한국수학사학회지 제21권 제3호(2008년 8월), 143 - 156

학생들이 증명학습에서 겪는 어려움*

단국대학교 수학교육학과 김창일
kci206@hanmail.net
단국대학교 수학교육학과 이춘분
lcb80@lycos.co.kr

본 연구에서는 중학교 2학년 도형의 성질 단원의 증명학습을 세 단계로 나누어 설문을 통하여 학생들이 증명학습에서 겪는 어려움을 조사하였다. 설문 분석 결과 학생들은 증명학습에서 증명의 의미를 이해하지 못해 명제의 참을 판단하는 정도의 간단한 추론도 하지 못할 뿐만 아니라 제시된 증명을 읽고 그것이 증명하려는 명제의 가정과 결론을 파악하지 못한다. 이는 학생들이 명제의 가정과 결론의 의미와 역할을 명확히 이해하지 못하는데서 비롯된다. 따라서 학생들에게 명제의 가정과 결론의 의미와 역할에 대한 지도에 좀 더 역점을 두는것이 필요하다.

주제어 : 명제, 가정, 결론, 증명

0. 서론

수학 교육의 주요한 목적 중 하나는 수학적 추론 능력의 배양이다. 추론 능력은 발견의 논리인 귀납과 유추 등과 함께 정당화의 논리인 연역적 추론 능력을 의미한다. 연역적 추론으로 대표되는 증명은 지식을 검증하는 방법에서 경험과학과 구분 된다.

우리나라 수학과 교육과정에서 증명은 중학교 1학년에서 배운 삼각형의 합동조건을 기초로 하여 중학교 2학년 도형의 성질 단원에서 도입된다. 도형의 성질 단원에서는 이전에 배웠던 직관기하와 달리 도형의 정의와 성질을 이해하고, 명제에서 가정과 결론을 구분하며, 삼각형의 합동조건과 닮음 조건을 이용하여 간단한 도형의 성질을 증명하도록 함으로써 증명의 본질을 이해하고 논리적으로 추론하는 능력을 기르도록 하는 논증기하를 도입하고 있다([1]). 이는 유클리드 원론의 틀을 그대로 유지하는 것으로 학생들에게 충분히 증명 지도가 가능하다고 보고 있는 것이며 학생들이 형식적인 추론이 가능하다는 것을 전제로 하고 있다. 그러나 이와 관련된 선행 연구에 의하면 우리나라 중학생들은 증명문제에 대하여 많은 어려움을 느끼는 것으로 나타난다. 이

* 이 연구는 2006학년도 단국대학교 대학연구비의 지원으로 연구되었음

들 연구결과에 의하면 도형의 성질 단원에서 다루어지고 있는 증명의 내용이 학생들의 이해 수준에 비해 높기 때문에 학생들은 증명의 뜻을 파악하고 증명을 구상하고 비판하기보다는 교사가 제시하는 증명절차에 따르게 되면서 증명이 끝난 다음에도 그 의미를 이해하지 못하는 어려움을 겪게 된다는 것을 지적을 하고 있다([4, 10]).

유클리드 원론의 틀을 유지하고 있는 지금의 증명 학습은 증명 과정에서 발생하는 많은 수학적 추론 과정에 대한 언급 없이 형식적, 선형적, 종합적인 방식으로 서술되어 있기 때문에 학생들은 증명의 내용은 이미 만들어진 것으로 생각하여 증명을 외우는 것으로만 학습할 수 있다고 생각한다([3]). 증명은 증명하고자 하는 명제의 가정으로부터 여러 단계의 추론을 거쳐 결론을 이끌어내는 과정이고 증명학습에는 명제의 뜻, 명제의 참, 거짓, 가정과 결론 등 여러 요소가 있기 때문에 이와 같은 증명학습-지도 방법은 많은 비판을 받아왔다. 이런 비판과 함께 많은 연구자들은 사회구성주의의 이론에 근거하여 증명에 관한 연구를 진행하고 있다.

본 논문에서는 유클리드 원론의 근거가 되고 있는 플라톤주의에서 증명의 의미를 알아보고 증명학습을 현행 교과서의 내용과 순서에 따라 세 단계로 나누어 학생들이 각 단계에서 겪는 어려움을 알아보고 증명학습에 대한 지도의 개선점을 찾아보려고 한다.

1. 플라톤주의와 증명의 의미

명제(proposition, statement)는 참과 거짓을 판별할 수 있는 문장을 말하는데 이를 위하여 객관적인 기준이 있어야 한다. 학교 수학은 유클리드 원론의 내용과 틀을 유지하며 전개되고 있기 때문에 증명학습에서 이런 객관적인 기준은 플라톤주의에 그 근거를 두고 있다.

