으로 다루기 쉽고 전환 밀도 함수(transition density function)를 여러 가지 형태의 분포로 변형이 가능하여 많은 주목을 받고 있다. hyperbolic Levy process의 로그 적률함수는 다음과 같다.

$$\log E[e^{hL_1}] = \psi(h)$$

여기서 $\exp(\psi(h)) = e^{\mu h}\dfrac{\gamma^\lambda K_\lambda(\delta_{\gamma_h})}{\gamma_h K_\lambda(\delta\gamma)}$, $\gamma_h = \alpha^2 - (\beta + h)^2$, $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$, K_λ는 지수(index)가 λ인 Bessel 함수(the third kind)이다

한편 hyperbolic Levy process 전환 밀도 함수는 아래와 같다.

$H(\lambda,\ \alpha,\ \beta,\ \delta,\ \mu)$ =

3) 점프의 형태가 달라진다. 예를 들어 Levy measure가 intensity와 jump distribution으로 나누어 표현이 가능하면, Poisson Process가 된다. 자세한 내용은 Bertoin을 참고하기 바람.

$$\frac{\gamma/\delta^{\lambda}}{\sqrt{2\pi}K_{\lambda}(\delta\gamma)}\frac{K_{\lambda-\frac{1}{2}}(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2})}{(\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2/\alpha})^{\lambda-\frac{1}{2}}}$$

본 연구에서는 hyperbolic 형태 중 NIG(Normal Inverse Gaussian)을 다루기로 한다. 그 이유는 NIG는 VG(Varinace Gamma) 과정과 함께, 합성곱(convolution)에 대하여 닫쳐 있고(closed under convolution) speed, scale 측도를 사용하여 확산과정(diffusion process)으로 표현이 가능하며, 특히 금융시계열의 꼬리 특징(tail properties)을 잘 표현하는 것으로 알려져 있다.

$NIG(\alpha,\ \beta,\ \delta,\ \mu)$의 밀도 함수와 적률함수는 각각 다음과 같다.

$$f_{NIG}(x)=\frac{\alpha}{\pi}\exp[\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}+\beta(x-\mu)]$$

$$\frac{\delta K_1(\alpha\sqrt{\delta^2+(\ln x-\mu)^2}}{\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}}$$

$$\psi(h)=M_{NIG}(h)=\exp[\delta(\sqrt{\alpha^2-\beta^2}-\sqrt{\alpha^2-(\beta+h)^2})+h\mu]$$

위의 Levy process에 대한 개략적인 내용과 2.1의 내용을 바탕으로 HJM하에서 할인채권 가격은 다음과 같이 정의되며,

$$P(t,\ T)=P(0,\ T)\exp\left\{\int_0^t(r_s-\psi(\sigma(s,\ T))ds+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\sigma_i(s,\ T)dL_i\right\} \quad (3)$$

Swaption 가격은 다음과 같이 된다.

$$swaption_t=P(t,\ T)E^T[(1-\sum_{j=1}^{n}a_i\exp(X_j))^+|\Im_t] \quad (4)$$

여기서 $X_j=\sum_{i=1}^{n}\int_0^T(\sigma_i(s,\ T_j)-\sigma_i(s,\ T))dL_i$

본 연구에서는 순수점프(pure jump)가 아닌 가장 일반적인 모형에 초점을 맞추고자 한다. 즉,

$$L_t=W_t+N_t$$

여기서 N_t은 NIG 과정(process)이고 W_t는 Brownian motion이다.

3. 시장모형의 swaption 가격 : 로그노말 형태의 해

본 장에서는 HJM 형태의 금리의 기간구조로부터 Swaption 시장의 시장모형(logNormal market model)을 유도하는 과정을 설명하도록 한다.

HJM의 금리의 기간구조로부터 모형을 시작하는 장점은 조정(calibration)의 용이성이라 할 수 있다. LIBOR를 직접 모형화할 경우 Cap 시장으로부터 조정된 모수를 Swaption 시장에 이용하게 되는데, 서론에서도 언급하였듯이 Cap 시장에 비해 금리의 기간구조를 직접 이용하고자 하는 가장 큰 이유는 채권시장의 유동성이 크기 때문이다. 따라서 더욱 정확한 모수 추정이 가능하다.

시장모형은 서론에서도 언급하였듯이 로그노말 모형 BF(Balck Formula)를 사용한다. 따라서 본 연구의 모형으로부터 상태변수의 변환밀도 함수를 로그노말로 변형하기 위하여서는 여러 가지 근사적 방법들을 생각할 수 있다.

우선 식 (2)를 보면 알 수 있듯이 Swaption의 가치를 평가하기 위하여서는, $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_j$의 결합밀도 분포 함수에 대한 정보가 필요하다. 일반적으로 폐쇄형(closed form) 형태의 밀도 함수가 존재하기 않기 때문에, 본 연구에서는 확장방법(expansion technique)을 이용하도록 한다. 일반적으로 확률밀도함수는 Hermite polynomial과 같은 직각 함수(orthogonal function)의 열(series)의 합으로 근사될 수 있다. 그리고 이러한 직각함수의 계수는 밀도함수의 적률 또는 누적적률(cumulant)을 알 경우 적률이나 누적적률(cumulant)의 함수로 표현된다. 이러한 종류의 확장방법으로는 Gram-Charlier series와 Edgeworth expansion의 형태가 있다. Jarrow and Rudd(1982)는 최초로 옵션가격을 Edgeworth series expansion을 이용하여 계산한바 있으며, Longstaff(1995)는 Hermite polynomial을 이용하였다.

본 연구는 계산이 용이한 Gram-Charlier series을 이용한다. 이 경우 밀도 함수 $f(x)$는 다음과 같이 무한 수열함수로 근사된다.

$$f(x) = g(x) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\Big[\sum_{j=1}^{N-1} (-1)^j \frac{k_j D^j}{j!}\Big]^i g(x) + \epsilon(x)$$

여기서 $g(\ )$는 이용하고자 하는 밀도함수(fitted density)를 $\epsilon(\ )$은 잔차(residual)를 의미한다. $k_j = \kappa_j(f) - \kappa_j(g)$를 의미하며, $\kappa_j(f)$는 밀도 함수 f의 j번째 누적적률(cumulant)을 의미한다.

$$D^j g(x) = \frac{d^j g(x)}{dx^j}$$

그리고 다음의 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= \mu_1 \\
\kappa_2 &= \mu_2 - \mu_1^2 \\
\kappa_3 &= \mu_3 - \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^2 \\
\kappa_4 &= \mu_4 - 4\mu_1\mu_3 - 3\mu_2^2 + 12\mu_1^2\mu_2 - 6\mu_1^4
\end{aligned}$$

여기서 μ_i는 i번째 적률을 의미한다. 실제 위의 모형을 사용할 경우 통상 4차에서 절사를 한다. 이 경우 Swaption의 가격은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
swaption_t &= P(t,\ T)E^T[(1 - \sum_{j=1}^{n} a_j \exp X_j)^+ | \Im_t] \\
&= P(t,\ T)E^T[(1 - Y)^+ | \Im_t] \\
&= P(t,\ T)\int_R (1 - Y)(g(Y) - k_1 \frac{dg(Y)}{dY} \\
&\quad + [\frac{k_2 + k_1^2}{2!}] \frac{d^2 g(Y)}{dY^2} \\
&\quad - [\frac{k_3 + 3k_1k_2 + 3k_1^3}{3!}] \frac{d^3 g(Y)}{dY^3} \\
&\quad + [\frac{K_4 + 4k_3k_1 + 3k_2^2 + 6k_1^2k_2 + k_1^4}{4!}] \frac{d^4 g(Y)}{dY^4})dY
\end{aligned}$$

다음의 정리에서 Swaption의 가격을 제시한다.