플라톤주의에서는 수학적 대상이 추상적이며 시공을 초월하여 인식주체와 독립적으로 존재하고 창조되거나 소멸되지 않는, 즉 불변한다고 주장한다. 플라톤주의에서 수학적 활동은 이미 존재하는 것을 발견하는 것이고 수학적 진술이 의미가 있다면 그것은 참이거나 거짓임이 증명될 수 있어야한다([6]). 유클리드는 이러한 플라톤주의를 『원론』에서 구현하였다. 유클리드 원론에서 증명은 진리인 공리, 공준과 이데아를 분명하게 하는 정의로부터 새로운 정리를 이끌어내는 유일한 수단이었다. 증명을 할 수 있는 정리만이 진리로 인정되어 증명은 참된 진리의 상태에 도달할 수 있게 하는 유일한과정이었다.

한편 19세기 초 비유클리드 기하학의 등장으로 수학의 기초를 기하학에 두는 것이 불안해진 수학자들은 수학의 기초를 산술에 두려고 했다. 이 과정에서 집합론의 포괄성과 일관성으로 수학을 통일적인 관점에서 분석하리라고 기대하였다. 그러나 일련의 역설이 발생하면서 수학의 기초는 크게 흔들리게 되었고 이를 바로잡기 위하여 Frege

와 Russell로 대표되는 논리주의, Brouwer의 직관주의, Hilbert의 형식주의에서 수학 기초에 대한 논의가 진행되었다([6]).

현대 논리학은 1879년에 출간된 Frege의 『개념표기법』으로부터 시작된다. Kant는 논리학이 Aristoteles에 의해 완결된 것으로 생각했지만, Frege는 Aristoteles의 삼단논법보다 훨씬 엄밀하고 일반적인 방식으로 추리이론을 형식화할 수 있다는 것을 보였다. 그는 수학의 개념들을 논리학의 개념들로 환원시켜 수학의 기초를 논리에 둘 수 있다는 "논리주의"라는 수리철학의 입장을 최초로 제시했다. 또한 Russell은 Peano와의 만남을 통해 수학이 논리학의 공리로부터 연역될 수 있다는 확신을 갖게 되었다. Frege와 Russell은 논리주의 프로그램을 가지고 수학을 논리로 환원 시키려했다([7]). 흔들리는 수학의 기초를 논리학에 세우려는 논리주자들의 시도는 성공적이지 못했다. 이러한 논리주의에서 증명은 수학 지식을 논리적으로 정당화하기 위한 장치라고 할 수 있다.

Brouwer를 중심으로 하는 직관주의자들은 집합론 등에 대해 강력히 비판하면서 주어진 것으로부터 수학전체를 안전하게 구성하려고 했다. 직관주의의 뿌리는 Decartes와 Pascal로 거슬러 올라간다. Decartes는 직관을 기초로 그 직관으로부터 단계적으로 연역함으로 새로운 진리에 이를 수 있다고 믿었다. 직관주의를 종합적이고 체계적으로 제시한 사람은 Brouwer이다. 직관주의에서는 수학을 직관을 근거로 한 인간의 심적 구성 활동으로 본다. 수를 비롯한 모든 수학적 대상은 그것을 산출하거나 구성하는 방법이 존재하는 경우에만 그들이 정의되었다고 간주된다. 즉, 직관주의에서 '존재성'과 '구성가능성'은 일치하는 것이다. 직관주의자들은 수학적 기초의 위기는 무한 개념이 잘못 되었기 때문이라고 진단하고 인간의 유한한 지성의 힘에만 의존하고 그것을 넘어선 확실치 않은 영역을 배제하려고 하였다. 정의나 증명도 구성적이었다. 따라서 귀류법에 의한 증명은 구체적인 규칙이 제시되어 있지 않기 때문에 거부하며 구성가능성을 존재성과 일치시키기 때문에 선택공리에 의한 존재 증명은 모두 거부된다. 어떤 진술도 참이거나 거짓이라는 배중률은 명백한 경우를 제외하고는 사용이 제한된다([5]). 따라서 이전까지 타당한 수학적 증명으로 인정되었던 연역적 증명 중에서도 구성적 증명만을 인정하였다. 또한 수학적 명제는 직관에 근거한 정신적 구성을 통해 그 명제가 참임을 보이는 경우에만 참으로 인정하였고 직관적으로 안전한 구성적 증명 방식을 사용하여 수학적 지식과 그 기초를 제공하려고 하였다. 논리주의는 수학을 논리로 환원하려 했지만 직관주의는 논리가 오히려 수학에 의존한다고 보았다. 그리고 논리는 언어에 속하기 때문에 언어가 가지는 결함과 똑같은 결함을 가져서 논리적 결과를 신뢰할 수 없다는 것이다. 논리에 대한 직관주의의 이러한 규정은 논리가 절대적이고 영원히 타당한 것이 아니고 시공을 초월하여 모든 사람에게 적용되지 않는다는 인식에서 비롯되었다. 직관주의자들은 수학적 활동은 언어보다도 더 깊고 포괄적인 정신 속에서 이루어진다고 본다. 수학의 기초에 위기가 왔을 때 직관주의는 수학의 확실성을 직관에서 찾았다. 다른 수리철학에 비해 파격적인 것이었지만 기존 수

학의 많은 부분을 포기해야 한다는 점에서 일부 수학자들을 제외한 대부분의 수학자들로부터 외면 받았다([5]).