Proposition 1 : 위의 가정을 적용하면, 식 (2) 또는 식 (4)의 Swaption 가격은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
&P(t,\ T)\int_{-\infty}^{K} (1 - e^{\hat{\sigma} z + \hat{\mu}})\varphi(z) \qquad (5) \\
&\qquad (1 - p_3 H_3(z) + p_4 H_4(z))dz \\
&= P(t,\ T)(N(K) - e^{\frac{\hat{\sigma}}{2} + \hat{\mu}} N(K - \hat{\sigma}) \\
&\quad - p_3 \sum_{i=1}^{2} \widehat{\sigma^i}[e^{\hat{\sigma} K + \hat{\mu}} H_{2-i}(K)\varphi(K)] - \widehat{\sigma^3} e^{\frac{\hat{\sigma}}{2} + \hat{\mu}} N(K - \hat{\sigma}) \\
&\quad + p_4 \sum_{i=1}^{3} \widehat{\sigma^i}[e^{\hat{\sigma} K + \hat{\mu}} H_{3-i}(K)\varphi(K)] - \widehat{\sigma^4} e^{\frac{\hat{\sigma}}{2} + \hat{\mu}} N(K - \hat{\sigma})
\end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma} &= 2\ln\kappa_1(f) - \frac{1}{2} ln(\kappa_1^2(f) + \kappa_2(f)) \\
\widehat{\sigma^2} &= \ln(\kappa_1^2(f) + \kappa_2(f)) - 2\ln\kappa_1(f)
\end{aligned}$$

$K = -\frac{\hat{\mu}}{\sigma}$, $\varphi(z)$는 표준 정규분포함수이며,

$$\begin{aligned}
p_3 &= \frac{k_3 + 3k_1k_2 + 3k_1^3}{3!} \\
p_4 &= \frac{k_4 + 4k_3k_1 + 3k_2^2 + 6k_1^2k_2 + k_1^4}{4!}
\end{aligned}$$

그리고 $H_j(z)$은 Hermite polynomial로 $H_0(x) = 0$, $H_1(x) = x$, $H_2(x) = x^2 - 1$, $H_3(x) = x^3 - 3x$ 그리고 $H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$을 의미한다.

Proof : <부록> 참조

식 (5)에서 구한 Swaption 가격은 기초가 되는 자산 또는 이자율이 어떠한 확률과정이라도 로그노말의 시장모형으로 계산된 Swaption 가격이다. 따라서 구체적으로 변동성(volatility), $\sigma(s,\ T)$의

형태와 Levy process의 형태를 정하면, 구체적인 가격이 계산되며, 식 (5)에서 보듯이 이 경우 각각의 결합밀도함수의 적률 값을 계산하여 식 (5)에 대입하면 Swaption 가격을 얻게 된다. 다음 장에서는 다요인을 가정하여, 특수한 경우의 적률을 계산하도록 하자.

4. 3요인 모형(Three-Factor Model)

본 장에서는 위에서 언급한 모형을 다요인(multi-factor)으로 확장하고자 한다. 많은 실증분석에 의하며, 금리의 기간구조는 3요인이 거의 기간구조의 95%를 설명하는 것으로 보고되고 있는바, 금리의 기간구조의 정확한 측정은 그만큼 모형의 모수 조정을 정확하게 하고 Swpation 가격의 정확도를 높일 것이다. 물론 요인 간에는 서로 상관관계가 존재하여 모형을 더욱 정교화 한다. 따라서 본장에서 제시하는 3요인 모형은 금리의 기간구조를 3요인으로 모형을 시작하기 때문에 실증적 현상에 부합한 모형이라 할 수 있다. 정리 1에서 제시한 공식은 $g(\ )$를 로그노말 분포로 이용한 것으로 3요인의 각각의 적률과 누적적률(cumulant)을 구하도록 한다.

아래의 내용은 연속형과 점프의 두가지 경우를 Vasicek 형태의 변동성을 가정하여 계산을 예시하고자 한다. 또한 본 연구의 독창적인 부분으로 소단원에서 자세히 기술하고자 한다.

4.1 연속형

우선 HJM의 블랙박스인 변동성(volatility)를 구체화 하자. 본 연구에서는 Vasicek 형태의 변동성을 가정한다. 이자율 모형 중 Vasicek 모형은 가장 간단한 형태로 시장에서 이자율의 변동성을 측정하는데 많이 활용되는 형태이다. Vasicek의 변동선 형태는 다음과 같다.

$$\sigma_i(t,\ T) = q_i(1-\exp(-b_i(T-t))$$

단요인(factor)과는 달리 본 연구에서 채택한 다요인 모형은 요인 간에 서로 독립을 유지하더라도, 서로 만기가 다른 채권은 완전상관의 관계가 사라지게 되는 장점이 있다. 그리고 다음을 정의하자.

$$Y = \sum_{j=1}^{n} a_j \exp\{X_j\}$$

여기서 연속형 모형을 이용할 경우 $X_j = \sum_{i=1}^{3} \int_0^T (\sigma_i(s,\ T_j) - \sigma_i(s,\ T))dW_i$이 된다. 따라서 1차 2차 적률은 다음과 같다.

$$\mu_1(Y) = \sum_{j=1}^{n} a_j \exp\left\{\frac{A_j}{2}\right\}$$

$$\mu_2(Y) = (\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \exp\{2A_j\} + 2\sum_{k<j}^{n} a_i a_j \exp\frac{A_{kj}}{2}))$$
$$-\exp(-2b_i(T_k+T_j)) + \exp(-2b_i(T+\ T_k+T_j))].$$

여기서

$$A_j = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} q_i^2 (e^{2b_i T_i} - 2e^{b_i(T+T_i)} + e^{2b_i T}),$$

$$\frac{e^{-2b_i T_j} - \exp(-2b_i(T+T_j))}{b_i}$$

$$\begin{aligned} A_{kj} = -\sum_{i=1}^{3} \frac{q_i^2}{2b_i} & [4\exp(2b_i(T_k+T_j)) \\ & -4\exp(b_i(T+T_k+2T_j)) \\ & -4\exp(b_i(T+2T_k+T_j)) + e^{2b_i(T+T_j)} \\ & +2\exp(b_i(2T+T_k+T_j)) + e^{2b_i(T+T_k)} \end{aligned}$$

$$-\exp(-2b_i(T_k+T_j)) + \exp(-2b_i(T+T_k+T_j))].$$

그리고 3차 4차 적률은 다음과 같다.

$$\mu_3(Y) = \sum_{j=1}^{5} a_j^3 \exp\left\{\frac{A_{m_j^3}(3)}{2}\right\} + \frac{3!}{2!}\sum_{k<j}^{5}$$

$$(a_k^2 a_j^1 \exp\left\{\frac{1}{2} A_{m_k^2 m_j}(3))\right\}$$

$$+\frac{3!}{2!}\sum_{k<j}^{5} a_k^1 a_j^2 \exp\left\{\frac{1}{2}(A_{m_k^2 m_j}(3))\right\}$$
$$+3!\sum_{k<j<l}^{5} a_i^1 a_j^1 a_l^1 \exp\left\{\frac{1}{2}((A_{m_k m_j m_i}(3))\right\}$$

$$\mu_4(Y)=\sum_{j=1}^{5} a_j^4 \exp\frac{A_{m_j^1}(4)}{2}+\frac{4!}{3!}\sum_{k<j}^{5}(a_k^1 a_j^3 \exp\frac{1}{2}A_{m_j^3}(4)$$

$$+\frac{4!}{3!}\sum_{k<j}^{5}(a_k^3 a_j^1 \exp\left\{\frac{1}{2}A_{m_k^3 m_j}(4)\right\}$$
$$+\frac{4!}{2!2!}\sum_{k<j}^{5} a_k^2 a_j^2 \exp\left\{\frac{1}{2}A_{m_k^2 m_j^2}(4)\right\}$$
$$+\frac{4!}{2!}[a_1^2 \sum_{k<j(k\neq 1, j\neq 1)}^{5} a_i^1 a_j^1 \exp\left\{\frac{1}{2}A_{m_1 m_k m_j}(4)\right\}$$
$$+a_2^2 \sum_{k<j(k\neq 2, j\neq 2)}^{5} a_i^1 a_i^1 \exp\left\{\frac{1}{2}A_{m_2 m_k m_j}(4)\right\}$$
$$+a_3^2 \sum_{k<j(k\neq 3, j\neq 3)}^{5} a_i^1 a_j^1 \exp\left\{\frac{1}{2}(A_{m_3 m_k m_j}(4)\right\}$$
$$+a_4^2 \sum_{k<j(k\neq 4, j\neq 4)}^{5} a_i^1 a_j^1 \exp\left\{\frac{1}{2}(A_{m_4 m_k m_j}(4)\right\}$$
$$+a_5^2 \sum_{k<j(k\neq 5, j\neq 5)}^{5} a_i^1 a_j^1 \exp\left\{\frac{1}{2}(A_{m_5 m_k m_j}(4)\right\}]$$
$$+4!\sum_{k<j<r<l}^{5} a_k^1 a_j^1 a_r^1 a_l^1 \exp\left\{\frac{1}{2}(A_{m_k m_j m_r m_l}(4)\right\}$$