형식주의자들은 수학을 의미가 주어지지 않은 기호로 나열된 형식적 체계로 규정하였다. 대표적 형식주의자인 Hilbert는 완전한 형식화의 방법과 매우 엄밀한 방법으로 수학 전체 분야가 모순이 없는 완전한 공리 체계로 조직될 수 있음을 보이고자 하였다. 그는 수학을 의미가 배제된 기호로 형식적인 전개를 함으로써 무모순성을 얻고자 하였다. 또한 수학의 완전성, 즉 주어진 공리계에서 참인 수학적 명제들은 모두 증명가능하다는 것을 보이려고 하였다. 그러나 Gödel은 어떠한 수학적 체계도 그 체계의 무모순성을 입증할 수 없으며 어떠한 공리계도 필연적으로 불완전하다는 것을 밝혔다. 또한 그는 어떠한 공리계에서도 그 공리계에서 입증도 반증도 할 수 없는 명제를 공리로 추가하여 새롭게 구성된 공리계 역시 결정 불가능한 명제를 갖게 됨을 입증하였다. 형식주의에서는 직관주의에서 제한적으로 인정되었던 '연역적 증명'이 다시 강조되었고 보다 더 엄밀한 연역적 증명을 통하여 수학이 모순이 없는 완전한 공리 체계라는 것을 입증하려고 하였다([6]).

사회구성주의에서는 이들 논리주의, 직관주의, 형식주의를 절대주의라고 한다. 절대주의는 무엇을 타당한 증명으로 인정할 것인가라는 점과 증명의 세부 내용에 있어서 관점의 차이를 보이지만 증명을 수학적 명제를 정당화하는 수단으로 인식하는데 이견이 없어 보인다.

절대주의 수리철학은 수학의 기초를 세우는데 실패했지만 변신을 시도하며 명맥을 유지하였다. 논리적 환원가능성과 형식체계의 완전성, 그리고 모든 정리의 결정 가능성이 좌절되었지만 플라톤주의에 대한 믿음은 여전했다.

1970년대를 전후하여 플라톤주의에 대한 Benacerraf의 비판을 계기로 플라톤주의에 대한 논쟁이 다시 활발해졌다. 논쟁의 과정에서 수학적 구조주의는 플라톤주의의 수정을 모색하였고 구성주의와 허무주의는 플라톤주의에 대항하였다.

구조주의, 구성주의, 허무주의는 모두 수학 내적인 논의이다. 20세기 후반 수학 외적인 것에 무게를 둔 새로운 수리철학이 형성되었는데 사회구성주의가 그들 중 하나이다. 사회구성주의는 수학의 근거가 사회에 있다고 본다. 대표적인 수리철학자는 Ernest와 Bloor이다. 사회구성주의의 철학적 근거는 Lakatos와 Wittgenstein의 수리철학을 제시한다. 사회구성주자들은 수학에 대하여 절대주의적 관점을 거부하고 오류가능성을 받아들인다. 따라서 이들은 추측과 반박을 통하여 수학적 지식이 성장한다고 생각한다([6]).

최근 이런 사회구성주의에 근거한 많은 연구는 분석적 사고과정을 통한 증명방법의 발견, 단계적 상세화를 통한 증명의 구조파악, 증명학습을 안내하기 위한 괄호 넣기 증명, 사고 실험실을 통한 증명학습, 증명에서 생성-수렴 수업 모형의 개발 등 다양한 증명학습-지도 방안을 제안하고 있다.

한편 오늘날 많은 수학자들은 형식주의를 표방하고 있지만 사실상 플라톤주의자로

여겨지기 때문에 수학에서 증명은 여전히 수학의 확실성을 담보로 공리계의 공리들로부터 새로운 정리를 확립하는 수단이라는 기존의 플라톤주의 영향 아래에 있다. 즉, 증명을 하는데 공리계에 근거해서 가정으로부터 결론을 이끌어내는 연역적인 방법을 강조한다.

2. 연구 결과 분석 및 논의

중학교 2학년 도형의 성질 단원에서 내용과 순서에 따라 증명학습을 세 단계로 나누어 각 단계에서 학생들이 겪는 어려움을 알아보기 위해, 인천시와 전라북도 군산시에 소재한 중학교에서 3학년 학생 143명을 대상으로 설문을 실시하였다. 검사 도구는 중학교 2학년 도형의 성질 단원에서 명제와 증명에 관한 문항으로 작성된 검사지이고 검사지 문항의 내용은 다음과 같다.