예를 들어

$$A_{m_1 m_3^2}(3)=Var(1X_1+2X_3)$$
$$A_{m_1 m_3^2 m_4}(3)=Var(1X_1+2X_3+1X_4).$$

4.2 NIG 점프

앞서 언급했듯이 $L=\sum_{i=1}^{3} W_i+N$로 가정한다. Brownian motion W와 NIG 과정인 N은 서로 독립으로 가정한다. 변동성은 연속형의 경우와 마찬가지로 Vasicek 모형을 가정한다. 그러나 NIG의 증폭(scale)을 나타내는 함수는 서로 다른 것으로 가정한다. 두 확률 과정이 서로 독립이므로 이를 서로 나누어 다음과 같이 각각의 적률을 구하도록 한다.

$$\mu_1(Y)=E^T[\sum_{j=1}^{n} a_j \exp\{X_j\}]$$

여기서 $Y=\sum_{j=1}^{n} a_j \exp\{X_j\}$

$$X_j=\sum_{i=1}^{3}\int_0^T (q\exp(-b(T-t))-q_i\exp(-b_i(T_j-t)))$$
$$dW_i+\int_0^T \sigma(T_j-T)\,dN$$
$$=X_j'+X_j''$$

즉 X_j'은 연속적인 부분으로

$$X_j'=\sum_{i=1}^{3}\int_0^T (q\exp(-b(T-t))-q_i\exp(-b_i(T_j-t)))dW_i,$$

X_j''은 NIG 점프부분으로 $X_j''=\int_0^T \sigma(T_j-T)dN$을 의미한다. 2차 적률을 계산하면

$$\mu_2(Y)=E[Y^2]$$
$$=E^T[\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \exp\{2X_j'\}\exp\{2X_j''\}$$
$$+2\sum_{i<j}^{n}(a_i a_j \exp\{X_i'+X_j'\}\exp\{X_i''+X_j''\})]$$

이다. 일반적으로 NIG의 적률을 계산하기 위하여서는 Eberlein and Raible(1999)의 다음의 공식을 이용하여야 한다.

$$E[\exp\left\{\int_0^t f(s)dN\right\}]=\exp\left\{\int_0^t \psi(f(s))ds\right\}.$$

이를 이용하면,

$$E[\exp\left\{\int_0^T \sigma(T_j-T)dN\right\}]=\exp\left\{\int_0^T \psi(\sigma(T_j-T))ds\right\}$$

여기서

$$\psi(\sigma(T_j-T))=\delta(\sqrt{\alpha^2-\beta^2}-\sqrt{\alpha^2-(\beta+\sigma(T_j-T))^2}$$
$$+\sigma(T_j-T)\mu$$

따라서

$$\int_0^T \psi(\sigma(T_j-T))ds$$
$$=\delta T(\sqrt{\alpha^2-\beta^2}-\sqrt{(\alpha^2-\beta^2-2\beta\sigma T_j+2\beta\sigma T-\sigma^2 T_j^2)+2\sigma^2 T_j T-\sigma^2 T^2)}$$
$$+\sigma\mu(T_j-T)T$$

이를 이용하여 Weiner-NIG의 4차까지의 적률을 구하면, 다음과 같다.

$$\mu_1(Y) = \sum_{j=1}^{n} a_j \exp\left\{\frac{A_j}{2}\right\} \exp\left\{\int_0^T \psi_j(\sigma(T_j - T))ds\right\}$$

$$\mu_2(Y) = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \exp\{2A_j\} \exp\left\{\int_0^T \psi(2\sigma(T_j - T))ds\right\} + 2\sum_{i<j}^{n}(a_i a_j \exp\left\{\frac{A_{ij}}{2}\right\} \exp\left\{\int_0^T \psi(\sigma(T_i + T_j - 2T))ds\right\}$$

$$\mu_3(Y) = \binom{3}{m_1 m_2 .. m_n} a_1^{m_1} a_2^{m_2} .. a_n^{m_n} \exp\left\{\frac{A_m(3)}{2}\right\}$$

$$\exp\left\{\int_0^T \psi(\sigma\sum_{j=1}^{n} m_j T_j - 3\sigma T)ds\right\}$$

$$\mu_4(Y) = \binom{4}{m_1 m_2 .. m_n} a_1^{m_1} a_2^{m_2} .. a_n^{m_n} \exp\left\{\frac{A_m(4)}{2}\right\}$$

$$\exp\left\{\int_0^T \psi(\sigma\sum_{j=1}^{n} m_j T_j - 4\sigma T)ds\right\}$$

예를 들어

$$\int_0^T \psi(\sigma\sum_{j=1}^{n} m_j T_j - 4\sigma T)ds = \delta T(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})$$

$$-\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \left\{\sigma\sum_{j=1}^{n} m_j T_j - 4\sigma T\right\}^2)} + \left\{\sigma\sum_{j=1}^{n} m_j T_j - 4\sigma T\right\}\mu T$$

로 계산된다.

이상 3요인의 경우의 연속형과 NIG 혼합의 swaption 가격을 제시하였다.

5. 결 론

Swaption은 장외시장에 가장 활발히 거래되는 파생상품중에 하나로 Cap 시장과 Swaption 시장은 가격공식이 이론적으로 모순이 된 상태로 거래가 이루어지고 있다. 서론에서도 언급하였듯이 Cap시장과 Swaption 시장은 궁극적으로 같은 기초가산을 공유하는데도 불구하고 모두 로그노말의 시장모형을 사용하고 있는 것이다. 본 연구는 이러한 이론적 모순을 극복하기 위하여, 확장방법을 이용하여 상태변수가 어떠한 확률과정의 형태를 갖더라도 Swaption 가격을 시장에서 사용하는 로그노말의 해(solution)로 제시하였다. 또한 이를 다요인 Levy 과정으로 확장하여 Swaption 가격을 제시하였다.

본 연구에서 제시된 Swaption 가격은 시장에서의 변동성 스마일(volatility smile)등 시장의 특징적 현상(stylized facts)을 잘 설명해 줄 것으로 기대한다[4]. 물론 이는 자료를 이용한 실증 분석이나, 시뮬레이션을 통한 본 연구에서 제시한 Swaption 가격의 정확도를 비교할 수도 있겠다. 이는 향후의 연구 과제로 남겨두고자 한다.

참 고 문 헌

[1] Bertoin J. "Levy Processes," *Cambridge University Presses,* 2002.

[2] Black, F. "The Pricing of Commodity Contract," *Journal of Financial Economics,* (1976), pp.167-179.

[3] Black, F. and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy,* (1973), pp.637-659.

[4] Brigo, D., F. Mercurio and M. Morini : "Different Covariance Parameterization of the LIBOR Market Model and Joint Caps and Swaption Calibration," *Working paper,* 2002.

[5] Brigo D., C. Capitani and F. Mercurio : "On the Joint Calibration of the LIBOR Market Model to Caps and Swaption Market Volatilities," *Working paper,* 2001.

[6] Das, S. and S. Foresi, "Exact Solutions for Bond and Options Prices with Systematic Jump Risk," *Review of Derivatives Research,* Vol.1(1996), pp.7-24.

[7] Eberlein E., and S. Raible, "Term Structure

4) 확률변동성(stochastic volatility)모형이나 점프모형은 모형의 유동성(flexibility)을 증가시켜 변동성 스마일의 피팅(fiiting)을 증가시키는 것으로 알려져 있다. 두 방법론상의 피팅력에 대하여서는 Das and Foresi(1996)를 참조하기 바람.

Models Driven by Levy Process," *Mathematical Finance*, Vol.9, No.1(1999), pp.31-53.

[8] Glasserman, P. and N. Merener, "Cap and Swaption Approximations In LIBOR Market Model with Jumps," *Journal of Computational Finance*, Vol.7, No.1(2003), pp.1-36.