증명학습의 단계	설문 문항의 내용
명제 및 명제의 참, 거짓의 판별	명제의 뜻
	명제 여부 판별
	명제의 참, 거짓 판별.
명제의 가정과 결론의 구분	명제의 가정, 결론 구분
	명제의 가정 쓰기
	명제의 결론 쓰기
증 명	증명의 흐름 알기
	제시된 증명과정을 보고 증명하려는 명제의 가정, 결론, 또는 가정과 결론 쓰기

본 장에서는 위와 같이 증명학습을 명제 및 명제의 참, 거짓의 판별, 명제의 가정과 결론의 구분, 증명 세 단계로 나누어 각 단계별로 작성한 설문을 통해 학생들이 보인 반응을 분석하고 그 결과를 논의한다.

2.1. 명제 및 명제의 참, 거짓의 판별

중학교 2학년에서 도입되는 명제는 참, 거짓을 분명히 구별할 수 있는 문장으로 정의 된다. 설문에 응답한 학생의 84%가 명제의 뜻을 알고 있었고, 88%의 학생이 "$x-3<1$.", "삼각형은 세변으로 이루어졌다.", "직사각형의 두 대각선의 길이는 같다."와 같이 참이고 잘 알려진 수학적 사실을 서술한 문장에 대해서는 명제 여부를 명확히 판별하였지만 많은 학생들이 명제와 참인 명제를 혼동하고 있다. 이것은 설문에 응한 54%의 학생이 "$2+3=6$"와 같이 거짓인 명제를 명제가 아니라고 답한 것으로부터 알 수 있다.

명제의 참, 거짓을 판별하는데 사용하는 기준은 유클리드 원론의 공리, 공준, 그리고 이들로부터 증명된 정리들이다. 그러나 중학교 증명학습에서 이러한 공리와 공준을 엄밀하게 적용하기보다는 직관과, 정의, 앞서 학습한 수학적 사실, 즉 정리를 적절히 사용해야한다. 실제로, 중학교 교과서에서 "삼각형의 내각의 합은 180°이다."라는 명제를 증명할 때, 중학교 1학년에서 배운 평행선의 엇각의 성질을 사용한다. 이 때, 평행선의 동위각의 성질이 성립함을 직관적으로 받아들이고 맞꼭지각의 성질을 이용하여 평행선의 엇각의 성질이 성립함을 증명한다. 즉, 평행선의 공리를 직관적으로 받아들이고 이를 이용하여 필요한 정리를 얻는다([2]).

한편 명제의 참, 거짓을 구별할 때, 그 명제가 참인 경우 증명을 해야 하고, 거짓인 경우 반례를 생각해야 하기 때문에 명제의 여부를 판단하는 것도 궁극적으로 명제의 참, 거짓을 판단하는 것과 같다. 또한 간단한 명제는 직관에 의하여 참, 거짓인지를 판별할 수 있지만 그렇지 못한 명제의 참, 거짓의 판별은 학생들에게 증명보다 더 어려운 문제이다. 증명은 주어진 명제가 참임을 보이기 위해 논리적으로 유효한 추론을 써서 가정에서 결론을 유도하는 것이다.

설문에 의하면 70%의 학생이 "자연수의 집합은 정수의 집합의 부분집합이다.", "이등변 삼각형에서 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분 한다."와 같이 교과서에 기술되어 있는 명제에 대한 참, 거짓을 옳게 판별한다. 그러나 "a가 6의 배수이면 a는 3의 배수이다."와 같이 간단하지만 가정으로부터 결론이 참임을 유도해야하는 명제의 경우 50%의 학생만이 참으로 판단하였고, "$a>b$이면 $ac>bc$."와 같이 참, 거짓을 판단하기 위해 반례를 생각해야 하는 명제의 경우 32%의 학생만이 거짓으로 판단하였다. "$a>b$이면 $ac>bc$."을 참으로 잘못 판단한 대부분의 학생들은 관련된 부등식의 성질을 잘 알고 있음을 확인 할 수 있었다. 이와 함께 배수가 어려운 수학적인 내용이 아님을 고려한다면 학생들은 자신이 알고 있는 수학적 지식을 적절히 사용하지 못하고 있음을 말해준다. 또한 "$a>b$이면 $ac>bc$."을 참으로 판단한 학생이 많다는 것은 반례를 드는 것이 학생들에게 생소하고 어려운 일임을 말해준다.

실제로, 반례를 들어 " $a > b$이면 $ac > bc$."이 거짓임을 말한 학생이 12%에 불과하였다. Galbruith도 학생들은 증명활동에서 반례의 중요성을 문맥상으로 이해할 뿐 반례를 거의 제시하지 못한다고 지적한다([11]). 또한 명제의 참과 거짓을 판별할 수 있는 학생은 기호화 되어 있는 명제의 경우 40.8%, 문장으로 되어 있는 명제의 경우 74.5%였다. 즉, 수학적 기호를 사용하여 표현한 명제에 대한 참, 거짓의 판단을 훨씬 더 어려워한다.

살펴본 바와 같이 학생들은 명제와 참인 명제를 혼동하고 있으며 명제의 참, 거짓의 판단에서 이미 알고 있는 수학적 정리, 정의나 개념을 적절히 활용하지 못한다. 또한, 반례를 제시할 수 있는 학생은 극히 일부에 불과하며 수학적 기호를 사용하여 표현한 명제의 참, 거짓의 판단을 어려워했다. 증명학습을 처음 접하는 학생들에게 명제 및 명제의 참, 거짓의 판단은 증명학습을 위한 준비학습인 동시에 간단하지만 증명문제와 같다. 증명을 학습하기 위해 반드시 가정과 결론에 대한 이해가 필요하기 때문에 명제의 참, 거짓을 판단하는 단계부터 가정과 결론을 이해시키는 지도가 필요하다.

2.2. 명제의 가정과 결론의 구분

증명은 가정으로부터 결론을 유도하는 과정으로 증명문제에서 가정과 결론의 구별은 증명의 출발점이다. Polya는 증명문제를 이해할 때 그 주요 부분인 가정과 결론에 주목할 것을 요구하고 있다. 중학교 2학년 도형의 성질 단원에서도 증명의 지도에 앞서 학생들에게 명제의 가정과 결론을 구분하는 것을 지도하고 있다. 명제의 가정과 결론에 관한 선행 연구에 의하면 30%이하의 학생만이 명제의 가정과 결론을 구별할 수 있다고 한다([4]).

학생들이 명제의 가정과 결론에 대한 이해의 정도를 알아보기 위해 명제의 가정과 결론을 써 보도록 한 문항에 대해 학생들은 다음과 같은 형태의 오류를 보였다.

(1) 가정에 명제를 쓰고 결론에 명제의 역을 쓰는 경우

(2) 가정에 명제를 쓰고 결론에 결론을 쓰는 경우

(3) 가정과 결론을 바꿔 쓰는 경우

(4) 가정에 맞는 예를 들고, 결론에는 명제를 다시 진술 하는 경우

(5) 결론에 명제를 다시 진술 하는 경우

이와 같은 형태의 오류는 학생들이 명제의 가정, 결론에 대한 용어를 이해하지 못할뿐만 아니라 가정, 결론, 그리고 명제를 혼동하고 있음을 의미한다.

서동엽([7])은 학생들이 'p이면 q이다.'형식으로 주어진 조건문에서 가정과 결론을 문장으로 기술할 수는 있으나, 가정과 결론에 도형의 성질이 포함되어 있는 경우 그 도형의 정의를 정확히 알지 못하여 가정과 결론을 기호로 나타내지 못하는 경우가 많다고 하였다.

실제로 설문 결과에 의하면 " $x-2=0$ $x=2$.", "△ABC≡△DEF이면 $\overline{AB}=\overline{DE}$ 이다."와 같이 'p이면 q이다.' 형태의 명제에 대해 56%의 학생이 가정과 결론의 구별하였다. 그러나 "정삼각형은 이등변삼각형이다."와 "합동인 두 삼각형의 넓이는 같다."와 같이 문장으로 표현되어 있거나 가정과 결론에 도형의 성질이 포함되어 있는 명제에 대해 38% 정도의 학생만이 가정과 결론의 구별하였다. 이 경우 결론만 언급한 학생은 전체의 22.4%인데 반해 가정만을 언급한 학생은 2.7%에 불과하였다. 'p이면 q이다.' 형태로 쓴 명제에서는 가정과 결론이 놓여있는 위치 때문에 그들의 구분은 용어의 문제에 불과하지만 문장으로 서술된 명제에서는 가정과 결론의 구분을 위해 가정과 결론 그리고 명제가 의미하는 수학적 내용에 대한 이해가 필수적이다. 특히, 설문 결과에서 알 수 있듯이 학생들은 명제의 가정에 대한 이해가 절대적으로 부족하다.

명제는 이전에 학생들이 접해보지 못한 낯선 문제이다. 학생들은 주어진 문제의 조건으로부터 답을 구하는 문제에는 익숙해져 있지만 명제는 조건과 같은 가정, 답과 같아 보이는 결론이 미리 제시되어 있다. 명제의 가정과 결론에 대한 지도에서 학생들이 이전까지 접해오던 일반적인 수학문제처럼 조건에 해당하는 가정을 제시하고 이 가정으로부터 성립하는 결론들을 추론하게 하여 성립한 결론들을 주어진 가정으로부터 어떻게 이끌어 낼 수 있는지를 이해하게함으로써 명제에서 가정의 의미와 역할을 자연스럽게 익히도록 지도하는 것이 필요하다. 명제의 가정에 대한 이러한 학습활동은 명제에서 가정의 의미와 역할의 이해뿐만 아니라 결론, 증명의 의미를 이해시키는 유용한 학습지도 방법이 될 것이다. 같은 맥락으로 결론만 제시하고 이 결론이 성립하도록 하는 조건을 조사하게 하여 명제에서 가정과 결론의 역할과 그들의 관계를 이해하도록 지도해야 한다. 특히, 이러한 증명학습-지도 방안은 학생들이 어려워하는 반례를 제시하는 능력을 향상시키는데도 도움을 줄 수 있을 것이다. 따라서 명제의 가정과 결론의 구분과 함께 그 의미와 역할에 대한 충분한 이해는 증명학습의 중요한 전제이다.