[9] Jagannathan R., A. Kaplin and S. Sun, "An Evaluation of Multi-Factor CIR Models Using LIBOR, Swap Rates, and Cap and Swaption Price," *Journal of Econometics*, Vol.116(2003), pp.113-146.

[10] Jackel, P. and R. Rebonato, "Linking Caplet and Swaption Volatilities in BGM/J Framework : Approximate Solution," *Working paper*, 2000.

[11] Jamshidian, F., "LIBOR and Swap Market Models and Measure," *Finance and Stochastic*, Vol.1(1997), pp.293-330.

[12] Jarrow, R. and A. Rudd, "Approximate Option Valuation for Arbitrary," *Journal of Financial Economics*, Vol.10(1982), pp.347-369.

[13] Longstaff, A., "Option Pricing and the Martingale Restriction," *Review of Financial Studies*, Vol.8(1995), pp.1091-1124.

〈부 록〉

Proposition 1의 증명

우선 Gaussian과 Gaussian-Levy 혼합(mixture)의 4차까지의 적률을 계산하도록 하자. 사용하고자 하는 로그노말 g와 밀도함수 f를 갖는 Y의 누적적률(cumulant)를 서로 일치(match)시키면, 로그노말 모수는 다음과 같다.

$$\hat{\mu} = 2\ln\kappa_1(f) - \frac{1}{2}\ln(\kappa_1^2(f) + \kappa_2(f))$$

$$\widehat{\sigma^2} = \ln(\kappa_1^2(f) + \kappa_2(f)) - 2\ln\kappa_1(f)$$

따라서 Swaption 가격은 다음의 적분식과 관계가 있다.

$$Swaption_t = P(t,\ T)\int_0^1 (1-Y)(g(Y) - k_1\frac{dg(Y)}{dY} + [\frac{k_2+k_1^2}{2!}]\frac{d^2g(Y)}{dY^2}$$
$$-[\frac{k_3+3k_1k_2+3k_1^3}{3!}]\frac{d^3g(Y)}{dY^3}$$
$$+\frac{k_4+4k_3k_1+3k_2^2+6k_1^2k_2+k_1^4}{4!}]\frac{d^4g(Y)}{dY^4})dY \tag{A1}$$

밀도함수 $g(\ )$는 다음과 같다.

$$g(Y) = \frac{1}{Y\sqrt{2\pi\widehat{\sigma^2}}}e^{-\frac{(\log Y - \hat{\mu})^2}{2\widehat{\sigma^2}}}$$

변수변환(change of variable)을 이용하여 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$Swaption_t = P(t, T)\int_{-\infty}^{K}(1-e^{\hat{\sigma}z+\hat{\mu}})\varphi(z)(1-[\frac{k_3+3k_1k_2+3k_1^3}{3!}]\frac{d^3\varphi(z)}{dz^3}$$
$$+[\frac{k_4+4k_3k_1+3k_2^2+6k_1^2k_2+k_1^4}{4!}]\frac{d^4\varphi(z)}{dz^4})dz$$

여기서 $K = -\frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$, $\varphi(z)$은 표준정규분포함수이다. 식 (A1)을 평가하기 위하여 다음을 정의하자.

$$p_3 = \frac{k_3+3k_1k_2+3k_1^3}{3!},\ p_4 = \frac{k_4+4k_3k_1+3k_2^2+6k_1^2k_2+k_1^4}{4!}$$

본 연구의 경우 $k_1 = k_2 = 0$이 된다. 위의 정의식과 Hermite polynomial $H_j(z)$을 이용하면

$$P(t,T)\int_{-\infty}^{K}(1-e^{\hat{\sigma}z+\hat{\mu}})\varphi(z)(1-p_3H_3(z)+p_4H_4(z))dz \tag{A2}$$

이 된다. 여기서 $H_j(z)=(-1)^j\varphi(z)^{-1\frac{d^j\varphi(z)}{dz^j}}$. 계산을 위하여 식 (A2)을 다음을 정의하자.