2.3. 증명과정

증명은 논리적으로 유효한 추론을 써서 가정에서 결론을 순차적으로 유도하는 논리적 전개이다. 증명과정에 출현하는 명제는 참인 것으로서 그 앞의 명제를 전제로 하는 결론인 동시에 그에 잇따른 명제를 결론으로 하는 전제이다. 명제의 가정으로부터 결론을 이끌어낼 때, 결론과 동치이거나 충분조건인 명제를 추론하는 과정을 반복함으로써 명제를 증명할 수 있다. 즉, 결론을 함의하면서 가정으로부터 결론보다 쉽게 이끌어낼 수 있는 명제를 추론함으로써 주어진 명제를 증명할 수 있다. 이것은 명제의 가정과 결론의 구분 단계에서 언급한 것처럼 가정으로부터 추론할 수 있는 결과,

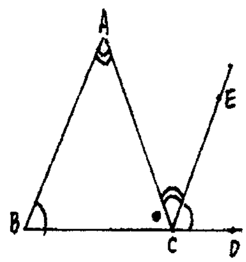
결론을 성립하게 하는 전제들을 추론하는 과정과 맥을 같이 한다. 이에 대해 Garnier와 Taylor는 수학적 증명을 가정에서 결론에 이르는 연쇄적인 함의로서 모든 전제가 참이고 논증이 타당한 경우라고 말한다. 이를 다음과 같이 형식적으로 구분 할 수 있다.

명제 'p이면 q이다.'의 증명은 명제 q_1, q_2, …, q_n들의 연쇄적인 추론이다. 이때, $p=q_1$, $q=q_n$이고 각각의 q_i는 다음의 준거 중 한 가지 이상을 만족한다 ([9]).

(a) 공리이거나 앞서 증명된 정리이다.
(b) 추론 규칙을 이용하여 앞선 명제로부터 추론될 수 있다.
(c) 앞선 명제와 동치인 명제이다.

예를 들면 명제 "삼각형의 세 내각의 크기는 180°이다"는 아래 그림으로부터 다음과 같이 명제들을 연쇄적으로 추론함으로써 증명될 수 있다.

[$q_1=p$] $\angle A, \angle B, \angle C$는 삼각형의 세 내각이다.
[q_2] $\angle A=\angle ACE$ (엇각), $\angle B=\angle ECD$ (동위각)
[q_3] $\angle A + \angle B + \angle C = \angle ACE+\angle ECD+\angle ACB$
[q_4] $\angle ACE+\angle ECD+\angle ACB=180°$
[$q=q_5$] $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$



학생들이 증명 과정에서 가정과 [q_j]($j<i$), 그리고 수학적인 성질을 사용하여 [q_i]를 추론하는 능력을 알아보기 위해 위 추론과정을 다음과 같이 증명으로 구성하여 제시하였다.

다음은 "삼각형의 세 내각의 크기는 180°이다" 을 증명하는 과정이다. ( )안에 알맞은 것을 쓰시오. [가정] $\angle A, \angle B, \angle C$가 삼각형의 세 내각이다. [결론] $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

[증명] 오른쪽 그림에서 △ABC의 변 BC의 연장선 BD를 긋는다. 또 꼭짓점 C에서 $\overline{AB}$에 평행한 반직선 CE를 그으면 평행선의 성질에 의하여

∠A = (∠) (엇각)

∠B = (∠) (동위각) ⋯ [q_2]

이므로

∠A + ∠B + ∠C= ( ) + ( ) + ∠C ⋯ [q_3]

이다.

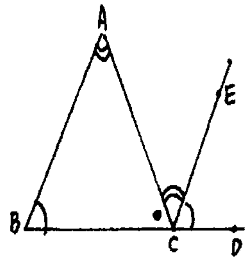
위 등식에서

( ) + ( ) + ∠C = 180° ⋯ [q_4]

이다. 그러므로 △ABC의 세 내각의 크기의 합

∠A + ∠B + ∠C=180° ⋯ [$q = q_5$]

이다.



증명과정에서 엇각과 동위각을 언급하고 그림을 제시하여 삼각형의 세 내각의 합이 평각과 같음을 암시하고 있기 때문에 학생들이 위 증명과정을 완성하는 과정을 통하여 그들의 수학적 사실의 활용 능력보다 추론 능력을 알아볼 수 있다. 위 증명과정은 가정인 [$p = q_1$]으로부터 [q_2], [q_3], [q_4]을 순차적으로 추론하여 [$q = q_5$], 즉 결론에 도달하는 과정이다. 설문에 응답한 학생 중에서 40%의 학생이 [q_2]를 추론하였지만 그들 중 35%의 학생들은 [q_3]에 도달하는데 실패했다.

실제로 학생들이 명제 "삼각형의 세 내각의 크기는 180°이다."를 증명하기 위해서는 [$q = q_5$], 즉 결론을 이끌어내기 위해 [q_4], [q_4]를 이끌어내기 위해 [q_3], [q_3]를 이끌어내기 위해 [q_2]를 각각 추론해야 한다. 이 때, 각각의 추론단계에서 가정인 [$p = q_1$], 앞선 [q_i]와 이미 배운 수학적 사실들을 활용해야 한다. 효과적인 추론을 위해 [$p = q_1$]으로부터 얻을 수 있는 여러 명제들을 추론해 보고, 그들 중에서 증명하는 명제의 결론, 즉 [$q = q_5$]을 함의하는 명제들을 생각해야한다. [$p = q_1$]으로부터 쉽게 [$q = q_5$]를 추론할 수 없다면 [$q = q_5$]의 충분조건이 되는 여러 명제 중에서 가정으로부터 이끌어낼 수 있는 명제(예를 들면 [q_4])를 추론해야 한다. 이와 같이 추론된 명제를 결론으로 하여 위와 같은 과정을 되풀이함으로써 증명문제를 해결할 수 있다. 즉, 증명은 가정으로부터 얻을 수 있는 여러 결론들을 추론하거나, 결론의 충분조건을 추론하는 단계를 반복하는 것이다.

그러나 위에서 제시한 괄호 넣기 문제처럼 그림을 통하여 충분한 암시를 제시한 상

황에서도 많은 학생들은 명제 [q_3]을 추론하는데 실패했다. [$p= q_1$]에서 [q_2]의 추론은 괄호 안에 동의각과 엇각의 언급으로 단순히 평행선의 성질을 묻는 문제임을 고려한다면 [q_1]에서 [q_3]을 추론할 수 있는 학생은 전체 학생의 25%미만이다. 학생들이 [q_2]로부터 [q_3]를 추론하는 것과 같은 가장 기본적인 추론조차 쉽게 하지 못하는 것은 증명의 의미를 명확히 이해하지 못하기 때문이다. 학생들이 증명의 의미를 이해하지 못하는 것은 설문의 다른 문항에서 보인 반응으로도 확인할 수 있다. 우선 제시된 증명 과정을 보고 증명하려고 하는 명제의 결론이 무엇인지를 묻는 문항에서 24.5%의 학생만이 결론을 옳게 답하였고, 가정을 결론으로 생각하거나 기호 사용을 제대로 하지 못하는 등의 반응을 보였다. 그리고 제시된 증명과정을 보고 증명하고자 하는 명제의 가정과 결론을 모두를 쓰도록 한 설문에 응답한 학생의 16.8%만이 가정과 결론을 옳게 서술하였다. 같은 문항에서 결론을 쓴 학생은 37.6%였지만 가정을 쓴 학생은 20.3%에 불과했다. 또한 명제의 증명과정에서 일부분을 생략하고 제공한 4문항에 대하여 1문항을 제외하고 모두 20% 미만의 학생만이 생략된 부분을 채워 증명을 완성하였다.

증명과정에서 학생들은 필요한 명제들을 추론하기 위해 알고 있는 수학적 사실을 적절히 활용하는 능력이 부족할 뿐만 아니라 명제의 참, 거짓을 판별하는 정도의 추론이나 증명을 하지 못한다. 또한 완성된 증명을 보고 증명하려는 명제의 가정과 결론을 파악하지 못한다. 이것은 수학적 사실을 활용하는 능력보다는 증명의 흐름, 즉 증명의 의미를 이해하지 못하기 때문이다. 앞서 언급한 바와 같이 증명의 의미의 이해는 가정과 결론의 의미와 역할을 이해함으로써 가능하다. 특히, 학생들이 제시된 증명을 읽고 증명하려고 하는 명제의 가정을 파악하는 능력이 현저히 떨어지는 것은 증명학습에서 가정을 이해하는 것이 가장 어려운 일임을 알 수 있다. 따라서 가정의 의미와 역할에 대한 이해의 부족은 증명 능력 향상에 걸림돌이 되고 있다.

3. 결론

수학을 가르치는 가장 큰 목적 중 하나는 학생들에게 수학적 추론 능력을 신장시키는 것이다. 일상생활에서 어떤 주장을 펼칠 때, 거기에 합당한 근거를 제시하여 그것이 참임을 설명하고, 어떤 전제가 참임을 가정한다면 그 전제로부터 참인 사실과 참인 추론 규칙에 따라 이끌어진 결론은 역시 참이라는 연역적 사고력을 논리적인 사고력이라 할 수 있다. 이러한 사고력을 키우기 위해 증명학습은 수학의 다른 어떤 영역보다도 그 비중이 크다고 할 수 있다. 하지만 많은 연구에서 증명학습은 학생들이 수학에서 가장 어려워하는 내용으로 증명문제를 해결할 수 있는 학생의 비율은 매우 낮은 것으로 조사되었다.