$$\begin{aligned}I_j&=\int_{-\infty}^{K}(1-e^{\hat{\sigma}z+\hat{\mu}})\varphi(z)H_j(z)dz \\ &=-\int_{-\infty}^{K}(1-e^{\hat{\sigma}z+\hat{\mu}})\frac{d}{dz}H_{j-1}(z)\varphi(z)dz \\ &=-(1-e^{\hat{\sigma}z+\hat{\mu}})H_{j-1}(z)\varphi(z)dz|_{-\infty}^{K}-\hat{\sigma}\int_{-\infty}^{K}e^{\hat{\sigma}z+\hat{\mu}}H_{j-1}(z)\varphi(z)dz\end{aligned} \tag{A3}$$

여기서 $j=3,\ 4$. 식 (A3)의 첫 번째 항은 0이고 $\lim_{z\to-\infty}\varphi(z)=0$임으로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}I_j&=-\hat{\sigma}\int_{-\infty}^{K}e^{\hat{\sigma}z+\hat{\mu}}H_{j-1}(z)\varphi(z)dz \\ &=\hat{\sigma}\int_{-\infty}^{K}e^{\hat{\sigma}z+\hat{\mu}}\frac{d}{dz}H_{j-2}(z)\varphi(z)dz \\ &=\hat{\sigma}[e^{\hat{\sigma}z+\hat{\mu}}H_{j-2}(z)\varphi(z)]|_{-\infty}^{K}-\hat{\sigma^2}\int_{-\infty}^{K}e^{\hat{\sigma}z+\hat{\mu}}H_{j-2}(z)\varphi(z)dz\end{aligned}$$

따라서 귀납(induction)에 의하여,

$$\begin{aligned}I_j&=\hat{\sigma}[e^{\hat{\sigma}K+\hat{\mu}}H_{j-2}(K)\varphi(K)]-\hat{\sigma^2}\int_{-\infty}^{K}e^{\hat{\sigma}z+\hat{\mu}}H_{j-2}(z)\varphi(z)dz \\ &=\hat{\sigma}[e^{\hat{\sigma}K+\hat{\mu}}H_{j-2}(K)\varphi(K)]+\hat{\sigma^2}[e^{\hat{\sigma}K+\hat{\mu}}H_{j-3}(K)\varphi(K)]-\hat{\sigma^3}\int_{-\infty}^{K}e^{\hat{\sigma}z+\hat{\mu}}H_{j-3}(z)\varphi(z)dz \\ &=\sum_{i=1}^{j-1}\hat{\sigma^i}[e^{\hat{\sigma}K+\hat{\mu}}H_{j-1-i}(K)\varphi(K)]-\hat{\sigma^j}\int_{-\infty}^{K}e^{\hat{\sigma}z+\hat{\mu}}\varphi(z)dz \\ &=\sum_{i=1}^{j-1}\hat{\sigma^i}[e^{\hat{\sigma}K+\hat{\mu}}H_{j-1-i}(K)\varphi(K)]-\hat{\sigma^j}e^{\frac{\hat{\sigma}}{2}+\hat{\mu}}N(K-\hat{\sigma})\end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서 시장모형인 로그노말로 근사된 Swaption 가격은 다음과 같은 결과를 나타낸다.

$$\begin{aligned}&P(t,T)\int_{-\infty}^{K}(1-e^{\hat{\sigma}z+\hat{\mu}})\varphi(z)(1-p_3H_3(z)+p_4H_4(z))dz \\ &=P(t,T)(N(K)-e^{\frac{\hat{\sigma}}{2}+\hat{\mu}}N(K-\hat{\sigma}) \\ &\quad-p_3\sum_{i=1}^{2}\hat{\sigma^i}[e^{\hat{\sigma}K+\hat{\mu}}H_{2-i}(K)\varphi(K)]-\hat{\sigma^3}e^{\frac{\hat{\sigma}}{2}+\hat{\mu}}N(K-\hat{\sigma}) \\ &\quad+p_4\sum_{i=1}^{3}\hat{\sigma^i}[e^{\hat{\sigma}K+\hat{\mu}}H_{3-i}(K)\varphi(K)]-\hat{\sigma^4}e^{\frac{\hat{\sigma}}{2}+\hat{\mu}}N(K-\hat{\sigma})\end{aligned}$$

여기서 $H_0(x)=0,\ H_1(x)=x,\ H_2(x)=x^2-1,\ H_3=x^3-3x$, and $H_4(x)=x^4-6x^2+3$