본 논문에서는 증명학습을 교과서의 내용과 순서에 따라 세 단계로 나누고 그에 따라 작성한 설문을 통하여 각 단계에서 학생들이 보인 반응을 살펴보았다. 그 결과를 정리하면 다음과 같다.

먼저 명제 및 명제의 참, 거짓의 판단하는 단계에서 학생들은 명제와 참인 명제를 혼동하고 있으며 명제의 참, 거짓의 판별에서 수학적 성질을 적절히 활용하지 못하고 있다. 또한, 수학적인 기호를 포함하고 있는 명제의 참, 거짓의 판단을 어려워했고 거짓인 명제에 대해 반례를 제시하지 못했다.

명제의 가정과 결론의 구분 단계에서는 가정, 결론 그리고 명제를 혼동하고 있고, 문장으로 서술 되어있거나 가정과 결론에 수학적인 사실을 포함하고 있는 명제에 대하여 가정과 결론의 구분을 어려워했다. 특히 명제의 가정과 결론의 의미와 역할을 명확히 이해하지 못하는 것으로 나타났다.

증명 과정에서는 가정으로부터 필요로 하는 결론들을 추론하기 위해 이미 알고 있는 수학적 사실을 활용하지 못하고 명제의 참, 거짓을 판별하는 정도의 추론을 하지 못한다. 가정인 전제로부터 성립하는 간단한 수학적인 성질을 추론하지 못하는 것은 증명의 의미를 이해하지 못하는 것이다. 이것은 제시된 증명과정을 보고 가정, 결론, 또는 가정과 결론이 무엇인지 알지 못하는 것으로부터 확인할 수 있다.

도형의 기본 성질에 대한 증명을 유클리드 방식으로 전개하더라도 증명의 의미에 대한 이해가 결여된 상태에서 암기하는 등의 형식적인 증명학습-지도 방안은 학생들에게 증명과정을 통해 얻을 수 있는 추론능력과 논리적인 사고력의 향상을 포기하게 하는 것이다. 학생들이 증명의 의미를 이해하지 못하는 것은 명제의 가정과 결론의 의미와 역할을 명확히 이해하지 못하는데서 비롯됨을 알 수 있었다. 따라서 명제의 참, 거짓을 판별하는 단계에서부터 간단히 참, 거짓을 구별할 수 있는 명제에 관한 문제를 학생들이 충분히 연습함으로써 가정과 결론의 의미와 역할을 명확하게 이해시키는 지도가 필요하다.

참고 문헌

1. 교육부, 중학교 수학과 교육과정 해설, 대한교과서주식회사, 1994
2. 김남희 외, 수학교육과정과 교재연구, 경문사, 2006
3. 나귀수, 증명의 본질과 지도 실제의 분석-중학교 기하 단원을 중심으로, 박사학위논문, 1998
4. 류성림, 중학생의 기하 증명 능력과 오류에 관한 연구, 한국교원대학교 석사학위논문, 1993
5. 박창균, 직관주의, 한국수학사학회지, 10(1997) No. 2, 82-88.
6. 박창균, 플라톤주의와 사회적 구성주의, 한국수학사학회지, 15(2002), No. 2, 67-76.
7. 박창균, 수리논리학의 역사적 배경과 괴델, 한국수학사학회지, 21(2008), No. 1, 17-28.
8. 서동엽, 증명의 구성 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색-중학교 수학을 중심으로, 서울대학교 박사학위논문, 1999
9. 서동엽, 수학의 형식과 대상에 따른 수학적 추론 지도 수준, 대한수학교육학회지, 16(2006), No. 2, 95-113.
10. 우정호, 증명지도의 재음미, 대한수학교육학회논문집, 4(1994), No 1, 3-24.
11. 이종희, 김부미, 증명학습에서 생성-수렴 수업 모형의 개발과 적용, 대한수학교육학회지(학교수학), 6(2004), NO. 1, 59-90.

Student's difficulties in the teaching and learning of proof

Department of Mathematics Education, Dankook Unversity **Chang Il Kim**
Department of Mathematics Education, Dankook Unversity **Choon Boon Lee**

In this study, we divided the teaching and learning of proof into three steps in the demonstrative geometry of the middle school mathematics. And then we surveyed the student's difficulties in the teaching and learning of proof by using of questionnaire. Results of this survey suggest that students cannot only understand the meaning of proof in the teaching and learning of proof but also they cannot deduce simple mathematical reasoning as judgement for the truth of propositions. Moreover, they cannot follow the hypothesis to a conclusion of the proposition

It results from the fact that students cannot understand clearly the meaning and the role of hypotheses and conclusions of propositions. So we need to focus more on teaching students about the meaning and role of hypotheses and conclusions of propositions.

Key words : proposition, hypothesis, conclusion, proof

2000 Mathematics Subject Classification : 97D70

ZDM Subject Classification : D73, E53, G13

접수일 : 2008년 6월 2일 수정일 : 2008년 7월 4일 게재확정일 : 2008년 7월 10일